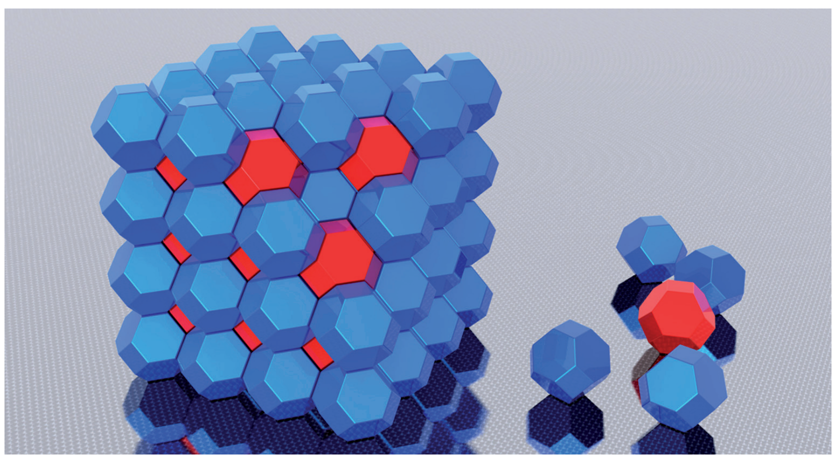
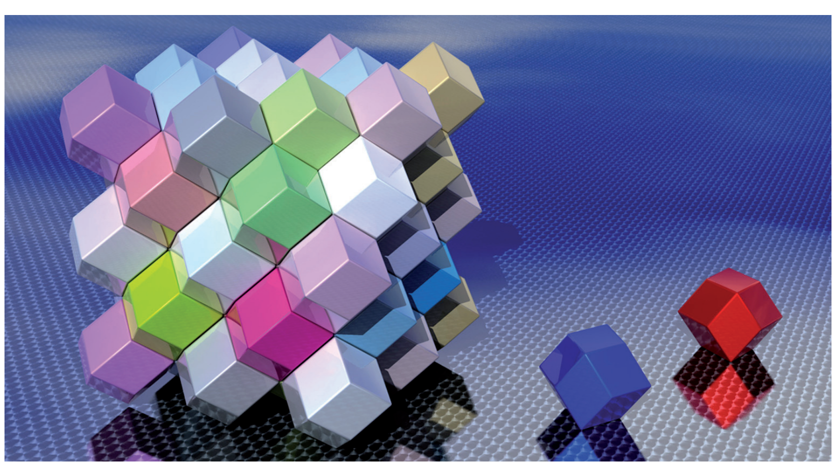
- tra i poliedri regolari, detti anche *solidi platonici*, solo il cubo tassella lo spazio. Ricordiamo che: (i) dato un poliedro, due vertici si dicono tra loro equivalenti se esiste una simmetria del solido che sposta il primo nel secondo; (ii) un poliedro si dice regolare sui vertici se tutti i vertici sono tra loro equivalenti; (iii) in modo analogo si possono definire poliedri regolari sugli spigoli e poliedri regolari sulle facce; (iv) i solidi platonici sono poliedri convessi, regolari sui vertici, sugli spigoli e sulle facce. Esistono cinque solidi platonici: il tetraedro, il cubo (detto anche esaedro), l'ottaedro (... ne compare uno anche nell'illustrazione che correda il punto Fib1.6), il dodecaedro e l'icosaedro (... ce n'è uno adagiato sulla pavimentazione di Penrose illustrata al punto Fib0.5!);

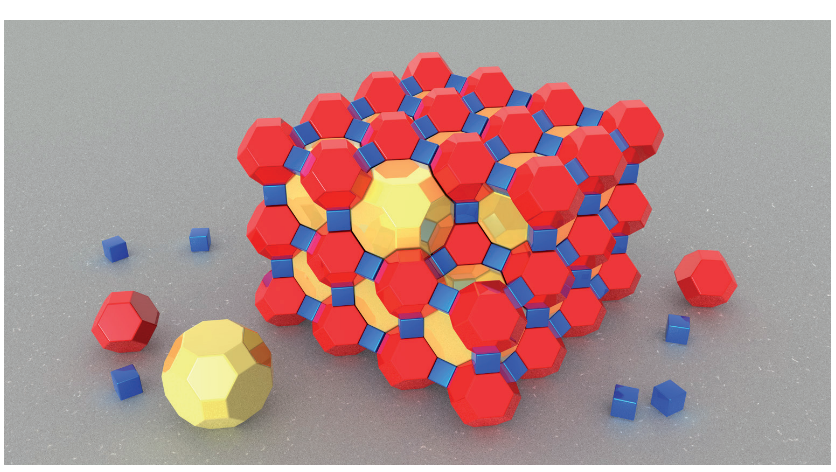
- tra i poliedri semiregolari, detti anche *solidi archimedei*, soltanto l'*ottaedro troncato* tassella lo spazio. Ricordiamo che i solidi archimedei sono poliedri convessi che soddisfano le seguenti proprietà: (i) le facce sono poligoni regolari; (ii) sono regolari sui vertici; (iii) non sono solidi platonici, né prismi, né antiprismi (un antiprisma è un poliedro definito da due "copie" tra loro parallele di un certo poligono, connesse da "una striscia di triangoli disposti in modo alternato" ... per una definizione rigorosa rimandiamo ad altri testi). Esistono tredici solidi archimedei. L'ottaedro troncato, in particolare, può essere ottenuto troncando le sei cuspidi dell'ottaedro; è un poliedro con 14 facce (8 esagoni e 6 quadrati), 36 spigoli e 24 vertici. La tassellazione in questione è mostrata nella seguente figura;



- considerando i *solidi di Catalan*, è possibile tassellare lo spazio con *dodecaedri rombici*. Ricordiamo che un solido di Catalan è un poliedro duale di un solido archimedeo (il poliedro duale di un poliedro P è un altro poliedro Q, ottenuto "scambiando i ruoli" dei vertici e delle facce di P; il duale di Q è nuovamente P). Anche i solidi di Catalan, pertanto, sono tredici. Tra essi, il dodecaedro rombico è il duale del cubottaedro (solido archimedeo ottenibile troncando le otto cuspidi del cubo, oppure le sei cuspidi dell'ottaedro). Come tutti i solidi di Catalan, esso è regolare sulle facce (ne ha 12 a forma di rombo); inoltre, è regolare anche sugli spigoli (ne ha 24, mentre i vertici sono 14). La tassellazione in questione è mostrata nella seguente figura.



Per quel che riguarda le tassellazioni non regolari, oltre a quella basata su tetraedri e ottaedri riportata nel foglio originale, ci limitiamo a ricordare quella realizzata con cubi, ottaedri troncati e *cubottaedri troncati*. Il cubottaedro troncato, in particolare, è un solido archimedeo che ha 26 facce (12 quadrati, 8 esagoni e 6 ottagoni), 72 spigoli e 48 vertici. La tassellazione in questione è mostrata nella seguente figura.



Fib7.7 La congettura sull'esistenza di *numeri perfetti* dispari è ancora aperta. Tuttavia, già Eulero aveva dimostrato che, se un numero perfetto dispari esiste, allora deve essere della forma $p^\alpha k^2$, dove p è un primo che non divide k e sia p che α danno resto 1 nella divisione per 4. Considerando poi casi particolari, si possono trovare ulteriori condizioni. Recentemente, anche con l'aiuto del computer, è stato dimostrato che, se un numero perfetto dispari esiste, allora necessariamente: (i) deve essere maggiore di 10^{300}; (ii) la sua fattorizzazione deve contenere almeno 75 fattori primi, di cui almeno 9 distinti; (iii) deve avere un fattore primo maggiore di 10^8 (questi record sono aggiornati a luglio 2010).

Per quanto riguarda i *numeri perfetti di seconda specie*, è facile dimostrare che sono tutti e solo quelli della forma p^3 oppure pq, dove p e q sono numeri primi distinti. Infatti, se $n = p^k$, il risultato si ottiene osservando che il prodotto dei divisori di n diversi da n stesso è $p^{k(k-1)/2}$. Inoltre, se n è perfetto di seconda specie ed è divisibile per almeno due fattori primi distinti p e q, allora il prodotto dei due divisori n/p e n/q, che è pari a $n^2/(pq)$, non può superare n, da cui $n \leq pq$.

Fib7.9-1 Ricordiamo la *disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica* in tre variabili
$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz},$$
valida per ogni terna di numeri reali positivi x, y e z. Supponiamo ora, per assurdo, che $abc > 1$. Applicando la suddetta disuguaglianza, prima ai numeri a, b, c e poi ai numeri ab, bc, ca, si ottiene che $a+b+c > 3$ e $ab+bc+ca > 3$, da cui
$$(1+a)(1+b)(1+c) = 1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc > 1+3+3+1 = 8,$$
il che contraddice l'ipotesi.

Fib7.9-2 Supponiamo dapprima che vi sia una sola chiave giusta nel mazzo. La probabilità richiesta è
$$p = \frac{1}{n}.$$
Non bisogna farsi ingannare ... infatti, le probabilità che la chiave giusta sia estratta al k-esimo oppure al j-esimo (ad esempio al primo) tentativo sono uguali! Se invece fosse stata richiesta la probabilità di estrarre la chiave giusta al k-esimo tentativo dopo che i primi $k-1$ sono falliti, essa sarebbe risultata pari a $1/(n-(k-1))$.

Vediamo ora come cambiano le cose supponendo che vi siano m copie della chiave giusta nel mazzo. Se $n-m < k-1$ si ha evidentemente $p = 0$, altrimenti la probabilità richiesta può essere calcolata nel seguente modo. La probabilità di non trovare la chiave giusta al primo tentativo è data da $(n-m)/n$; la probabilità di non trovarla neppure al secondo tentativo è $(n-m-1)/(n-1)$. Così procedendo, la probabilità totale di non trovare mai la chiave giusta nei primi $k-1$ tentativi è
$$\tilde{p} = \frac{n-m}{n} \cdot \frac{n-m-1}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{n-m-(k-2)}{n-(k-2)} = \frac{(n-m)!}{n!} \cdot \frac{(n-(k-1))!}{(n-m-(k-1))!}.$$
A questo punto nel mazzo rimangono $n-(k-1)$ chiavi e quindi la probabilità di estrarre ora la chiave giusta è pari a $m/(n-(k-1))$. In definitiva, la probabilità richiesta è data dalla seguente espressione:
$$p = \tilde{p} \cdot \frac{m}{n-(k-1)} = m \cdot \frac{(n-m)!}{n!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-m-(k-1))!},$$
che per $m = 1$ coincide (correttamente) con quella data sopra.

Fib7.9-3 Mostriamo di seguito che il numero cercato è $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$. Sia $n = a^3 + b^3 = c^3 + d^3$; senza ledere la generalità, possiamo supporre $c \leq d$ e $a = \min\{a,b,c,d\}$, per cui $a < c \leq d < b$. Inoltre, si ha $c+d > a+b$ in quanto $(a+\varepsilon)^3 + (b-\varepsilon)^3 < a^3 + b^3$ per ogni $0 < \varepsilon < b-a$. Osserviamo infine che se m è pari allora m^3 è divisibile per 8, mentre se è dispari allora m^2 è della forma $8k+1$, per cui $m^3 = 8km + m$. Procediamo distinguendo due casi:

- [*caso i*] sia n dispari, cosicché solo uno fra a e b è dispari. Se $a = 1$, il minimo valore che può assumere il numero dispari fra c e d è 9, dovendo tale numero differire da a per un multiplo di 8. Allora $b \geq 10$, ma non può essere uguale a 10 perché $8^3 + 9^3 > 1^3 + 10^3 > 6^3 + 9^3$. Prendendo, invece, $b = 12$ si ottiene $1^3 + 12^3 = 1729 = 9^3 + 10^3$. Ovviamente, qualunque altro a dispari produce valori maggiori di n, quindi resta da considerare il caso in cui sia b ad essere dispari. Per produrre un n minore dovrebbe essere $b = 11$, ma questo caso è da scartare perché implica $c = 3$, $a = 2$ e $2^3 + 11^3 - 3^3 = 1312$ non è un cubo;

- [*caso ii*] sia n pari; possiamo subito escludere il caso in cui a, b, c, d sono tutti pari, perché otterremmo un numero minore dividendoli tutti per due. Se sono tutti dispari, allora $a+b$ e $c+d$ differiscono per un multiplo di 8; per ottenere un $n < 1729$ deve essere $b \leq 11$, quindi $c+d \leq 18$ e dunque la condizione da considerare è $a+b = c+d-8$. Ma allora il massimo valore possibile per a^3+b^3 è $1^3 + (c+d-9)^3 < (c+d)^3/4$, che è il minimo valore possibile per c^3+d^3 (essendo ottenuto per $c = d$). Infine, se solo a, b oppure solo c, d sono pari, allora la somma dei loro cubi è divisibile per 8, per cui lo è anche la somma dei due dispari e i casi da considerare sono due: a, b pari e $c+d = 16$ (da scartare perché implica $b = 10$, $c = 7$, $d = 9$ e $7^3 + 9^3 - 10^3 = 72$ non è un cubo), oppure c, d pari e $a+b = 8$ (da scartare perché implica $a = 1$, $b = 7$, $d = 6$ e $1^3 + 7^3 - 6^3 = 128$ non è un cubo). Con ciò l'asserto è provato.

Nota: il più piccolo intero esprimibile come somma di due cubi positivi in n modi differenti (a meno dell'ordine) è chiamato *n-esimo numero di taxi*, in simboli $Taxicab(n)$ o $Ta(n)$, in virtù di un celebre aneddoto raccontato da G.H. Hardy a proposito di S. Ramanujan. Hardy, recatosi a far visita a Ramanujan allora malato e ricoverato in una casa di cura vicino Londra, avrebbe incidentalmente detto a Ramanujan di essere arrivato con un taxi il cui numero, 1729, era piuttosto anodino ...