Problem-Solving ad alta voce

di Marco Cammi

Si sa che la gente dà buoni consigli
sentendosi come Gesù nel tempio,
si sa che la gente dà buoni consigli
se non può più dare cattivo esempio

Fabrizio de Andrè, "Bocca di Rosa"

[versione β.1]

Introduzione

Le Olimpiadi della Matematica in Italia sono molto cambiate negli ultimi tempi. Rispetto agli anni in cui ho partecipato in prima persona, all'inizio degli anni '90, sono fiorite molte nuove iniziative legate alla promozione delle gare di matematica, ad opera del lavoro di un manipolo di inguaribili appassionati in cui posso fieramente annoverarmi. Ricordo, ad esempio, la nascita degli stages di preparazione, i Giochi di Archimede, le gare a squadre, l'avvio di un sito internet dedicato molto attivo, il Giornalino della Matematica e il Gruppo Tutor, la stesura e pubblicazione di un certo numero di dispense che sono diventate un punto di riferimento essenziale per chi si accosti al mondo delle O.M.

Tuttavia, sfogliando la letteratura ufficiale e non ufficiale sul tema, mancava ancora qualcosa.

Studiando gli esercizi svolti degli anni passati, ci si trova di fronte a soluzioni semplici, lineari, concise, eleganti e leggendole, magari dopo che si è tentato inutilmente di aggredire un problema per ore, si resta talora con un palmo di naso. L'idea per risolvere un esercizio, però, non nasce quasi mai nella sua veste definitiva e asettica. Segue invece un percorso euristico più o meno contorto, che è probabilmente la tecnica più difficile da imparare in questo genere di competizioni.

Queste mie note, scritte per lo più per diletto, sono un esperimento (forse un po' ingenuo) per colmare questo vuoto. Cercano di essere un modo per trasmettere come nasce e si dipana un'idea di soluzione, con tutti i suoi errori, i vicoli ciechi, le buone intuizioni e le pessime idee. Per fare ciò ho preso i testi degli esercizi della passata edizione delle O.M. (Cesenatico 2004) e li ho svolti, senza avere letto le soluzioni, come se fossi in assetto di gara. L'obiettivo è stato quello di tenere traccia di tutto il percorso mentale che ha condotto alle soluzioni, nel modo più fedele possibile, talvolta trascrivendo i singoli pensieri. Perciò in queste note non leggerete dimostrazioni pulite ed eleganti (ci sono decine e decine di persone molto più brave di me in questo), ma piuttosto un "train of thoughts" un po' caotico. Una sorta di problem-solving "ad alta voce", per l'appunto.

Ne è uscita fuori una prosa a tratti incomprensibile (!), ma che penso faccia toccare con mano che cosa significhi produrre una soluzione. Naturalmente gli sproloqui così ottenuti *non* sono dimostrazioni conclusive. Ben poche giurie assegnerebbero punteggi lusinghieri a soluzioni così sgangherate! Ma la traccia riportata permette a chiunque possieda la tecnica dimostrativa di scrivere una soluzione corretta. I miei commenti personali per fare un po' di ordine a mente fredda sono riportati di seguito, con alcuni consigli per chi si cimenterà con le gare.

A questo punto non posso non ricordare tre persone: Massimo Gobbino, Federico Poloni e Giovanni Viglietta, che hanno accettato di farmi da cavie, rileggendo e commentando il manoscritto. Le loro ottime osservazioni mi hanno permesso di arricchire i commenti agli esercizi, ma soprattutto il loro caldo incoraggiamento mi ha aiutato a portare a termine questo lavoro. A loro va il mio sentito ringraziamento. Tutti gli errori, le inesattezze, le stupidaggini e gli strafalcioni (che sicuramente non mancheranno) sono invece da attribuire unicamente al sottoscritto.

Un'ultima annotazione. Queste note costituiscono una sorta di "versione 0". Le formule sono messe alla bell'e meglio e andrebbe rivista la forma finale. Siccome le scrivo nei ritagli di tempo, non ho ancora potuto sistemarle nella loro veste definitiva (e non è detto che riuscirò mai a farlo). Chiedo scusa in anticipo al lettore per la forma editoriale alquanto rozza e confido nella sua pazienza.

About the Author

Marco Cammi si è ammalato di Olimpiadi della Matematica a sedici anni, quando ha partecipato per puro caso alla Gara Nazionale, dove si è piazzato secondo, meravigliando un po' tutti, ma soprattutto se stesso. Da allora non è più guarito. Per tre anni ha fatto parte della squadra italiana alle Olimpiadi Internazionali di Matematica, dove ha rimediato una menzione d'onore, un buon numero di figuracce ed una medaglia d'oro. Dato che non ha mai vinto la gara di Cesenatico, è probabilmente la persona meno indicata per spiegare agli altri come si fa. Tuttavia la sua enciclopedica esperienza nel commettere errori può forse aiutare qualche incauto lettore a non imitarlo.

Problema 1

Osservando le temperature registrate a Cesenatico negli ultimi mesi di dicembre e gennaio, Stefano ha notato una strana coincidenza: in tutti i giorni di questo periodo (esclusi il primo e l'ultimo) la temperatura minima è stata la somma della temperatura minima del giorno precedente e del giorno successivo.

Sapendo che il 3 dicembre la temperatura minima è stata di 5 gradi, ed il 31 gennaio è stata di 2 gradi, determinare la temperatura minima del 25 dicembre.

Dunque, so che

$3\,\text{dic} = 5° \quad 31\,\text{gen} = 2° \quad 25\,\text{dic} = ?$

Ho il primo e l'ultimo giorno, che relazione lega i giorni lontani?

Provo con un buco: $x \quad ? \quad y$.

Al centro c'è la somma $x + y$.

Provo con due buchi: $x \quad ? \quad ? \quad y$.

Chiamo z il primo buco. So che il secondo vale $z + y$ e che $z = x + y + z$, cioè $y = -x$.

Quindi dopo tre giorni la T. cambia di segno, e dopo altri tre torno alla stessa T. E' periodica di periodo 6.

Tre buchi: $x \quad ? \quad ? \quad ? \quad y$.

Con la regola dei segni trovo $x \quad -y \quad ? \quad -x \quad y$.

e il buco centrale diventa $-x-y$. Tutto il periodo è: $x \quad -y \quad -x-y \quad -x \quad y \quad x+y$.

Ora devo contare i giorni.

$3\,\text{dic}$ è 1 (cioè sottraggo 2). $31\,\text{dic}$ è 29 . $1\,\text{gen}$ è 30 (cioè $\text{gen} = +29$), $31\,\text{gen}$ è $29 + 31 = 60$.

Vedo se torna. Dicembre e gennaio hanno 62 giorni in tutto. Tolgo 1 e $2\,\text{dic}$ e ok.

Chi è Natale? $\text{dic} = -2$; $25 - 2 = 23$. $23 \equiv 5 \quad (6)$.

1	2	3	4	5	6
x	$-y$	$-x-y$	$-x$	y	$x+y$
$3\,\text{dic}$				$25\,\text{dic}$	$31\,\text{gen}$

Natale è sul 5 . Cioè $T = y$, $x + y = 2°$, $x = 5°$, quindi $y = 3°$.

$5 \quad 3 \quad -8 \quad -5 \quad ?!? \quad 2 \ldots$

Non torna. Ma no!! se $x + y = 2°$ e $x = 5°$, allora $y = -3°$.

Allora: $5 \quad 3 \quad -2 \quad -5 \quad -3 \quad 2$.

5 e -2 fa 3 ; 3 e -5 , -2 ; -2 e -3 , -5 ; -5 e 2 , -3 ; -3 e 5 , 2 ; 2 e 3 , 5 .

Ora le somme tornano tutte. La risposta è -3 .

Commenti al problema 1

Di regola il primo problema della Gara Nazionale è un problema “di invito”. Serve un po' a rompere il ghiaccio ed è (quasi invariabilmente) nettamente più facile degli altri. Ad esempio questo richiedeva unicamente le basi dell'algebra e un minimo di intuizione per visualizzare la sequenza.

In un quesito del genere occorre prestare un'attenzione particolare agli errori stupidi di calcolo (come quel $2 - 5 = 3$!). In un problema così semplice la Commissione Giudicatrice sarà senz'altro meno clemente nei confronti di una svista banale, rispetto ad un esercizio più sofisticato. Meglio sarebbe non sbagliare i conti del tutto!

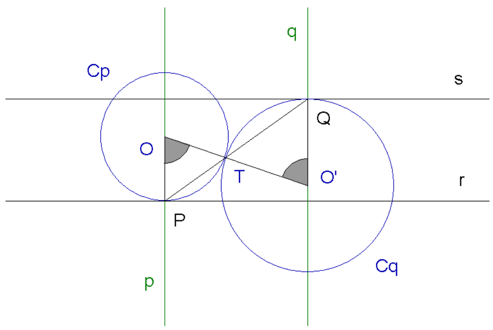
Altra osservazione: è vero che fare le dimostrazioni per i casi piccoli (un buco, due buchi...) può non servire per risolvere il caso finale con cinquantotto buchi, ma tante volte aiuta a visualizzare il nocciolo del problema (in questo caso il pattern modulo 6). Quindi provare i casi piccoli e non farsi spaventare dai parametri numerici grandi: quasi sempre sono fumo negli occhi!

Problema 2

Date nel piano due rette parallele r, s e due punti P, Q con $P \in r$ e $Q \in s$, si considerino coppie di circonferenze $\left(C_P, C_Q\right)$, la prima tangente a r in P e la seconda tangente a s in Q, che siano anche tangenti esternamente tra loro, in un punto che chiamiamo T. Determinare il luogo di tali punti T al variare di tutte le possibili coppie di circonferenze.

Mmmm. Odio geometria.

Allora la figura:



Boh, ad occhio PTQ sembrano allineati. I centri delle crf li chiamo O e O'. Stanno su due rette p e q. Mi interessa $O\hat{P}T$. Se è uguale a $T\hat{Q}O'$ sono a posto.

OPT è isoscele. $O'TQ$ è isoscele. Mi piacerebbe che fossero uguali, cioè, no, simili.

OTO' sono allineati (perpendicolari alla tangente). $\hat{O} = \hat{O}'$ (alterni interni). Ok.

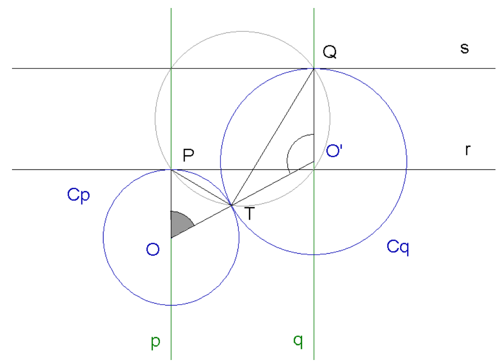
T sta su PQ. E' vero il viceversa?

Prendo T su PQ e le due crf per P e Q tangenti alle rette e passanti per T. Sono tangenti in T?

Come prima, $\hat{P} = \hat{Q}$ (alterni interni) $\Rightarrow$ $\hat{O} = \hat{O}'$ $\Rightarrow$ $OT \| O'T$, sono perpendicolari alle tangenti in T $\Rightarrow$ coincidono.

Altre possibilità?

C_Q sborda fuori, se toccasse sotto? Ah, sì, c'è anche questo caso.



Vediamo gli angoli. $\hat{O}$ e $\hat{O}'$? fanno $180°$ (alterni interni, no alterni, come si dice?, coniugati interni?). Sono angoli al centro. Chi sono gli angoli alla crf?

$\hat{P}$? insiste su $T\hat{O}p$, che è come $Q\hat{O}'T$. Quindi $\hat{O}' = 2\hat{P}$. $\hat{P} = \hat{T}$. $O\hat{P}T$ e $T\hat{Q}O'$ fanno $90°$ (dato che sono metà di angoli supplementari). POT e QOT isosceli. $\Rightarrow$ $P\hat{T}Q = 90°$ (tolgo da $180°$ due angoli complementari).

Cioè T vede PQ sotto un angolo retto. Quindi T è su 1/2crf con diametro PQ. Tutta? Dentro sì. No. Però devo stare nella striscia interna a pq. Altrimenti? Se mi avvicino a P, C_P si schiaccia e poi scappa dall'altra parte e la tangente è interna.

Viceversa. Giro il ragionamento e trovo $P\hat{O}T = T\hat{O}'Q$ supplementari, cioè T su OO'. Tangente comune. Ok. Per simmetria anche sopra.

Risposta: tutto il segmento PQ, gli archi della crf con diametro PQ dentro la striscia pq, P e Q esclusi.

Commenti al problema 2

Questo esercizio appartiene alla famiglia di "soli angoli" (dove cioè non serve considerare le lunghezze dei lati). Normalmente questi sono i problemi di geometria più facili; perlomeno, secondo il mio modesto giudizio (confesso di non avere mai amato molto gli esercizi di geometria e i miei risultati nelle gare non erano particolarmente brillanti).

La procedura di segnare angoli uguali, complementari, supplementari, è talmente comune e basilare che ha addirittura un soprannome in letteratura: si chiama “andar per angoli” (in inglese “angle-chasing”). Moltissime relazioni possono essere scoperte così. Il teorema di gran lunga più importante è quello che lega angoli al centro e alla circonferenza. Inoltre si usano le relazioni solite tra angoli (alterni, coniugati, rette parallele, perpendicolari, ecc...). Esistono moltissimi esempi e la cosa migliore è tentare tanti problemi.

Un'osservazione: quando si tratta di un luogo di punti, occorre prestare attenzione a non fare solo mezzo problema: si deve dimostrare che i punti che godono certe proprietà sono in un luogo (T è sul segmento), ma anche che i punti del supposto luogo godano le proprietà (i punti del segmento sono dei possibili T). Normalmente la parte che ci si dimentica è la seconda, ma è anche quella più semplice, una volta risolta la prima metà.

Di regola i teoremi di geometria sintetica, sono dei “se e solo se”. Ciò significa che è quasi sempre possibile ripercorrere a ritroso i ragionamenti e, partendo dalle proprietà caratterizzanti il luogo, dimostrare che sono verificate le ipotesi di costruzione.

In questo esercizio, per esempio, fisso T, conduco le circonferenze tangenti alle rette e passanti per T e mi preoccupo di dimostrare che, in ogni caso, la tangente è comune e quindi il punto T appartiene al luogo cercato.

Un truccaccio da tenere presente per congetturare correttamente il luogo: il *Teorema dell'Esistenza della Soluzione alla Mia Portata* rende quasi impossibile che la soluzione sia un luogo diverso da rette, cerchi o un misto (come in questo esercizio). Quindi di solito, osservando i casi estremi (raggio che tende a zero, infinito,...) o disegnando bene la figura, si riesce spesso a intuire le caratteristiche del luogo cercato. Se si sa dove si vuole andare, è più facile raggiungere la meta!

Attenzione a coprire tutti i casi. Ad esempio, in questo problema, una possibile trappola è il fatto che il luogo è distinto in due sottoinsiemi, dipendendo dalla configurazione delle circonferenze. Il rischio è di mancare qualche caso e dare solo una risposta parziale.

Problema 3

(a) Determinare se 2005^{2004} è somma di due quadrati perfetti positivi.

(b) Determinare se 2004^{2005} è somma di due quadrati perfetti positivi.

Fattorizzazione unica?

2005	5
401	primo?

2004	2
1002	2
501	3
167	167 primo

Che me ne faccio?

Somma di quadrati, terna pitagorica $3,4,5$.

$5k = 2005^{2004}$

$k = 401^{2004} \cdot 5^{\cdots}$

No! Devo partire dalla radice.

$\sqrt{2005^{2004}} = 2005^{1002}$

Non va bene perché k non è quadrato.

Mi serve terna pitagorica con 25? Non funziona.

Cambiamo.

2005 è somma di due quadrati?

401 sì: $20^2 + 1^2$

5 sì: $2^2 + 1^2$

C'era una cosa sul prodotto di somma di quadrati... Com'era?

$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$.

Aggiungo e tolgo. Cosa mi serve? $2abcd$.

$\cdots = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$.

Devo solo vedere se i pezzi sono positivi.

$ac+bd$ sempre; $ad = bc$? Posso sempre supporre $d=1$, $c=20$ oppure 2.

$a = bc$? Perché no?

Così però è troppo. Basta che l'*ultimo* quadrato non sia zero, quelli in mezzo non mi interessano. Allora parto da tutto, meno due fattori 5. Quello che resta è un quadrato. Lo chiamo A^2.

Primo fattore 5: $5A^2 = (2A)^2 + A^2$.

Secondo fattore 5: uso l'identità con $a=2A$, $b=A$, $c=2$, $d=1$. Viene $4A+A=5A$ e $2A-2A=0$; no. Male. Li scambio. $c=1$ e $d=2$. Allora $2A+2A=4A$ e $4A-A=3A$.

Cioè $2004^{2005} = 25A^2 = (3A)^2 + (4A)^2$. Genio!! Ho riscoperto la terna $3,4,5$!!

Risposta (a) ci si riesce.

(b) Boh, probabilmente non si può.

2004^{2005} pari. Vediamo modulo 4.

Quadrato pari.

$0 \equiv x^2 + y^2 \quad (4) \Rightarrow x \equiv y \equiv 0 \quad (4)$.

Semplifico tutti i fattori 4.

$2004 = 4 \cdot 501$

$2004^{2005} = 4^{2005} \cdot 501^{2005}$.

$501 = a^2 + b^2$? Mod. 4 potrebbe...

Mod. 3?

Calcolo i quadrati possibili a parte

$0^2 \equiv 0$

$1^2 \equiv 1$

$2^2 \equiv 1$

$0 \equiv a^2 + b^2 \Rightarrow a \equiv b \equiv 0 \quad (3)$.

Semplifico per 9 tante volte.

$3^{2005} = 9\left(a^2+b^2\right)$.

Arrivo a $3 = a^2 + b^2$. Non si può mod. 9.

La congruenza mod. 4 non serve. Risposta (b): non si può.

Commenti al problema 3

In questo problema la difficoltà aumenta e si vedono i primi tentativi a vuoto. Si tratta comunque di punti di un certo interesse, dato che si tratta di ricette standard che, in mancanza di meglio, può comunque valere la pena di tentare. Un solver smaliziato conosce diversi "attrezzi del mestiere" e la sua esperienza e il suo *feeling* con il quesito gli suggeriscono quali sia meglio tentare per primi.

Commento al punto (a): la soluzione trovata a caldo è molto contorta e poco soddisfacente. In effetti, per risolvere il punto, bastava scrivere l'ultima relazione che esibisce i due quadrati in carne ed ossa. E' interessante notare che una buona idea, di usare "una terna con 25", è stata accantonata troppo presto, mentre avrebbe condotto ben presto, se sviluppata, ad una soluzione pulita. Capita! Ecco un caso in cui il lavoro di brutta copia è enormemente sproporzionato rispetto alla bella copia. La soluzione da trascrivere, di fatto, è contenuta in una uguaglianza!

A margine aggiungo che la formula $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=\left(ac+bd\right)^2+\left(ad-bc\right)^2$, ricostruita durante lo svolgimento, è una ben nota identità, e fa parte del bagaglio degli strumenti medio-avanzati del buon solver. Essa in pratica dimostra che il prodotto di somme di quadrati è ancora somma di quadrati (chi conosce i numeri complessi, pensi al modulo del prodotto!).

Punto (b). Innanzi tutto un chiarimento: all'inizio ho supposto (correttamente) che non si potesse. Perché? Beh, per nessun buon motivo in particolare. In questi problemi a risposta aperta (si può o non si può?) non è sempre facile capire quale delle due tesi sia quella buona. C'è pur sempre il rischio di arrivare verso la fine e scoprire di avere scommesso sul cavallo sbagliato e averci perso tempo.

In questo caso, dato che l'Estensore si è preso la briga di porre due quesiti apparentemente identici, si poteva ragionevolmente supporre che un caso fosse possibile e l'altro no, oppure che i due casi fossero entrambi possibili/impossibili, ma l'idea furba da trovare fosse nettamente diversa nei due casi.

In questi frangenti ci si deve affidare alla propria esperienza. E si deve essere pronti anche a tornare sui propri passi, all'occorrenza.

La tecnica usata nel caso (b) va studiata, perché è un superclassico. Per vederla all'opera, qualunque testo con la prova di irrazionalità di $\sqrt{2}$ (Pitagora docet!) è ok. Di tanto in tanto, come qui, salta fuori e torna comoda.

Seconda tecnica assolutamente da non sottovalutare è la conoscenza dell'aritmetica modulare (un microscopico assaggio di essa è presente anche nella traccia del pb.1). Si tratta di una tecnica semplice, ma potentissima, e poco conosciuta nella scuola secondaria fuori dalla cerchia delle O.M. Un autentico *must* per ogni solver!

Quando poi di mezzo ci sono i quadrati e le loro somme, deve scattare una molla automatica. Con i quadrati, i moduli che danno le maggiori soddisfazioni sono 4, 3, 8, 9 (consiglio di provarli +/- in questo ordine). In questo caso con 4 è andata male, ma modulo 3 (e una capatina mod. 9) ha chiuso il punto.

Problema 4

Antonio e Bernardo giocano al seguente gioco: sono date due pile di gettoni, una con m gettoni e l'altra con n gettoni. Ogni giocatore sceglie a turno una delle seguenti mosse:

- prendere un gettone da una delle pile;
- prendere un gettone da ciascuna delle pile;
- spostare un gettone da una pila ad un'altra.

Perde chi non può più muovere. Comincia Antonio. Determinare, in funzione di m ed n, se uno dei due giocatori ha una strategia vincente, e in caso affermativo specificare di quale giocatore si tratta.

Mosse:

m	n
-1	0
0	-1
-1	-1
± 1	∓ 1

Perde chi non muove, parte A.

Quando si perde? Se c'è almeno un gettone, no. Perdo con $(0,0)$.

Vinco se lascio $(0,0)$. Vinco con $(1,0)$ $(1,1)$.

$(2,0)$, perdo, dato che $\to (1,0)$ o $(1,1)$

$(2,2)$ anche. Ah, no c'è $(2,1)$. Vedo dopo.

$(2,1) \to (2,0)$ e vince

$(2,2)$ $\to (2,1)$ e perde

$\to (1,1)$ e perde

$\to (3,1) \to (2,0)$ e perde. $(2,2)$ perde.

Sembra questione di parità. (P,P) perde chi parte, sennò vince. Vediamo:

Se $(D,D) \xrightarrow{(-1,-1)} (P,P)$ e vince

$(D,P) \xrightarrow{(-1,0)} (P,P)$ e vince.

Invece $(P,P) \xrightarrow{(-1,0)} (D,P)$

$(P,P) \xrightarrow{(+1,-1)} (D,D)$

$(P,P) \xrightarrow{(-1,-1)} (D,D)$ e perde.

Ok. Si fa per induzione sui gettoni totali.

$m+n=0$ ok.

E chi vince toglie gettoni, uso induzione, ok.

Risposta: vince A se m e n non entrambi pari, altrimenti vince B.

Commenti al problema 4

Problema tutto sommato straight-forward. Anche qui il consiglio del pb. 1, di fare i casi piccoli, ha sortito buoni effetti. Ben presto il pattern regolare si è rivelato e da lì è stato facile concludere.

Qui l'idea standard è tipica degli esercizi sulle strategie ottimali dei giochi: studiare i casi più semplici, vicini all'esito della partita e risalire la strategia all'indietro.

Devo obbligatoriamente soffermarmi un momento sul principio di induzione. Questa è un'altra tecnica basilare, che si utilizza per dimostrare certe proprietà sui naturali, dimostrando tutti i casi in ordine. E' la formalizzazione del concetto di "...e così via..." e funziona mostrando che l'insieme di naturali che non gode della proprietà è vuoto, dato che non può avere minimo.

Non mi addentro più di così perché si trova una mole enorme di materiale un po' dappertutto nella letteratura consueta. La tecnica è indispensabile e va compresa a fondo, in tutte le sue varianti: induzione semplice, induzione forte, ecc...

Problema 5

Determinare se il seguente enunciato è vero o falso:

"Per ogni successione $x_1, x_2, x_3, \dots$ di numeri reali maggiori o uguali a zero esistono due successioni $a_1, a_2, a_3, \dots$ e $b_1, b_2, b_3, \dots$ di numeri reali maggiori o uguali a zero tali che

- $x_n = a_n + b_n$ per ogni n;
- $a_1 + \cdots + a_n \leq n$ per infiniti valori di n;
- $b_1 + \cdots + b_n \leq n$ per infiniti valori di n, eventualmente diversi dai precedenti."

$x_1, x_2, x_3, \dots \geq 0 \quad a_n, b_n \geq 0$ in $\mathbf{R}$

$x_n = a_n + b_n \quad \forall n$

$a_1 + \cdots + a_n \leq n$ per infiniti n

$b_1 + \cdots + b_n \leq n$ per infiniti (altri?) n

Una "spartizione" di x_n.

Se prendo $x_n = 4$, $a_n = 2$? Ma no! Non basta: deve esistere *una* spartizione a_i e b_i. Ok.

Alterno uno grande e uno piccolo. Però devo andare a blocchi. Prima a piccoli, tipo $(1/2)^n$, poi b piccoli, per recuperare. Beh, basta anche meno: fisso $\delta < 1$, allora

$a_1 = \delta$ e $b_1 = x_1 - a_1$.

b_1 è grande. Sommo tanti δ finché recupero.

$k\delta + b_1 < k + 1$ e a lungo andare ce la faccio. Infatti:

$k(1-\delta) > b_1 - 1$

$k > \dfrac{b_1 - 1}{1 - \delta}$.

Nel frattempo $\sum a_i$ è diventato grande. Metto tanti δ, finché recupero ecc…

Se però $x_i < \delta$? Beh, tanto meglio. Prendo $x_i/2$ per entrambi a_i e b_i.

Risposta: è possibile e l'enunciato è vero.

Commenti al problema 5

Questo è forse il problema meno "olimpico" e più "universitario" della gara. Con questo intendo dire che il medesimo esercizio avrebbe potuto tranquillamente figurare in un corso di esercitazioni di Analisi I.

Anche il mio percorso di soluzione tradisce questo fatto (il tentativo con la serie geometrica decrescente, l'uso stesso di δ nella notazione…). Chi non è pratico di dimostrazioni "epsilon e delta" (come penso sia la quasi totalità degli aspiranti olimpionici), sostituisca mentalmente "zero" tutte le volte che ho scritto "δ" e ci si raccapezzerà meglio.

Ad ogni modo, l'idea che sta dietro la soluzione, è quella di tenere ferme (o comunque controllate) alternativamente le due serie. Una alla volta, si possono tenere a bada come mostrato, e questo basta per concludere.

Anche in questo esercizio, possiamo sottolineare qualche passaggio utile. Innanzi tutto voglio rimarcare la fase iniziale di studio del problema, in cui si "prendono le misure" al testo, si costruisce qualche esempio, si sceglie su quale cavallo scommettere (enunciato vero? enunciato falso?).

Una volta che questa fase è conclusa (l'enunciato pare vero, come formo le successioni a e b?) si parte a sperimentare le idee per la costruzione.

Con un esercizio come questo, il cui testo è decisamente formale e "matematichese", è molto importante avere una chiara percezione di che cosa è richiesto. Saper usare i quantificatori ($\forall$, $\exists$) e un po' di logica sicuramente aiutano.

E' interessante notare che, con altri esercizi più intuitivi, lo sforzo vada normalmente da un momento di intuizione verso una fase di matematizzazione del problema (scegliere una notazione efficace, trovare le relazioni importanti, ecc…).

Qui, invece, avviene l'opposto. Questo è un esempio in cui il formalismo può impedire la visualizzazione di quello che sta succedendo dietro le quinte (l'idea di spartizione degli x_i, ad esempio).

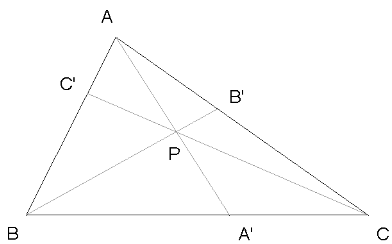
Problema 6

Sia P un punto interno ad un triangolo ABC. Le rette AP, BP e CP intersecano i lati di ABC in A', B' e C' rispettivamente.

Ponendo $x = AP/PA'$, $y = BP/PB'$, $z = CP/PC'$, dimostrare che $xyz = x + y + z + 2$.

Mmm, ancora geometria…

La figura.



Boh, che succede se è equilatero? Il centro divide le altezze in parti una doppia dell'altra, quindi $x = y = z = 2$. E $8 = 2 + 2 + 2 + 2$. Torna.

Se vado vicino ad un lato? $P \to M$, $B' \to C$, $C' \to B$, $x \to \infty$, $y \to 1$, $z \to 1$. Non ci ricavo nulla.

Il caso equilatero funziona anche se il triangolo è qualunque e P è solo il baricentro. Proviamo con le aree.

$A_{BPC} : A_{ABC} = A'P : AA'$ (con Talete).

$$\frac{A'P}{AA'} = \frac{AP}{AP + PA'}.$$

L'inverso $= 1 + \dfrac{PA'}{AP} = 1 + 1/x$.

Forse ci siamo. Devo fare i conti. Però BPC, APB e CPA montano tutto il triangolo. Sommo le tre relazioni.

$$\frac{A_{BPC}}{A_{ABC}} + \frac{A_{APB}}{A_{ABC}} + \frac{A_{CPA}}{A_{ABC}} = \frac{1}{1 + 1/x} + \frac{1}{1 + 1/y} + \frac{1}{1 + 1/z}.$$

E il primo membro fa 1.

Cioè:

$$(x+1)(y+1)(z+1) = \\ = x(y+1)(z+1) + y(z+1)(x+1) + z(x+1)(y+1)$$

$$xyz + \langle xy \rangle + \langle x \rangle + 1 = 3xyz + 2\langle xy \rangle + \langle x \rangle.$$

A sinistra devo avere 8 addendi, ne ho $1 + 3 + 3 + 1$, ok. A destra ne devo avere 12, ne ho $3 + 6 + 3$, ok.

$2xyz + \cdots$?! Perché non torna? Vedo il caso equilatero: $x = y = z = 2$; $2/3 + 2/3 + 2/3 = 1$. No.

Ecco l'errore: $\dfrac{A'P}{AA'}$ non fa $\dfrac{AP}{AP + PA'}$, ma $\dfrac{A'P}{AP + PA'}$. L'inverso fa $AP/A'P + 1 = 1 + x$.

Ora viene meglio.

$$1 = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z}$$

$$(1+x)(1+y)(1+z) = \\ = (1+y)(1+z) + (1+z)(1+x) + (1+x)(1+y)$$

$$xyz + \langle xy \rangle + \langle x \rangle + 1 = \langle xy \rangle + 2\langle x \rangle + 3.$$

8 pezzi a sinistra, $3 + 6 + 3 = 12$ a destra, ci sono tutti.

$xyz = \langle x \rangle + 2$, cioè

$xyz = x + y + z + 2$. Ok.

Commenti al problema 6

Quesito di geometria che non rientra nella categoria dei "soli angoli" che si è già vista per il pb. 2.

L'abilità dell'autore (o forse, più propriamente, la sua buona sorte) gli ha permesso di imboccare la strada corretta quasi subito (modulo uno stupido errore di calcolo).

Anche in questo caso possiamo evidenziare un trucco utile: vedere che cosa succede nei casi semplici (equilatero, isoscele, su un lato, su un vertice, triangolo degenere, ecc…) per vedere se si indovinano relazioni facili. Anche tentare con i vari centri di un triangolo scaleno, talvolta può essere utile. Qui, ad esempio, l'osservazione sul baricentro ha portato all'idea di considerare le aree dei sottotriangoli (il baricentro è collegato alle proprietà delle aree).

Dovendo assegnare un ordine di preferenza tra i quattro centri, direi che i più utili sono di gran lunga baricentro e circocentro; molte meno volte l'idea furba usa l'incentro. Quasi mai l'ortocentro.

Durante lo svolgimento ho usato una notazione stenografica non-standard (e per questo da *non* utilizzare nella bella copia) per rappresentare tutti i monomi simmetrici. Ad esempio, scrivendo $\langle xy \rangle$ intendevo $xy + yz + zx$.

Si tratta di un trucco per accelerare i calcoli, ma bisogna conoscerlo con un po' di dimestichezza. Altrimenti, è meglio fare i conti alla vecchia maniera e osservare le simmetrie dell'espressione algebrica solo *dopo* aver espanso i prodotti.

Per concludere, ritenendola istruttiva, propongo anche la seguente

Soluzione alternativa

Prima di tutto noto che il problema è invariante per affinità. Questo significa che posso supporre il triangolo isoscele e rettangolo in C. Fissando un sistema di coordinate con origine in C e assi sui cateti, il punto P avrà coordinate (a,b) con $a+b<1$ e $0<a,b$.

Un facile conto mostra che Il punto C' ha coordinate $\left(\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b}\right)$. Inoltre il teorema di Talete dimostra che possiamo calcolare i rapporti x, y, z non tanto sulle effettive distanze che le definiscono, ma solo lungo le ascisse/ordinate. Ossia che $x = \frac{AP}{PA'} = \frac{x_A - x_P}{x_P - x_{A'}} = \frac{1-a}{a}$.

Analogamente $y = \frac{1-b}{b}$ e $z = \frac{a+b}{1-a-b}$.

Per semplificare i calcoli, possiamo porre $c := 1-a-b$. In tale modo $z = \frac{1-c}{c}$ e l'espressione della tesi diviene simmetrica.

Svolgendo i calcoli, e osservando che $a+b+c=1$, si ottiene la tesi.

Commenti alla s.a.

La particolarità della soluzione è l'uso della geometria analitica. E' piuttosto raro riuscire a confezionare una soluzione analitica ad un problema olimpico di geometria senza annegare in un mare di calcoli. Qui siamo fortunati perché una serie di accorgimenti ha permesso di semplificare il problema fino a renderlo trattabile.

Innanzi tutto, l'utilizzo delle affinità ha permesso di poter sistemare il triangolo nella forma più semplice per fare i calcoli. Infatti, con le affinità è possibile trasformare un qualunque triangolo in qualunque altro.[1]

In secondo luogo, l'uso furbo del teorema di Talete (o equivalentemente della trigonometria o ancora delle similitudini tra triangoli) ha eliminato la necessità di calcolare le distanze con le radici quadrate, nonostante ci fossero ben sei segmenti obliqui da valutare!

In terzo luogo, il trucco algebrico di rendere simmetrica l'espressione usando una variabile non indipendente.

Chi conosce le affinità, non avrà fatto fatica nel riconoscere nella terna di variabili (a,b,c) le coordinate affini naturali rispetto ai punti A, B e C. Seguendo lo stesso filone di idee, avremmo potuto stilare tutta la soluzione senza fissare assi coordinati cartesiani, ma utilizzando solo l'algebra vettoriale delle affinità.

La soluzione avrebbe suonato più o meno così: "Esiste un'unica terna (a,b,c) di variabili positive e a somma 1 t.c. $P = aA + bB + cC$. Del resto la collinearità dei punti implica che $P = \lambda A + \mu A'$ e $A' = \beta B + \gamma C$ per opportuni coefficienti λ, μ, β, γ.

Da qui, $x = \mu/\lambda$ risulta essere $\frac{1-a}{a}$ ecc…" Il resto segue.

[1] Le trasformazioni geometriche, e in particolare le affinità, appartengono a pieno diritto al bestiario delle cose da conoscere. A questo proposito, trovo illuminante un commento di F. Poloni: "*Il problem-solver allenato vede il testo e capisce subito che può usare con profitto le affinità (basta considerare tutte le quantità che compaiono e notare che sono invarianti per affinità...).* […] *Per fare una dimostrazione di una cosa invariante per affinità tipicamente si useranno solo cose invarianti per affinità (rapporti tra aree e segmenti paralleli, Ceva, Menelao* [Talete, importantissimo, aggiungo io]*) e non altre (tracciare un cerchio? giammai!)*".

Considerazioni finali

Leggendo questo fuoco di fila di idee e tracce risolutive, il lettore che è giunto fin qui potrà forse pensare che fuori competizione è molto semplice scrivere una soluzione e che in pochissimo tempo si possa essere in grado di completare tutto il lavoro di una gara. Ovviamente non è così: la sequenza di idee non arriva di getto e spesso si è costretti a "litigare" parecchio con i quesiti, prima di averne ragione, sperimentando tecniche e idee diverse.

Inoltre, non dimentichiamo che fino ad adesso ci siamo occupati unicamente della brutta copia. Per poter presentare un buon compito, tuttavia, si devono stilare anche delle valide dimostrazioni, e questo richiede altro tempo.

Stilando queste note, mi sono proprio divertito a rituffarmi nelle gare di matematica. Mi auguro che la stessa cosa valga anche per chi ha avuto la tenacia di leggerle. Spero che questo mio esperimento non risulti utile solo per coloro che sono già esperti, ma innanzi tutto anche per chi si cimenterà con le future prove delle O.M.

Qualsiasi *feedback* è graditissimo. Se vi è piaciuta la lettura, per cortesia, fatemelo sapere. Posso essere contattato sul sito del Progetto Olimpiadi della Matematica (url: http://olimpiadi.ing.unipi.it – nickname: marco).

In bocca al lupo a tutti per le gare!