

La Logica della Scoperta

Marco Rigoli

Olimpiadi della Matematica, Cesenatico, 8 Maggio 2010

Come affermava H. Reichenbach, conoscere significa soprattutto generalizzare. Consideriamo ad esempio l'accensione del fuoco ottenuta per sfregamento di due pezzi di legno: la conoscenza di questo fatto è derivata, per generalizzazione, da una serie di esperienze individuali (nelle quali sfregando il legno in un certo modo si era sempre ottenuto il fuoco). In questo processo cognitivo si pongono in luce due tipi di fattori, il primo dei quali è necessario a garantire la realizzabilità dell'evento: i fattori rilevanti, come ad esempio la secchezza del legno, ed i fattori irrilevanti, quindi, per intenderci, il colore o il peso del legno impiegato. Con la separazione dei fattori rilevanti da quelli irrilevanti ha inizio il sapere. Brevemente, si potrebbe dire con Reichenbach che la scienza e la conoscenza traggano origine dallo stabilire delle generalizzazioni.

Supponiamo ora di avere a nostra disposizione una scatola di costruzioni “Lego”: dunque tanti pezzi, mattoncini di diverse lunghezze, di diverso colore, tegole di varia natura, e così via. Vogliamo costruire un modello di una stazione di servizio che sia, ad esempio, interamente di colore blu. Motivati dal nostro scopo ci viene spontaneo separare i pezzi di Lego blu da quelli di colore diverso: nel compiere questa operazione stiamo identificando pezzi di uguale colore. Solo in seguito, una volta identificato l'insieme dei Lego blu, distiguerò tra essi ad esempio in base alla forma o alla lunghezza di due mattoncini. Un attimo di riflessione ci porta a concludere che nel compiere l'operazione di separazione abbiamo cambiato il nostro concetto di uguaglianza-identità. Eccoci in una tipica situazione di natura matematica.

Supponiamo ora di avere a disposizione un cestello portabottiglie da sei bottiglie, e di dover trasportare delle bottiglie da una stanza ad un'altra. Supponiamo poi che le bottiglie siano disposte a gruppi tra loro relativamente distanti. È molto probabile, soprattutto per chi parla data la relativa pigrizia, che ci si indirizzi verso quei gruppi di sei bottiglie già miracolosamente “pronti” per il nostro trasporto. Poco importerà se siano bottiglie di vino rosso o bianco, ciò che ci interessa è il loro numero. Ma contare significa *enumerare*, cioè porre in corrispondenza biunivoca. Sto ritenendo “uguali” gruppi di bottiglie in corrispondenza biunivoca non solo quelli di sei bottiglie, che privilegio di primo acchito, ma anche gruppi di due bottiglie tra loro altrettanto scomodi in quanto mi obbligheranno ad aggiungerne altre quattro per ottimizzare il trasporto. E così via.

Astraendo da questa e da situazioni analoghe possiamo considerare una collezione d'insiemi e dichiarare che due membri di tale collezione sono “uguali” se tra loro esiste una corrispondenza biunivoca. La situazione ci pare diversa da quella dei mattoncini Lego dello stesso colore. Possiamo però formalizzare i due rispettivi concetti di uguaglianza nel modo seguente. La “caratteristica” essere dello stesso colore gode delle seguenti tre proprietà formali: indicando con $\sim$ l'essere dello stesso colore abbiamo

- 1. Riflessività: $a \sim a \quad \forall a$;
- 2. Simmetria: se $a \sim b$ allora $b \sim a$;
- 3. Transitività: se $a \sim b$ e $b \sim c$ allora $a \sim c$.

Abbiamo dunque individuato quella che si chiama *relazione di equivalenza sull'insieme X* (dei mattoncini Lego).

Nel secondo caso osserviamo che se

$$f : A \rightarrow B$$

è una bijezione, A e B insiemi di una certa collezione $\mathcal{T}$, allora anche

$$f^{-1} : B \rightarrow A$$

lo è. Inoltre lo è $id_A : A \rightarrow A$, e date $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ la loro composizione $g \circ f : A \rightarrow C$ è anch'essa una bijezione. Posto allora $\forall A, B \in \mathcal{T}$

$$A \sim B \quad \text{se e solo se } \exists f : A \rightarrow B, \text{ bijezione,}$$

le precedenti proprietà ci permettono di affermare che $\sim$ è una relazione d'equivalenza su $\mathcal{T}$. Usando un termine “antico” proveniente dagli studi di Cantor diremo che A e B sono equipotenti se e solo se $A \sim B$ nel senso precedente.

Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei naturali e sia

$$\tilde{\mathbb{N}} = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\};$$

l'applicazione $f : \mathbb{N} \rightarrow \tilde{\mathbb{N}}$, $f(n) = n^2$ è una bijezione, dunque $\mathbb{N}$ ed $\tilde{\mathbb{N}}$ sono da considerarsi “uguali” nel senso dell’equipotenza. Ma $\mathbb{N}$ ed $\tilde{\mathbb{N}}$ non sono “uguali” nel senso dell’uguaglianza identità perché $\tilde{\mathbb{N}}$ è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{N}$. La nostra nuova nozione di uguaglianza risolve un’osservazione “paradossale” di Galileo: il tutto non può essere uguale ad una sua parte propria. Questo punto di vista, più preciso del precedente, ci permette un raffinamento ulteriore. Supponiamo infatti di avere a che fare con insiemi dotati di una qualche ulteriore struttura. Ad esempio sia $(G, *)$ un gruppo; dunque un insieme G sul quale è definita una legge di composizione interna $*$ che gode delle proprietà:

- 1. associativa: $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$;
- 2. $\exists$ elemento neutro $1 = 1_G : \forall a \in G, 1 * a = a * 1 = a$;
- 3. $\exists$ elemento inverso: $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G : a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1_G$.

Date due strutture di questo tipo $(G, *)$ e $(H, \odot)$, quando “possiamo” ritenerle “uguali”? La risposta è ritenerle uguali quando posso dire che “tutto ciò che accade nell’una accade anche nell’altra”. Un momento di riflessione ci porta alla seguente nozione: diremo *isomorfismo* $f : (G, *) \rightarrow (H, \odot)$ una bijezione per la quale

$$1. \forall a, b \in G, \quad f(a * b) = f(a) \odot f(b)$$

e, considerato $f^{-1} : (H, \odot) \rightarrow (G, *)$ si abbia anche per esso che

$$2. f^{-1}(h \odot k) = f^{-1}(h) * f^{-1}(k) \quad \forall h, k \in H.$$

Notiamo che la condizione 1. è sufficiente, in questo caso, a garantire la validità della 2. che quindi non andremo direttamente a richiedere nella definizione di isomorfismo.

La composizione di due “morfismi” di questo tipo e la mappa identità sono anch’esse di questo tipo, per cui possiamo definire, in analogia con quanto abbiamo precedentemente fatto, una relazione d’equivalenza nella collezione $\mathcal{T}$ di gruppi che stiamo considerando: $\forall A, B \in \mathcal{T}$,

$A \sim B$ se e solo se A e B sono gruppi isomorfi.

Si noti come la nostra definizione di “uguaglianza” dipenda direttamente dai nostri interessi. Se A e B fossero dotati ad esempio anche di una struttura topologica (non necessariamente compatibile con quella gruppendale) poco o nulla ci interesserebbe sapere che A e B sono uguali dal punto di vista algebrico se siamo interessati all’aspetto topologico! Che un’estensione del concetto di “uguaglianza” in questa direzione da noi delineata sia assolutamente necessaria per la Matematica è dovuto alla Matematica stessa.

Supponiamo ad esempio di voler precisare il concetto di numero e per fissare le idee assumiamo di aver definito in un qualche modo per noi soddisfacente il concetto di numero razionale. Intendiamo con questo il poter pronunciare un'affermazione del tipo “un numero razionale è...” . Sottolineiamo che la situazione nella quale ci siamo posti è solo ipotetica. Abbiamo dunque un (unico per quel che ci riguarda) modello di numeri razionali che indicheremo con $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ tanto per porre in evidenza la struttura algebrica; è chiaro però che $\mathbb{Q}$ è un campo ordinato, in effetti totalmente ordinato, intendendo con ciò che non solo ci è data una relazione d'ordine $\leq$ (compatibile con le operazioni) ma anche la proprietà che due qualsiasi elementi di $\mathbb{Q}$ sono tra loro confrontabili in $\leq$. Vogliamo, per qualche motivo, ad esempio per l'incommensurabilità della misura della diagonale del quadrato con quella del lato, o per la non generale esistenza dell'estremo superiore, trovare un nuovo campo che contenga $\mathbb{Q}$ e dove questi problemi siano “risolvibili” (perlomeno in parte). Furono Cantor e Dedekind a fornirci, con un rigore moderno, quel campo ordinato “contenente” $\mathbb{Q}$ e che indichiamo oggi come campo dei numeri reali $\mathbb{R}$.

Vediamo di essere precisi, perché qui si impone in modo inevitabile l'ampliamento del nostro concetto di uguaglianza. Poiché la costruzione di Dedekind è, tutto sommato, più nota di quella di Cantor, soffermiamoci su quest'ultima. Sia allora $\mathcal{T}$ l'insieme delle successioni di Cauchy dei razionali; il tipico elemento di $\mathcal{T}$ è dunque la successione

$$x_n : x_n \in \mathbb{Q} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

dove $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri naturali, soddisfacente la condizione

$$\forall \varepsilon > 0 (\varepsilon \in \mathbb{Q}), \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N, |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Qui il modulo è preso in $\mathbb{Q}$ e definito nel modo usuale, cioè

$$\forall a \in \mathbb{Q}, \quad |a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Introduciamo ora una somma $\oplus$ ed un prodotto $\odot$ in $\mathcal{T}$ ponendo

$$x_n \oplus y_n = x_n + y_n, \quad x_n \odot y_n = x_n y_n,$$

dove la somma e i prodotti a secondo membro sono in $\mathbb{Q}$. Per poter affermare che $\oplus$ e $\odot$ sono operazioni interne in $\mathcal{T}$ dobbiamo verificare che

$$x_n + y_n \quad \text{e} \quad x_n y_n$$

siano entrambe successioni di Cauchy. Per la prima la verifica è immediata per la disuguaglianza triangolare soddisfatta da $| \cdot |$; per la seconda usiamo la stessa proprietà ed il fatto che se $x_n \subseteq \mathbb{Q}$ è una successione di Cauchy, allora è limitata. A questo punto si verifica subito che $(\mathcal{T}, \oplus, \odot)$ è un anello commutativo con unità $1 = 1$, la successione costantemente uguale ad 1; ma questo anello non risolve il nostro problema. Non è infatti un campo: l'elemento x_n , con

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{se } 2 \nmid n \\ 0, & \text{se } 2 \mid n \end{cases} \quad (1)$$

è non nullo ma non ammette inverso.

Ma qual è la considerazione che ha portato Cantor alle successioni di Cauchy? Il problema è che esistono successioni razionali di Cauchy che non convergono ad alcun razionale (ad esempio, $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$) Ma la proprietà di convergenza di una successione non è alterata per troncamenti, né per la sostituzione di un numero finito di termini, e se due successioni convergono allo stesso limite (e dunque, in particolare, sono di Cauchy) succede che i due elementi di posto n -esimo si avvicinano tra loro (in $\mathbb{Q}$) sempre di più al crescere di n . Ciò suggerisce di ritenere due successioni indistinguibili se godono di questa proprietà. Ancora una volta introduciamo una nozione di “uguaglianza” dettata dai nostri fini e poniamo

$$x_n \sim y_n \text{ se e solo se } x_n - y_n \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty,$$

dove la congruenza è nel campo dei numeri razionali. Si verifica che $\sim$ è una relazione di equivalenza; in particolare,

$$x_n \sim 1 \text{ se e solo se } x_n \rightarrow 1 \text{ in } \mathbb{Q}$$

e

$$x_n \sim 0 \text{ se e solo se } x_n \rightarrow 0 \text{ in } \mathbb{Q}.$$

Notiamo che alterare una successione di un numero finito di termini non ne cambia la classe di equivalenza. Poniamo

$$[x_n] = [x_n] \in \mathcal{T} / \sim$$

per indicare la classe d'equivalenza contenente x_n . Si noti che se x_n è dato come in (1) allora

$$[x_n] = [0]. \quad (2)$$

Se a $\mathcal{T} / \sim$ possiamo far “ereditare” le operazioni di $\mathcal{T}$ la (2) è una “buona notizia”. $\forall [x_n], [y_n] \in \mathcal{T} / \sim$ poniamo

$$[x_n] + [y_n] = [x_n \oplus y_n] \quad \text{e} \quad [x_n][y_n] = [x_n \odot y_n]$$

ed osserviamo che queste definizioni sono ben poste, cioè indipendenti dai rappresentanti scelti per le classi. Dunque $\mathcal{T} / \sim$ “eredita” le operazioni di $\mathcal{T}$ e diviene esso stesso un anello commutativo con unità $[1]$.

Tuttavia, se $[x_n] \neq [0]$, allora $\exists A > 0$ sufficientemente piccolo ed N sufficientemente grande tali che

$$\forall n \geq N \quad \text{o } x_n \leq -A \quad \text{o } x_n \geq A.$$

Ora, posto $x_n^N = x_{N+m}$, $[x_n^N] = [x_n]$ e definito

$$y_n = \frac{1}{x_n^N}$$

si verifica immediatamente che y_n è di Cauchy e

$$[y_n][x_n^N] = [1] = [x_n^N][y_n],$$

cioè ogni elemento non nullo di $\mathcal{T}/\sim$ ammette inverso ed abbiamo ottenuto un campo che chiameremo $\mathbb{R}_1$.

Ma se $\mathbb{R}_1$ è il nostro candidato per il campo dei numeri reali, in quale modo possiamo pensare che esso contenga $\mathbb{Q}$, i razionali dai quali siamo partiti? Gli elementi di $\mathbb{R}_1$ sono “fisicamente” diversi da quelli di $\mathbb{Q}$. Se un sottoinsieme di $\mathbb{R}_1$ verrà identificato con $\mathbb{Q}$, questa identificazione non potrà essere realizzata da un concetto del tipo uguaglianza-identità. Definiamo un'applicazione $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}_1$ ponendo

$$\varphi : r \rightarrow [r],$$

la classe di equivalenza individuata dalla successione di Cauchy $x_n = r \forall n \in \mathbb{N}$. φ è banalmente iniettiva ed è un omomorfismo d'anelli con unità. Poiché $\mathbb{Q}$ è un campo, $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrow \varphi(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}_1$ è un isomorfismo di campi. Il ritenere $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}_1$ tra loro “uguali” (per ora dal solo punto di vista algebrico) non è più per noi un problema. Se vogliamo, $\mathbb{Q}_1$ costituisce un nuovo “modello” dei razionali.

A questo punto possiamo introdurre in $\mathbb{R}_1$ una nozione di valore assoluto $||$ e la corrispondente relazione d'ordine. $\forall [x_n] \in \mathbb{R}_1$ poniamo

$$|[x_n]| = [x_n],$$

dove il valore assoluto a secondo membro è quello in $\mathbb{Q}$. Si verifica subito che la definizione è ben posta, cioè indipendente dal rappresentante scelto per la classe. La corrispondente relazione d'ordine è allora definita da:

$$[x_n] \leq [y_n] \quad \text{se e solo se} \quad [y_n - x_n] = |[y_n - x_n]|.$$

Non è difficile vedere che $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}_1$ preserva l'ordine. Ma la definizione di $\mathbb{R}_1$ risponde alla domanda di Cantor "in $\mathbb{R}_1$ le successioni di Cauchy convergono?". La risposta è positiva ed è dovuta al fatto che $\mathbb{R}_1$ soddisfa l'assioma di continuità AC. Avremmo però potuto considerare la costruzione di Dedekind, dove $\mathbb{R}_2$, il nostro nuovo modello, ha per elementi le classi di equivalenza di coppie di classi contigue (A, B) di razionali e dove l'equivalenza $\approx$ è definita da

$$(A, B) \approx (A', B') \quad \text{se e solo se}$$

$$\forall a \in A, \forall b' \in B', a \leq b' \text{ e } \forall a' \in A', \forall b \in B, a' \leq b.$$

Indicati con $\alpha = [(A', A'')]$ e $\beta = [(B', B'')]$ due elementi di $\mathbb{R}_2$, si introducono le operazioni di somma e prodotto in modo leggermente più elaborato del precedente, e per far ciò si introducono immediatamente la relazione d'ordine ed il conseguente corrispondente valore assoluto:

$$\alpha \leq \beta \quad \text{se e solo se } \exists a'' \in A'' \text{ e } b' \in B' \text{ tali che } a'' \leq b' \text{ (in } \mathbb{Q}).$$

$$0 = [(0, 0)] \text{ e}$$

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{se } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Esiste un isomorfismo d'anelli che conserva l'unità $\psi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}_2$, dato da

$$\psi : r \rightarrow [(r, r)].$$

Il problema fondamentale di Dedekind era quello di aver osservato coppie di classi contigue di razionali prive di “elemento separatore”, ad esempio le classi

$$A = r \in \mathbb{Q}^+ : r^2 \leq 2, \quad B = \mathbb{Q}^+ \setminus A,$$

dove $\mathbb{Q}^+ = q \in \mathbb{Q} : q > 0$ ($\sqrt{2}$ non è un razionale!). Ora, in $\mathbb{R}_2$ ogni coppia di classi contigue ammette uno ed un solo elemento separatore. Da qui discende poi immediatamente la validità dell'assioma di continuità. Ma $\mathbb{R}_1$ ed $\mathbb{R}_2$ sono la stessa cosa?

Per rispondere, sia $[x_n] \in \mathbb{R}_1$ e si ponga

$$H = \{h \in \mathbb{Q} : h \leq x_n \text{ definitivamente},$$

$$K = \{k \in \mathbb{Q} : k \geq x_n \text{ definitivamente}.$$

Una verifica mostra che (H, K) è una coppia di classi contigue di numeri razionali e che se

$$x_n \sim y_n \quad \text{allora} \quad (H, K) \approx (H', K'),$$

dove H' e K' sono definite come H e K in corrispondenza della successione y_n . Dunque l'applicazione

$$\chi : \mathbb{R}_1 \rightarrow \mathbb{R}_2$$

definita da

$$\chi([x_n]) = [(H, K)]$$

è ben definita e si verifica essere un isomorfismo di campi (tralasciamo le varie altre considerazioni d'ordine e topologiche).

Allora $\mathbb{R}_1$ ed $\mathbb{R}_2$ “sono” per noi la stessa cosa. A questo punto possiamo ribaltare tutto il nostro processo e formalmente dichiarare “campo dei numeri reali” un qualsiasi campo totalmente ordinato $(\mathcal{R}, \leq)$ per il quale valga l’assioma di continuità nella seguente forma:

$$\forall A, B \subseteq \mathcal{R}, \quad A, B \neq \emptyset, \quad A \leq B, \quad \exists \zeta \in \mathcal{R} \text{ tale che}$$

$$A \leq \zeta \leq B.$$

Si noti che $A \leq B$ significa $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$. $\mathbb{R}_1$ ed $\mathbb{R}_2$ sono due “modelli” che verificano gli assiomi in modo analogo a quanto il modello di Poincaré o di Beltrami soddisfa gli assiomi della geometria iperbolica.

In questa visione, cioè in $\mathcal{R}$, dove “recuperiamo” $\mathbb{Q}$ Lo recuperiamo come il “campo delle frazioni”. Ora il nostro punto di vista è completamente cambiato. Diamo una serie di assiomi (non contraddittori) e cerchiamo modelli che li soddisfino. Non abbiamo più garanzia che modelli che li soddisfino siano tra loro “isomorfi”. Ritornando alla geometria, quella Euclidea e quella iperbolica soddisfano in primi quattro assiomi di Euclide, quindi ne forniscono un modello, o meglio due modelli tra loro “diversi”. Riassumendo, la nostra indagine mostra come il concetto di uguaglianza si modifichi a seconda delle nostre necessità, non solo matematiche ma anche della vita quotidiana. Ci siamo però dati una regola, vale a dire quella secondo la quale la nostra uguaglianza soddisfa le proprietà delle relazioni d'equivalenza. Peraltro pronti a cambiare questa regola, il punto fermo rimane l'interpretazione univoca del linguaggio matematico, ed in questa direzione va anche l'avanzamento “a piccoli passi” delle dimostrazioni nella prassi matematica.

Con grande lungimiranza ed acume si esprime R. Descartes nel suo *Discorso sul Metodo*, pag. 129: “Quelle lunghe catene di ragioni, tutte semplici e facili, di cui i geometri sono abituati a servirsi per pervenire alle loro dimostrazioni più difficili, mi avevano dato occasione di immaginare che tutte le cose che possono cadere sotto la conoscenza dell'uomo si raggiungono nello stesso modo, e che purché ci si astenga dall'accettare alcuna per vera quando non lo è, e che si rispetti sempre l'ordine che ci vuole per dedurle le une dalle altre, non possono esservene di così nascoste che alla fine non le si scopra”.

Abbiamo cominciato citando Reichenbach col processo di astrazione o generalizzazione: ritorniamo dall'astratto al mondo reale; come Eulero nel lontano 1732 ci ha insegnato non è possibile percorrere tutti i ponti di Königsberg senza percorrerne almeno uno almeno due volte.

Grazie