Unione Matematica Italiana
Scuola Normale Superiore

Progetto Olimpiadi della Matematica

GARA di FEBBRAIO

17 febbraio 2016

Da riempirsi da parte dello studente:

Nome:____________ Cognome:____________ Genere: F M

Indirizzo:____________ Città:____________

Scuola:____________ Anno di corso: 1 2 3 4 5 Città:____________

Email:____________ Taglia per eventuale maglietta: S M L XL

1. Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. NON È AMMESSO L'UTILIZZO DI CALCOLATRICI, LIBRI DI TESTO E TAVOLE NUMERICHE. È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno; IN PARTICOLARE, È VIETATO L'USO DI TELEFONI CELLULARI.
2. La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi.
3. Nei problemi dal numero 1 al numero 12 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in questa pagina nella relativa finestrella più in basso. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
4. I problemi 13 e 14 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in questa pagina nella relativa finestrella più in basso. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
5. I problemi 15, 16 e 17 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tali problemi verranno valutati con un punteggio **da 0 a 15**.
6. Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!
7. Per correttezza nei confronti di coloro che facessero la gara in momenti diversi della giornata, ti chiediamo di non diffondere informazioni sul testo e sulle risposte prima delle 20 di questa sera. Grazie!

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Da riempirsi a cura dell'insegnante:

Valutazione esercizi dimostrativi

15	16	17

Punteggio totale
(da foglio di calcolo)

Visitate il sito internet delle olimpiadi:
`http://olimpiadi.dm.unibo.it`
ed il forum delle olimpiadi: `http://www.oliforum.it`

Ringraziamenti:

La gara non sarebbe stata possibile senza la preziosa collaborazione di tutti coloro che hanno proposto, risolto, valutato e modificato i problemi:

Alberto Alfarano, Alberto Bucci, Alessandro D'Andrea, Alessandro Iraci, Andrea Caberletti, Andrea Dal Zotto, Andrea Marino, Andrea Pozzoli, Angela Veronese, Camilla Casamento Tumeo, Clara Antonucci, Daniele Ahmed, Danilo Ciaffi, Dario Rancati, Davide Danesi, Emanuele Tron, Fabio Ferri, Fabio Lilliu, Federica Cecchetto, Federico Glaudo, Federico Poloni, Francesco Ballini, Francesco Florian, Francesco Mugelli, Francesco Sala, Giada Franz, Gianmaria Tomaselli, Gioacchino Antonelli, Giona Micossi, Giorgio Busoni, Giovanni Barbarino, Giovanni Zazzali, Giulia Cornali, Giulia Trevisan, Giuseppe Re, Giuseppe Rosolini, Igor Simunec, Lorenzo Benedini, Luca Bruni, Luca Capizzi, Luca Nesterenko, Ludovico Pernazza, Luigi Lunardon, Marcello Mamino, Marco Miani, Marco Trevisiol, Matteo Colanero, Matteo Migliorini, Mattia Magnabosco, Morena Porzio, Nicola Picenni, Paolo Leonetti, Paolo Monti, Raffaele Salvia, Riccardo Zanotto, Roberto Fratello, Rocco Mora, Salvatore Raucci, Shuyi Yang, Simone Bombari, Simone Cappellini, Simone Di Marino, Simone Pelizzola, Stefano Scalese e Vittoria Ricciuti.

Alessandra Caraceni, Luigi Amedeo Bianchi e Davide Lombardo

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. Cinque amici, Aurelio, Ennio, Flaminia, Lucia e Regolo, hanno mangiato al ristorante. Il conto è di 180 euro, e viene pagato da Lucia, Ennio e Regolo: la prima paga 90 euro, il secondo 57 euro e il terzo 33 euro. Qual è il minimo numero di transazioni del tipo "Tizio dà n euro a Caio" che devono essere effettuate in modo che alla fine ognuno dei cinque abbia pagato la stessa cifra?

   (A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

2. Un testo antico dichiara che Matusalemme visse 150♦ anni, dove il simbolo ♦ sostituisce la cifra delle unità, che gli studiosi non riescono a leggere. Fortunatamente siamo in possesso di altri tre manoscritti sulla vita di Matusalemme; il primo sostiene che egli visse un numero pari di anni, il secondo che ne visse un numero multiplo di 3, il terzo che ne visse un numero multiplo di 5. Sapendo che esattamente uno di questi tre manoscritti contiene un'informazione falsa, quante diverse cifre potrebbero celarsi dietro il simbolo ♦?

   (A) Nessuna **(B)** Una **(C)** Due **(D)** Tre **(E)** Quattro

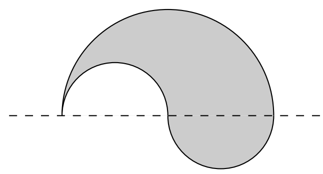
3. Dato un numero reale x il simbolo $\lfloor x \rfloor$ indica la sua parte intera (cioè il più grande intero minore o uguale ad x) e $\{x\}$ la sua parte frazionaria (cioè $x - \lfloor x \rfloor$). Siano x, y, z tre numeri reali positivi che soddisfano il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3\lfloor x \rfloor - \{y\} + \{z\} = 20{,}3 \\ 3\lfloor y \rfloor + 5\lfloor z \rfloor - \{x\} = 15{,}1 \\ \{y\} + \{z\} = 0{,}9 \end{cases}$$

   Quanto vale $x + y + z$?

   (A) 10,8 **(B)** 11,1 **(C)** 11,6 **(D)** 12,8 **(E)** 13

4. Si consideri la superficie grigia in figura, delimitata da semicirconferenze, la più grande di raggio 2 e le due più piccole di raggio 1. Determinare il volume della regione di spazio attraversata dalla superficie nel corso di una rotazione di 180° attorno alla retta tratteggiata.



   (A) $\frac{2}{3}\pi$ **(B)** 4π **(C)** $\frac{16\pi}{3}$ **(D)** $\frac{35\pi}{6}$ **(E)** 6π

5. Cecilia ha un dado a sei facce (numerate da 1 a 6) e 4 colori a disposizione. In quanti modi può colorare le sei facce del dado usando in totale **almeno** tre colori diversi e facendo in modo che facce opposte siano di colori diversi?

   (A) $4^3 \cdot 3^3$ **(B)** $3^6 - 2^6$ **(C)** $2^6 \cdot 3^2$ **(D)** $2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ **(E)** Nessuna delle precedenti

6. Sia k un intero positivo. Poniamo $a_1 = 1$ e, per ogni $n \geq 1$, $a_{n+1} = k(a_1 + \cdots + a_n) + 1$ (quindi per esempio $a_2 = ka_1 + 1$ e $a_3 = k(a_1 + a_2) + 1$). Qual è il più piccolo valore di k tale che a_{2016} sia multiplo di $3^{4031} \cdot 7^{4027}$?

   (A) 1271 **(B)** 1322 **(C)** 1331 **(D)** 1702 **(E)** 2048

7. Un poligono si dice *convesso* se tutti i suoi angoli interni hanno ampiezza strettamente minore di 180°. Quanti angoli di ampiezza minore di 150° può avere al massimo un poligono convesso di 2016 lati?

   (A) 11 **(B)** 12 **(C)** 13 **(D)** 17 **(E)** 2016

8. Dato un triangolo ABC di lati $AB = 13$, $BC = 14$ e $AC = 15$, sia H il piede dell'altezza relativa al lato BC, M il punto medio di BC e N il punto medio di AM. Quanto vale la lunghezza di HN?

   (A) $2 + 2\sqrt{3}$ **(B)** 6 **(C)** $\sqrt{37}$ **(D)** $4 + \sqrt{7}$ **(E)** $\sqrt{42}$

9. La sequenza dei numeri di Fibonacci $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ è tale che $F_1 = F_2 = 1$ e che l'n-esimo termine (con $n \geq 3$) sia la somma dei due precedenti (i primi termini della successione sono quindi $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2 = 1 + 1$, $F_4 = 3 = 2 + 1$, $F_5 = 5 = 3 + 2$). Quanti sono i numeri di Fibonacci che hanno esattamente 2016 cifre nella loro scrittura decimale?

   (A) Almeno 2 e al massimo 3 **(B)** Almeno 4 e al massimo 5 **(C)** Almeno 6 e al massimo 7 **(D)** Almeno 8 e al massimo 9 **(E)** 10 o più

10. Sia $ABCDEF$ un esagono regolare di area 1. Si considerino tutti i triangoli i cui vertici appartengono all'insieme $\{A,B,C,D,E,F\}$: quanto vale la somma delle loro aree?

    (A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** 7

11. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che $p(0) = 6$. Si sa che tra gli interi m compresi fra 1 e 60 esattamente 40 sono tali che $p(m)$ sia multiplo di 3; inoltre, si sa che tra gli interi m compresi fra 1 e 60 esattamente 30 sono tali che $p(m)$ sia multiplo di 4. Quanti sono gli interi m compresi tra 1 e 60 tali che $p(m)$ sia multiplo di 6? **Nota:** tutti gli intervalli che compaiono in questo problema sono da considerarsi con gli **estremi inclusi**.

    (A) 10 **(B)** 20 **(C)** 25 **(D)** 30 **(E)** 40

12. Alberto e Barbara giocano a biliardino. Prima di iniziare, decidono che la partita finirà non appena uno dei due avrà fatto 3 gol più dell'altro. Sapendo che, per ogni pallina giocata, sia Alberto che Barbara hanno il 50% di probabilità di segnare, qual è la probabilità che la partita non termini prima del ventunesimo gol?

    (A) $\frac{3^9}{2^{18}}$ **(B)** $\frac{3^{10}}{2^{20}}$ **(C)** $\frac{3^{20}}{2^{40}}$ **(D)** $\frac{13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 31}{2^{18}}$ **(E)** $\frac{3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}{2^{18}}$

Problemi a risposta numerica – 5 punti

13. Sia n il più piccolo intero positivo di 4 cifre maggiore o uguale a 2016 che gode della seguente proprietà: esiste un intero positivo S tale che

$$S = \sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{c + \sqrt{d + S}}}},$$

    dove a, b, c, d sono, nell'ordine, la cifra delle migliaia, delle centinaia, delle decine e delle unità di n. Quanto vale n?

14. Il PIN del telefono di Eugenia è composto da 4 cifre; Eugenia ricorda soltanto che la prima è compresa fra 0 e 6, la seconda fra 0 e 3, la terza fra 0 e 4, la quarta fra 0 e 2, e che la somma delle quattro cifre è almeno 8 (per esempio, il PIN potrebbe essere 3330). Quanti sono i codici compatibili con i ricordi di Eugenia?

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Siano m, n due interi maggiori o uguali a 2. Di una tabella a m righe e n colonne si sa che ogni casella contiene o il numero 1 o il numero -1, e che la somma totale di tutte le caselle è maggiore o uguale a zero. Genoveffa considera i percorsi che uniscono una casella della prima colonna (a sua scelta) ad una casella dell'ultima colonna (nuovamente a sua scelta) e che si muovono sempre da una casella ad una adiacente in orizzontale o verticale, senza ripassare due volte sulla stessa casella. Il valore di un percorso è la somma dei numeri presenti nelle caselle che esso attraversa.

(a) Dimostrare che per ogni $m, n \geq 2$ esistono tabelle a m righe e n colonne senza percorsi di valore 2 o più.

(b) Dimostrare che è sempre possibile trovare un percorso di valore maggiore o uguale a 1.

SOLUZIONE:

Nome:______________________________Cognome:____

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Sia $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ una sequenza di interi positivi tali che a_{i+1} è il numero di divisori positivi di a_i per ogni $i \geq 1$. Supponiamo che $a_2 \neq 2$. Dimostrare che esiste un indice m tale che a_m sia un quadrato perfetto.

SOLUZIONE:

Nome:____________________ Cognome:____________________

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Sia $ABCD$ un rettangolo con $AB > BC$ e sia ω la sua circonferenza circoscritta. Siano E e F rispettivamente le intersezioni (distinte da A) della bisettrice dell'angolo $\widehat{BAD}$ con il lato CD e la circonferenza ω. La perpendicolare a DF passante per E interseca la corda DF in G e l'arco DF non contenente C nel punto H. Si dimostri che:

(a) i segmenti DF e FB hanno la stessa lunghezza;

(b) i triangoli DEG e DHG sono congruenti;

(c) i segmenti HF e FC sono uguali.

SOLUZIONE:

Nome:____________________Cognome:____________________

Soluzione dei Quesiti

1. La risposta è **(C)**. Il conto del ristorante è 180 euro, i commensali sono 5, quindi ciascuno deve pagare 36 euro. Chi ha anticipato più di tale cifra deve ricevere soldi da chi ha anticipato meno (e in particolare dai due amici che non hanno pagato nulla). Tuttavia, siccome nessuno deve ricevere un multiplo della quota singola, necessariamente ci saranno almeno 4 passaggi di denaro. Una possibile soluzione con 4 è la seguente: Aurelio dà 36 euro a Flaminia. Flaminia dà 72 (i 36 che ha ricevuto da Aurelio più i 36 che deve) euro a Regolo, Regolo dà 75 (i 72 che ha ricevuto da Flaminia più i 3 che deve) euro a Ennio che ne dà 54 a Lucia (i 75 che ha ricevuto da Regolo meno i 21 che gli spettano). A questo punto Lucia riceve esattamente i 54 che le spettano ($90 - 36 = 54$) e ciascuno ha pagato la sua parte.

2. La risposta è **(B)**. Ci sono tre possibili casi da analizzare:

   (a) 150♦ è multiplo di 2 e 3, ma non di 5;
   (b) 150♦ è multiplo di 2 e 5, ma non di 3;
   (c) 150♦ è multiplo di 3 e 5, ma non di 2.

   Come prima cosa notiamo che 1500 è multiplo di $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, e non ci sono altri multipli di 10 o 15 tra 1500 e 1509. Gli ultimi due casi sono quindi esclusi. L'unico multiplo di 6 che non sia anche multiplo di 5 tra i 10 possibili valori è 1506, dunque solo il primo dei tre casi può essere quello giusto, e c'è una sola possibilità di scelta per la cifra mancante.

3. La risposta è **(D)**. Iniziamo dalla prima equazione del sistema: abbiamo $19 < 20{,}3 + \{y\} - \{z\} < 22$, quindi il valore di $3\lfloor x \rfloor$, che è un intero multiplo di 3, deve essere necessariamente 21, da cui $\lfloor x \rfloor = 7$. Consideriamo ora la seconda equazione: poiché $15 < 3\lfloor y \rfloor + 5\lfloor z \rfloor = 15{,}1 + \{x\} < 17$ otteniamo $15{,}1 + \{x\} = 16$, poiché $3\lfloor y \rfloor + 5\lfloor z \rfloor$ è intero, da cui $\{x\} = 0{,}9$. Sempre dall'uguaglianza $3\lfloor y \rfloor + 5\lfloor z \rfloor = 16$ possiamo ricavare che $\lfloor z \rfloor < 4$. Tuttavia per $\lfloor z \rfloor = 0, 1, 3$ il valore $3\lfloor y \rfloor = 16 - 5\lfloor z \rfloor$ non risulta essere multiplo di tre, perciò necessariamente $\lfloor z \rfloor = 2$ da cui $\lfloor y \rfloor = \frac{16 - 5\lfloor z \rfloor}{3} = 2$. Possiamo allora concludere che

   $$x + y + z = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor z \rfloor + \{x\} + \{y\} + \{z\} = 7 + 2 + 2 + 0{,}9 + 0{,}9 = 12{,}8.$$

   Un'ultima osservazione: combinando la terza equazione con la relazione $\{y\} - \{z\} = 0{,}7$ che si ricava dalla prima equazione, è possibile ottenere $\{y\} = 0{,}8$ da cui $\{z\} = 0{,}1$, ma tale informazione non è necessaria per calcolare la somma dei tre numeri.

4. La risposta è **(C)**. Osserviamo che il volume richiesto è la metà di quello di una sfera di raggio 2; il solido ottenuto tramite la rotazione è infatti una mezza sfera di raggio 2, cui è stata tolta una semisfera di raggio 1 (corrispondente alla semicirconferenza piccola di sinistra) e aggiunta una semisfera identica (corrispondente alla semicirconferenza di destra). Dobbiamo dunque calcolare il volume di una semisfera di raggio 2, che vale $\frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot 2^3 = \frac{16\pi}{3}$.

5. La risposta è **(D)**. Contiamo innanzitutto in quanti modi possiamo colorare il cubo affinché facce opposte abbiano colori diversi. Abbiamo $4 \cdot 3$ scelte per le facce 1 e 6, e altrettante per ciascuna delle coppie di facce 2 e 5 e 3 e 4. Complessivamente abbiamo $4^3 \cdot 3^3$ colorazioni. Dobbiamo ora sottrarre da esse tutte quelle colorazioni che non soddisfano il primo requisito, cioè tutte quelle in cui abbiamo adoperato solamente 2 colori. Il numero di tali colorazioni è pari al numero di modi di scegliere 2 colori distinti tra i 4 disponibili, 6, moltiplicato per il numero di possibili colorazioni del cubo con tali colori, 2^3, poiché per ogni coppia di facce abbiamo 2 modi di usare i due colori a disposizione. Il numero di colorazioni ammissibili è quindi $12^3 - 6 \cdot 8$, che è uguale a $2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

6. La risposta è **(B)**. Dimostriamo innanzitutto che $a_n = (k+1)^{n-1}$: abbiamo $a_1 = 1 = (k+1)^{1-1}$ e $a_{n+1} = k(a_n + \ldots + a_1) + 1 = ka_n + k(a_{n-1} + \ldots + a_1) + 1 = ka_n + a_n = (k+1)a_n$; per ricorrenza, si ottiene la formula voluta.

   Ora consideriamo $a_{2016} = (k+1)^{2015}$: esso è divisibile per $3^{4031} = 3^{2 \cdot 2015 + 1}$ se e solo se 3^3 divide $k+1$; analogamente, a_{2016} è divisibile per $7^{4027} = 7^{2 \cdot 2015 - 3}$ se e solo se $k+1$ è divisibile per 7^2. In conclusione, $k = 3^3 \cdot 7^2 - 1 = 1322$ è il minimo valore ammissibile.

7. La risposta è **(A)**. Consideriamo un poligono convesso con 2016 lati, e supponiamo che abbia esattamente a angoli di ampiezza inferiore a $150°$; la somma dei suoi angoli interni vale $(2016-2)\cdot 180°$. Nel contempo, dal momento che ognuno dei $2016-a$ angoli restanti ha ampiezza minore di $180°$, tale somma è strettamente inferiore a $a\cdot 150° + (2016-a)\cdot 180°$. Otteniamo quindi la disuguaglianza

$$2014\cdot 180° < a\cdot 150° + (2016-a)\cdot 180°,$$

ovvero $a\cdot 30° < 360°$, da cui $a<12$.

D'altra parte, non è difficile vedere che esiste un poligono con 11 angoli di ampiezza $149°$ e 2005 di ampiezza $\frac{1}{2005}(2014\cdot 180° - 11\cdot 149°)$.

8. La risposta è **(C)**. Il triangolo AHM è rettangolo, quindi abbiamo $\overline{HN}=\overline{AM}/2$ perché HN è la mediana relativa all'ipotenusa. Ponendo $\overline{BH}=x$ abbiamo $\overline{HC}=\overline{BC}-\overline{BH}=14-x$ e, per il teorema di Pitagora, $\overline{AH}^2=\overline{AB}^2-\overline{BH}^2=\overline{AC}^2-\overline{HC}^2$, cioè $13^2-x^2=15^2-(14-x)^2$, da cui ricaviamo $x=5$. Abbiamo allora

$$\overline{AH}=\sqrt{13^2-5^2}=12,\qquad \overline{AM}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{HM}^2}=\sqrt{12^2+2^2}=\sqrt{148}=2\sqrt{37},$$

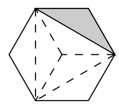
dunque $\overline{HN}=\sqrt{37}$.

9. La risposta è **(B)**. Osserviamo innanzitutto che (per $n\ge 2$) la relazione $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$, insieme al fatto che $F_{n-1}\le F_n$, implica che F_n è almeno metà di F_{n+1}. Sia ora $k\ge 1$ e F_n il più piccolo numero di Fibonacci con $k+1$ cifre decimali (quindi $F_n\ge 10^k$). Si ha $F_{n-1}\ge \frac{1}{2}\cdot 10^k$ e dunque $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}\ge \left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot 10^k$. Procedendo nello stesso modo si ottengono successivamente le disuguaglianze $F_{n+2}\ge\left(\frac{3}{2}+1\right)\cdot 10^k$, $F_{n+3}\ge\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)10^k$, $F_{n+4}\ge\left(4+\frac{5}{2}\right)\cdot 10^k$ e $F_{n+5}\ge\left(\frac{13}{2}+4\right)\cdot 10^k>10^{k+1}$, da cui vediamo che F_{n+5} ha almeno $k+2$ cifre decimali.

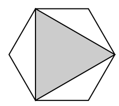
D'altra parte, per definizione abbiamo $F_{n-2}\le F_{n-1}<10^k$, da cui otteniamo successivamente $F_n<2\cdot 10^k, F_{n+1}<3\cdot 10^k, F_{n+2}<5\cdot 10^k, F_{n+3}<8\cdot 10^k$, quindi F_{n+3} ha ancora $k+1$ cifre decimali. In conclusione, dato qualunque numero $k\ge 2$, ci sono almeno 4 e al massimo 5 numeri di Fibonacci con k cifre.

10. La risposta è **(D)**. Consideriamo tutti i triangoli non degeneri i cui vertici sono anche vertici dell'esagono, distinguendoli in 3 tipi:

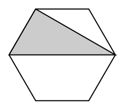
Tre vertici consecutivi. Ci sono 6 triangoli di questo tipo (uno per ciascun vertice), e l'area di ognuno è pari ad $1/6$ di quella dell'esagono (vedi figura).



Un vertice ogni due. Ci sono due triangoli di questo tipo, e la loro area è pari a quella dell'esagono meno l'area di tre triangolini del primo tipo, ovvero $1/2$.



Due vertici adiacenti ed uno no. In questo caso abbiamo 12 triangoli possibili, due per ciascun lato (fissato un lato abbiamo due vertici sul lato opposto tra cui scegliere), e l'area di ciascuno è uguale a $1/3$ (metà dell'area dell'esagono meno l'area di un triangolo del primo tipo).



La somma delle aree di questi triangoli è quindi $6\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{2}+12\cdot\frac{1}{3}=6$.

11. La risposta è **(E)**. Per dimostrarlo, vogliamo mostrare che $p(m)$ è pari per ogni intero m, e che di conseguenza $p(m)$ è multiplo di 6 se e solo se è multiplo di 3. A questo punto possiamo sfruttare l'ipotesi che gli interi m per cui $p(m)$ è multiplo di 3 sono precisamente 40 per ottenere la risposta.

Osserviamo innanzitutto che la parità di $p(m)$ dipende solo dalla parità di m: infatti la parità di un monomio $a\cdot m^k$ dipende solo dalle parità di m e di a, e la parità del valore di $p(m)$, che è una somma di monomi in m, dipende solo dalla parità di ogni addendo. È quindi sufficiente mostrare che $p(m)$ è pari per almeno un valore pari e per almeno un valore dispari di m. Per ipotesi $p(0) = 6$, quindi ci resta da mostrare l'esistenza di un valore dispari di m per il quale $p(m)$ è pari. Possiamo scrivere $p(x) = x \cdot q(x) + 6$, dove $q(x)$ è un polinomio a coefficienti interi. Se m è multiplo di 4, diciamo $m = 4k$, allora $p(m) = 4k \cdot q(4k) + 6$ non è multiplo di 4 (dà resto 2 nella divisione per 4). Per ipotesi, ci sono 30 interi fra 1 e 60 tali che $p(m)$ sia multiplo di 4; siccome gli m multipli di 4 non hanno questa proprietà, e gli m pari ma non multipli di 4 sono soltanto 15, devono esistere degli interi dispari tali che $p(m)$ sia pari.

12. La risposta è **(A)**. Indichiamo con P_n la probabilità che la partita **non** termini con l'n-simo gol (né prima). Supponiamo che dopo un numero dispari $(2k-1)$ di gol la partita non sia ancora finita: la differenza tra i gol segnati dai due giocatori è allora uguale a 1 in valore assoluto, dal momento che è necessariamente dispari e non può essere maggiore di 2. Consideriamo il $2k$-esimo e il $(2k+1)$-esimo gol: la partita finisce solo se essi vengono entrambi segnati dal giocatore che era già in vantaggio, cosa che succede con probabilità $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$. Con probabilità $3/4$, invece, dopo il $(2k+1)$-esimo gol la differenza reti sarà nuovamente uguale a 1, e la partita non sarà finita. Otteniamo allora $P_{2k+1} = \frac{3}{4}P_{2k-1}$, cioè $P_1, P_3, P_5, \ldots$ formano una progressione geometrica di ragione $\frac{3}{4}$. Siccome chiaramente $P_1 = 1$ (la partita non può finire con il primo gol) abbiamo $P_{2k+1} = (3/4)^k$ per ogni $k \geq 0$. La probabilità richiesta è la probabilità che vengano segnati almeno 21 gol, o equivalentemente (per ragioni di parità) che la partita non termini con il 19-esimo gol (né prima). La risposta è quindi $P_{19} = (3/4)^9 = 3^9/2^{18}$.

13. La risposta è 2167. Innanzitutto 2167 soddisfa la proprietà richiesta con $S = 2$: infatti

$$\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{7+2}}}} = \sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{9}}}} = \sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{9}}} = \sqrt{2+\sqrt{4}} = \sqrt{4} = 2.$$

Mostriamo ora che non esistono interi n tra 2016 e 2166 che godono di questa proprietà. Iniziamo col dimostrare che S deve essere minore di 4. Infatti, se per assurdo fosse $S \geq 4$, avremmo

$$S(S-1) > 9 \Rightarrow S^2 > S + 9 \geq S + d \Rightarrow S > \sqrt{d+S};$$

analogamente si avrebbe $S^2 > S + 9 > \sqrt{d+S} + c \Rightarrow S > \sqrt{c+\sqrt{d+S}}$, e così via, fino ad arrivare alla contraddizione $S > \sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c+\sqrt{d+S}}}} = S$. Osserviamo poi che, siccome S è intero, tutti gli argomenti delle radici quadrate devono essere quadrati perfetti, e che siccome cerchiamo un numero tra 2016 e 2166 dobbiamo avere $a = 2$ e $b = 0$ o $b = 1$. Abbiamo inoltre $S > 1$, perché $S > \sqrt{a} \geq 1$, e da $S \leq 3$ troviamo $d + S \leq 12$, da cui $c + \sqrt{d+S} < 9 + 4 = 13$; allo stesso modo, tutti gli argomenti delle radici quadrate sono minori o uguali a 12. In particolare, $\sqrt{12} \geq \sqrt{b+\sqrt{c+\sqrt{d+S}}} = S^2 - a = S^2 - 2$, da cui otteniamo $S < 3$, cioè $S = 2$. Abbiamo allora $2 \leq d + S \leq 11$, e gli unici due quadrati perfetti in tale intervallo sono 4 e 9, che corrispondono a $d = 2$ e $d = 7$ rispettivamente. Trattiamo i due casi separatamente.

$d = 2$**.** Si ripresenta per c la stessa situazione appena vista per d. Se fosse $c = 2$ dovremmo avere che $b + \sqrt{2+2}$ è un quadrato perfetto, ma ciò non è vero né per $b = 0$ né per $b = 1$. Se invece $c = 7$, $b + \sqrt{7+2}$ è un quadrato perfetto per $b = 1$, il che però ci conduce a $2172 > 2167$.

$d = 7$**.** In questo caso $c + \sqrt{d+S} = c + 3$ deve essere un quadrato perfetto tra 3 e 12, da cui $c = 1$ oppure $c = 6$. Nel primo caso nuovamente $b + 2$ non è un quadrato perfetto per $b = 0{,}1$, mentre per $c = 6$ otteniamo che $b + 3$ deve essere un quadrato, cosa che accade per $b = 1$ e conduce alla soluzione 2167.

14. La risposta è 210. Consideriamo tutti i codici di 4 cifre che si possono formare con cifre appartenenti agli intervalli corretti (senza restrizioni sulla somma); queste sono in numero di $7 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 = 420$. Mostriamo adesso che esattamente metà di questi codici rispetta anche la condizione sulla somma delle cifre. Osserviamo che se $[a, b, c, d]$ sono 4 cifre negli intervalli indicati, allora lo stesso è vero per $[6-a, 3-b, 4-c, 2-d]$; diciamo che il secondo codice è il *compagno* del primo. La somma delle cifre di $[6-a, 3-b, 4-c, 2-d]$ è $15 - (a+b+c+d)$, che è maggiore o uguale a 8 se e solo se $a + b + c + d \leq 7$; in particolare, esattamente uno tra i due

codici $[a,b,c,d]$ e $[6-a,3-b,4-c,2-d]$ rispetta l'ipotesi sulla somma delle cifre. Osservando inoltre che il compagno del codice $[6-a,3-b,4-c,2-d]$ è nuovamente $[a,b,c,d]$, abbiamo così formato 210 coppie, ognuna delle quale contiene esattamente un codice compatibile con i ricordi di Eugenia.

15. (a) Supponiamo che la tabella contenga 1 e -1 disposti "a scacchiera" (in modo che le caselle adiacenti in orizzontale e verticale a una casella contenente 1 contengano -1, e viceversa), in modo che la casella in alto a sinistra contenga il numero 1 (questo garantisce che la somma dei numeri presenti nella tabella sia maggiore o uguale a 0). In qualunque percorso su questa tabella, un 1 è sempre seguito da un -1, a meno che non si tratti del contenuto dell'ultima casella del percorso; il valore di ogni percorso è dunque al più 1.

    (b) Se vi è una riga a somma strettamente positiva, questa costituisce un percorso di valore almeno 1. Possiamo perciò supporre che ciascuna riga abbia somma al più 0, e dunque, dato che la somma del contenuto di tutte le caselle è almeno 0, che tutte le righe abbiano somma nulla.

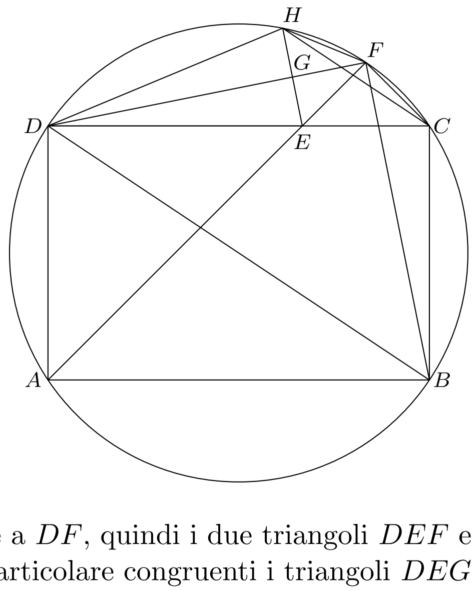
    Consideriamo ora la casella nell'angolo in alto a sinistra della tabella. Se essa contiene un $+1$, il percorso che parte dalla casella in questione e percorre interamente la seconda riga ha valore esattamente 1. Se invece essa contiene un -1, è sufficiente considerare un percorso che riempia l'intera tabella, ad eccezione della casella in questione (per esempio percorrendo le colonne a senso alterno, a partire però dalla seconda casella della prima colonna). Dato che abbiamo supposto che un percorso che copra l'intera tabella abbia valore 0, il percorso descritto sopra ha valore $0-(-1)=1$. In ogni caso, dunque, è possibile trovare un percorso di valore almeno 1.

16. Osserviamo che per ogni i abbiamo $a_{i+1} \le a_i$ (ogni divisore positivo di a_i è minore o uguale ad a_i), e che $a_{i+1} = a_i$ se e solo se $a_i \in \{1,2\}$, perché per $a_i \ge 3$ il numero $a_i - 1$ non è un divisore di a_i.

    Se $a_1 = 1$, allora a_1 è un quadrato perfetto; se $a_1 = 2$, allora $a_2 = 2$, il che contraddice l'ipotesi. Possiamo dunque supporre $a_1 \ge 3$, nel qual caso la successione a_i decresce strettamente ad ogni passo finché non raggiunge il valore 2. Sia $k > 2$ il primo indice per cui $a_k = 2$; a_{k-1} è allora un primo dispari, perché solo i numeri primi hanno esattamente due divisori positivi.

    Si noti ora che se un intero positivo n ha un numero dispari di divisori allora è un quadrato perfetto: se non lo fosse, l'insieme dei suoi divisori potrebbe essere partizionato in coppie della forma $\{a, n/a\}$ (si ha sempre $a \neq n/a$), e dunque avrebbe cardinalità pari. Ne consegue che a_{k-2} è un quadrato perfetto.

17. Per dimostrare **(a)** ci basta mostrare che il triangolo BDF è isoscele su base BD.

    Siccome AF è bisettrice dell'angolo $\widehat{BAD}$, abbiamo $\widehat{FAD} = \widehat{FAB}$. Inoltre, $\widehat{FBD} = \widehat{FAD}$ poiché insistono sullo stesso arco di circonferenza e, per il medesimo motivo, $\widehat{FDB} = \widehat{FAB}$. Quindi il triangolo BDF è isoscele di base BD, avendo i due angoli adiacenti alla base $\widehat{FBD}$ e $\widehat{FDB}$ uguali.

    Passiamo ora al punto **(b)**. Sappiamo che $\widehat{BAE} = \widehat{AED}$, in quanto angoli alterni interni dei due segmenti paralleli AB e CD tagliati dalla trasversale AE. Inoltre, siccome $\widehat{BAD}$ è retto e AE ne è bisettrice, $\widehat{DAE} = \widehat{AED} = 45°$. Dal momento che il quadrilatero $ADHF$ è inscritto in una circonferenza, $\widehat{DHF} = 180° - \widehat{DAF}$ e gli angoli $\widehat{DEA}$ e $\widehat{DEF}$ sono supplementari, quindi $\widehat{DEF} = \widehat{DHF}$.
    Ora osserviamo che, per costruzione, EH è perpendicolare a DF, quindi i due triangoli DEF e DHF sono simmetrici rispetto a DF e pertanto sono in particolare congruenti i triangoli DEG e DHG.

Per quanto riguarda infine il punto **(c)**, iniziamo osservando che dal punto precedente abbiamo

$$\widehat{CDF} = \widehat{EDG} = \widehat{GDH} = \widehat{FDH};$$

inoltre, gli angoli $\widehat{FDH}$ e $\widehat{HCF}$ insistono sullo stesso arco e sono quindi uguali, così come gli angoli $\widehat{FHC}$ e $\widehat{CDF}$. Ne deduciamo che gli angoli $\widehat{FHC}$ e $\widehat{HCF}$ sono uguali, quindi il triangolo FHC è isoscele di base HC e i segmenti FC ed FH hanno la stessa lunghezza.

Scale di valutazione degli esercizi dimostrativi

Esercizio 15

Ovviamente si assegnino **15 punti** per una soluzione completa, anche con traccia diversa dalla soluzione proposta.

1. La parte **(a)** vale 5 punti. Si assegnino 4 di questi 5 punti a chi dimentichi di imporre una condizione che faccia sì che la somma delle caselle sia non negativa.

2. La parte **(b)** vale 10 punti.

   5 punti per chi si riduce al caso in cui ogni riga ha somma nulla.

   5 punti per chi concluda.

   In caso di soluzioni parziali si possono per esempio assegnare punteggi secondo il seguente schema:

   3 punti per chi tratti il caso in cui m, n sono entrambi dispari.

   4 punti per chi tratti il caso $m = 2$, n arbitrario

   7 punti in totale per chi, dopo essersi ridotto al caso in cui ogni riga ha somma nulla, risolva il sotto-caso in cui almeno una casella della prima colonna contiene $+1$.

   7 punti in totale per chi, dopo essersi ridotto al caso in cui ogni riga ha somma nulla, osservi che sarebbe sufficiente trattare una tabella con due righe ed n colonne.

Esercizio 16

Si assegnino **15 punti** a una soluzione interamente corretta, anche diversa da quella proposta.
Per soluzioni incomplete si assegnino punti parziali secondo il seguente schema.

3 punti per l'osservazione che la successione è debolmente decrescente.

2 punti per l'osservazione che in effetti $a_{i+1} < a_i$ a meno che $a_i \in \{1,2\}$.

3 punti per l'osservazione che se un numero ha 2 divisori positivi, allora è primo.

2 punti per l'affermazione che un intero positivo con un numero dispari di divisori è un quadrato perfetto.

3 punti per una dimostrazione dell'affermazione precedente.

2 punti per chi concluda la dimostrazione.

Si sottragga **un punto** a chi non consideri il caso della successione costantemente uguale ad 1. La sola formula per il numero di divisori di un intero positivo, in assenza di deduzioni, non dà diritto ad alcun punto.

Esercizio 17

Si assegnino **15 punti** ad una soluzione corretta, anche diversa da quella proposta. Per soluzioni incomplete si assegnino punti parziali secondo il seguente schema.

1. La parte **(a)** vale **5 punti**.

   1 punto per l'osservazione che la tesi è equivalente al mostrare l'uguaglianza $\widehat{FBD} = \widehat{FDB}$.

   1 punto per l'uguaglianza $\widehat{FBD} = \widehat{FAD}$.

   1 punto per l'uguaglianza $\widehat{FDB} = \widehat{FAB}$.

   1 punto per l'uguaglianza $\widehat{FBD} = \widehat{FDB}$.

2. La parte **(b)** vale **7 punti**.

1 punto per l'uguaglianza $\widehat{BAE} = \widehat{AED}$.

1 punto per l'uguaglianza $\widehat{DAE} = \widehat{AED}$.

1 punto per l'osservazione $\widehat{DHF} = 180° - \widehat{DAF}$.

1 punto per l'osservazione $\widehat{DEF} = 180° - \widehat{DEA}$.

2 punti per l'osservazione sulla simmetria dei triangoli DEF e DHF.

1 punto per chi conclude, assumendo l'uguaglianza precedente, la congruenza tra DEG e DHG.

3. La parte **(c)** vale **3 punti**.

1 punto per l'osservazione $\widehat{HDF} = \widehat{HCF}$ oppure $\widehat{FHC} = \widehat{FDC}$ (si assegni un solo punto anche se sono presenti entrambe le uguaglianze).

1 punto per l'uguaglianza $\widehat{FHC} = \widehat{HCF}$.