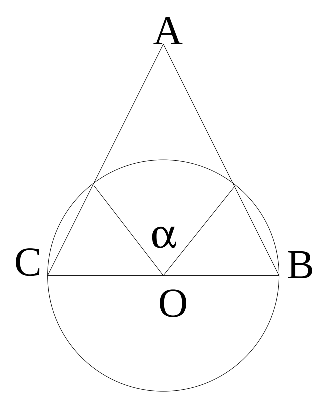
Problemi

Problema 1 (Giochi di Archimede)
Un primo numero è formato da due cifre seguite da un 4, un secondo numero è formato dalle stesse due cifre nello stesso ordine, stavolta precedute da un 4. Il secondo numero è più grande di 400 tanto quanto il primo numero è più piccolo di 400. Quali sono questi due numeri?

Problema 2 (Giochi di Archimede)
Dimostrare che, per ogni coppia di interi a e b tali che $|a| \neq |b|$, si ha:

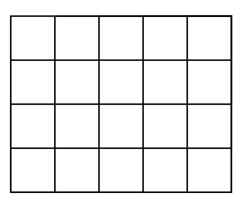
$$\left|\frac{a+b}{a-b}\right|^{ab} \geq 1.$$

Problema 3 (Giochi di Archimede)
Il diametro BC di una circonferenza è anche la base di un triangolo isoscele ABC i cui altri lati tagliano un angolo α di 100 gradi sulla circonferenza, come in figura.



Quanto misura l'angolo al vertice del triangolo isoscele?

Problema 4 (Giochi di Archimede)
Si vuole costruire un reticolo di ferro di questo tipo:



con tondini di questa forma (i lati dei tondini sono uguali ai lati dei quadratini della griglia):

Due tondini non possono sovrapporsi e nessuno di loro può debordare dalla griglia. Per quali valori dei lati del reticolo questo è possibile?

Problema 5 (Gara di Febbraio)
Si consideri l'insieme $A = \{1, 2, ..., n\}$ con n dispari. Sia $\{\pi(1), \pi(2), ..., \pi(n)\}$ una sua permutazione (ovvero la seconda n-upla è formata dagli stessi elementi della prima ma in un ordine diverso) . Dimostrare che

$$(\pi(1) - 1) \cdot (\pi(2) - 2) \cdot ... \cdot (\pi(n) - n)$$

è pari.

Problema 6 (Gara di Febbraio)
L' angolo in A di un triangolo ABC misura 30 gradi e il lato AB ha lunghezza 10. La lunghezza del lato BC è uno degli elementi dell' insieme $\{3, 5, 7, 9, 11\}$. Quanti triangoli differenti soddisfano queste condizioni?

Problema 7 (Gara di Febbraio)
Trovare tutti gli interi positivi k tali che $k^2|k!$ (ricordiamo che con $k!$ si intende $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k$).

Problema 8 (Gara di Febbraio)
Dati 4 punti all'interno di un cerchio di raggio unitario, provare che ne esistono 2 che distano al più $\sqrt{2}$.

Problema 9 (Cesenatico)
Siano α un cerchio, A un punto interno ad esso e PQ una corda passante per A che non sia un diametro. Chiamiamo p e q le rette tangenti alla circonferenza rispettivamente in P e Q. Sapendo che la retta l passante per A e perpendicolare ad OA interseca p e q nei punti K e L, dimostrare che $\overline{AK} = \overline{AL}$.

Problema 10 (Cesenatico)
Trovare tutte le soluzioni intere dell'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz.$$

Problema 11 (Cesenatico)
Il punto M varia su una circonferenza γ che passa per due punti fissati A e B. Chiamiamo K il punto medio del segmento MB e r la retta passante per il punto K perpendicolare a MA.

(a) Provare che, fissata la circonferenza γ, tutte le possibili rette r passano per uno stesso punto P.

(b) Trovare l'insieme di tutti i possibili punti P al variare della circonferenza γ tra tutte quelle che passano per A e B.

Problema 12 (Cesenatico) (*)
Data una funzione continua $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ che soddisfa le seguenti condizioni:

$$f(1000) = 999 \qquad f(x) \cdot f(f(x)) = 1 \qquad \forall x \in R,$$

trovare $f(500)$.

Problema 13 (Cesenatico)
Ogni anno nella città di Wizardtown il re convoca i suoi cento maghi per una riunione che si svolge nel seguente modo: il re fa mettere i maghi in fila indiana e pone un cappello sulla testa di ognuno; il cappello può essere verde, giallo o rosso e ogni mago può vedere solo i cappelli delle persone che sono davanti a lui. Allo scadere di ogni minuto almeno un mago deve dire un colore e se più maghi vogliono parlare devono farlo contemporaneamente. Chi ha parlato una volta deve poi tacere fino al termine della riunione e quando tutti hanno parlato il re fa decapitare chi ha detto un colore diverso da quello del proprio cappello.
Supponendo che i maghi siano a conoscenza di come si svolgerà la riunione e che adottino la strategia che permette al maggior numero di loro di salvarsi, quanti maghi sono sicuri di uscirne vivi? Quale sarà la strategia adottata?

Problema 14 (Cesenatico)
Sapendo che x,y e z sono numeri reali positivi, dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) se $x + y + z \leq 3$ allora
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3;$$

(b) se $x + y + z \geq 3$ allora
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 3.$$

Problema 15 (Cortona)
Siano S_1, S_2, S_3 e S_4 le aree delle quattro facce di un tetraedro, α l'angolo diedrale compreso tra la prima e la seconda faccia, β quello compreso tra le altre due. *(Spieghiamo brevemente cos'è l'angolo diedrale γ formato da due semipiani π_1 e π_2 che hanno lo spigolo r in comune. Preso un piano π_3 perpendicolare a r, chiamiano r_1 e r_2 le intersezioni di π_3 con i due semipiani iniziali. L'angolo γ è l'angolo formato dalle due semirette r_1 e r_2).*
Dimostrare che si ha :

$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \cos\alpha = S_3^2 + S_4^2 - 2S_3S_4 \cos\beta.$$

Problema 16 (Cortona)
Dato un insieme X di punti distinti del piano, diciamo che gode della proprietà A se, presi comunque 5 punti di X, esiste una circonferenza che passa per quattro di essi.
Inoltre indichiamo con $n(X)$ il numero massimo di punti di X che giacciono sulla stessa circonferenza. Al variare di X tra tutti gli insiemi di 10 punti che godono della proprietà A trovare il minimo di $n(X)$.

Problema 17 (Cortona)
Trovare tutte le funzioni $g : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ tali che

$$g(x+y) + g(x)g(y) = g(xy) + g(x) + g(y).$$

Problema 18 (Olimpiadi internazionali)
Siano γ una circonferenza e A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 5 punti distinti su essa tali che gli archi A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 e A_4A_5 siano uguali. Inoltre chiamiamo A_6 il punto di γ tale che A_2A_6 sia un diametro e A_7 l'intersezione tra A_3A_6 e A_1A_5. Dimostrare che la retta passante per A_4 e A_7 è perpendicolare a A_1A_6.

Problema 19 (Olimpiadi internazionali)
Il millepiedi Manyfoots ha infiniti piedi e nelle scarpe dei piedi destri ha dei sassolini. Manyfoots può spostare i sassolini in uno dei due seguenti modi:

(a) può prendere due sassolini dalla stessa scarpa e metterne uno nella scarpa immediatamente davanti e uno nella scarpa due posti dietro;

(b) se in due scarpe vicine ci sono sassolini, può spostare un sassolino della scarpa anteriore nella scarpa immediatamente davanti e buttare via un sassolino della scarpa posteriore.

Dimostrare che, se all'inizio ci sono un numero finito di sassolini, dopo un numero finito di mosse si arriva ad una configurazione stabile, cioè tale che Manyfoots non può spostare più nessun sassolino. Dimostrare inoltre che tale configurazione è indipendente dall'ordine delle mosse.

Problema 20 (Olimpiadi internazionali)
Un edificio ha un numero finito di stanze collegate tra di loro da alcune porte e da ogni stanza si può raggiungere una qualsiasi altra stanza dell'edificio. Due stanze sono segnate con I ed F e una persona vuole partire da I e arrivare in F.
Con un programma P identifichiamo una successione di istruzioni S e D. Per decidere qual è l'n-esima porta da varcare l' individuo guarda l' n-esima istruzione del programma. Se è S entra nella prima porta alla sua sinistra, se è D entra nella prima porta alla sua destra. Se la stanza ha una sola porta qualsiasi istruzione corrisponde ad uscire dalla porta da cui la persona è entrata. La persona si ferma quando raggiunge F. Dimostrare che esiste un programma P, eventualmente infinito, tale che, qualsiasi sia la struttura dell'edificio, la persona può raggiungere F da I seguendo questo programma.