COMBINATORIA

Titolo nota 22/02/2006

* Calcolo combinatorio = CONTARE
* Invarianti

Menù al ristorante

ANTIP.	PRIMI	SECONDI	DESSERT
a	p	s	d

Si vuole ordinare uno per tipo. In quanti modi si può

$$a \cdot p \cdot s \cdot d$$

Divisori di un intero positivo.

Quanti sono i divisori positivi di 6000

Fattorizzo $6000 = 3 \cdot 2000$

$= 3 \cdot 2 \cdot 1000$

$= 3 \cdot 2 \cdot (10)^3$

$= 3 \cdot 2 \cdot 2^3 \cdot 5^3$

$= 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3$

Come è fatto un div. di 6000 : $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$

N.B. gli esponenti possono anche essere 0

$a = 0, 1, 2, 3, 4$ $\quad c = 0, 1, 2, 3$

$b = 0, 1$

5 scelte per a
2 " per b
4 " per c

TOTALE
$5 \cdot 2 \cdot 4 = 40$

Se $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$

I divisori pos. di n sono $(a_1+1)\cdot(a_2+1)\cdot \ldots \cdot(a_k+1)$

FORMULA DEI DIVISORI

— o — o —

ANAGRAMMI: quanti sono gli anagrammi di PARCO

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ $\qquad$ $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

La prima lettera la posso scegliere in 5 modi

" 2^a " " 4 modi

3^a " " 3 modi

4^a " 2 modi

5^a 1 modo

Anagrammi di PORCO. Ci sono 2 lettere uguali

PORCO $\rightsquigarrow$ RCOPO, RCOPO ← sono form. diversi, ma in realtà uguali

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Devo dividere per 2.

$$\frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60.$$

MAIALE

$$\frac{6!}{2!} = \frac{720}{2} = 360$$

TUTTO

$$\frac{5!}{3!}$$

In ogni anagramma le T possono comparire in $3! = 6$ modi diversi.

Sottoinsiemi

Classe di 25 studenti
3 da interrogare.

In quanti modi si possono scegliere i 3 ?

Il primo lo posso scegliere in 25 modi
il secondo " " 24 modi
" terzo " " 23 modi

$$\frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3!}$$

Lo stesso terzetto è contato ! volte, a seconda dell'ordine di chiamata.

In generale: classe di n di cui k interrogati;

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

n su k.

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} =$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Quindi $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ COEFFICIENTE BINOMIALE

Esempio: Quante sono le sestine al superenalotto?

$$\binom{90}{6} = \frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86\cdot 85}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} \sim 720 \text{ milioni}$$

$(x+y)^n$ Triangolo Tartaglia

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \leftarrow n=1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \leftarrow n=2 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \leftarrow n=3 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \leftarrow n=4 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

$$(x+y)^4 = 1\cdot x^4 + 4\,x^3y + 6\,x^2y^2 + 4\,xy^3 + 1\cdot y^4$$

Si ha che i coefficienti che compaiono nella riga n-esima sono

$$\binom{n}{0},\ \binom{n}{1},\ \binom{n}{2},\ \binom{n}{3},\ \dots,\ \binom{n}{n}$$

$\boxed{n=5}$

$$\binom{n}{0} = \binom{5}{0} = 1$$

$$\binom{5}{1} = 5\ ;\quad \binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10 \qquad \binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1} = 10$$

$$\binom{5}{4} = 5 \qquad \binom{5}{5} = 1$$

Simmetria
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

25 persone

10 interrogati

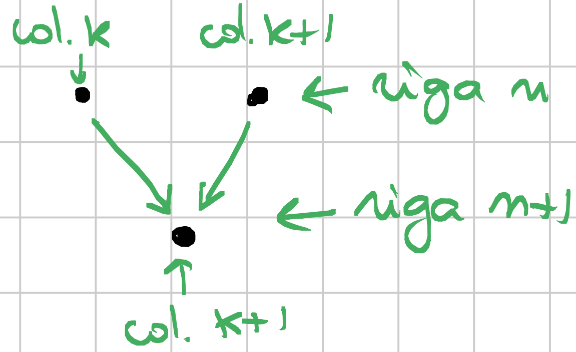
$$\binom{25}{10} = \binom{25}{15}$$

modi di scegliere i 10 tapini

modi di scegliere i 15 fortunati

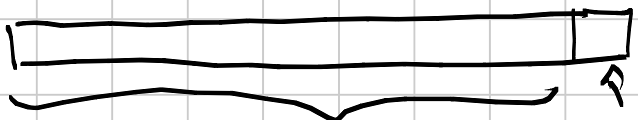
FORMULA RICORSIVA

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$



Per es.: dimostrarla usando le formule con i fattoriali

$\binom{n+1}{k+1}$ = modi di scegliere $k+1$ persone su $n+1$



Ho 2 poss.

* prendere $k+1$ dai primi n

  $\binom{n}{k+1}$ modi

* prendere k dai primi n e aggiungere l'$(n+1)$-esimo

  $\binom{n}{k}$ modi

$$(x+y)^{20} = \underbrace{(x+y)(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)}_{20 \text{ fattori}} = \ldots + x^{15}y^{5} + \ldots$$

$\binom{20}{15}$ modi

Per avere $x^{15}y^{5}$ devo prendere x da 15 parentesi e y dalle 5 rimanenti

Classe da 25

6 vanno in gita in Spagna
8 " " " Francia
11 " " Amsterdam

In quanti modi posso fare la scelta ?

$$\binom{25}{6}\binom{19}{8} = \frac{25!}{6!\,\cancel{19!}} \cdot \frac{\cancel{19!}}{8!\,11!} = \frac{25!}{6!\,8!\,11!}$$

scelta spagna

Francia

Es. è chiaro che 2 divide 2006!

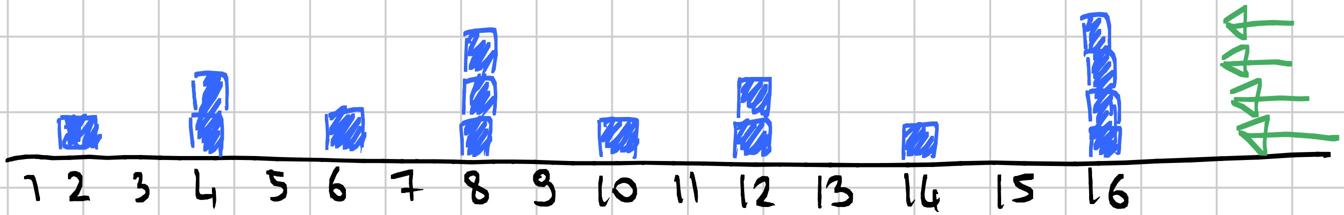
" 4 divide 2006!

" 8 " 2006!

Qual è la max potenza di 2 che divide 2006!

$$1024 = 2^{10} \text{ divide } 2006!$$

$$2006! = 1 \cdot \underset{1}{\underset{\downarrow}{2}} \cdot 3 \cdot \underset{2}{\underset{\downarrow}{4}} \cdot 5 \cdot \underset{1}{\underset{\downarrow}{6}} \cdot 7 \cdot \underset{3}{\underset{\downarrow}{8}} \cdot 9 \cdot \underset{1}{\underset{\downarrow}{10}} \cdot \ldots \cdot \underset{1}{\underset{\downarrow}{2006}}$$



Nella prima riga ho 1003 caselle $\left[\frac{2006}{2}\right]$

seconda " " $\left[\frac{2006}{4}\right]$

terza " " $\left[\frac{2006}{8}\right]$

Parte intera

La max potenza di 2 che divide 2006! è

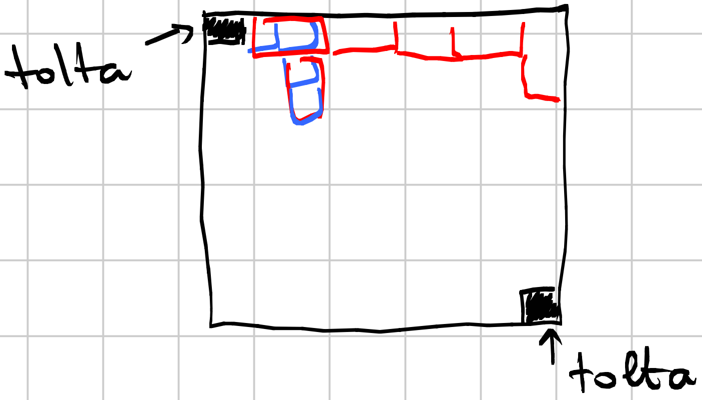
$$\left[\frac{2006}{2}\right]+\left[\frac{2006}{4}\right]+\left[\frac{2006}{8}\right]+\dots+\left[\frac{2006}{1024}\right]$$

Con quanti zeri termina 2006! Quello che conta è il numero dei fattori 5.

$$\left[\frac{2006}{5}\right]+\left[\frac{2006}{25}\right]+\left[\frac{2006}{125}\right]+\left[\frac{2006}{625}\right]$$

INVARIANTI

1° esempio

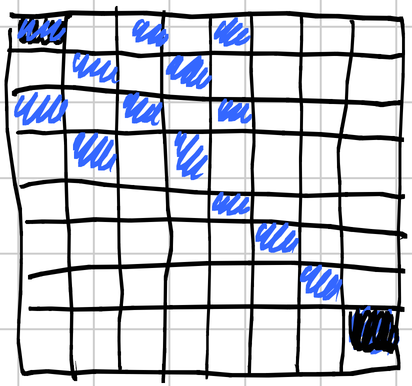


8×8

Mattonelle 2×1

Quante posso metterne?

Caselle libere 62 $\rightsquigarrow$ al max 31 mattonelle



All'inizio sono 32 B
32 colorate

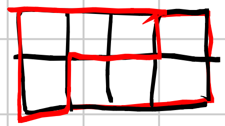
Dopo l'eliminaz sono 32 B
30 C

Ogni mattonella ne prende 1 B e 1 C

$\Rightarrow$ al max 30 mattonelle (si riesce)

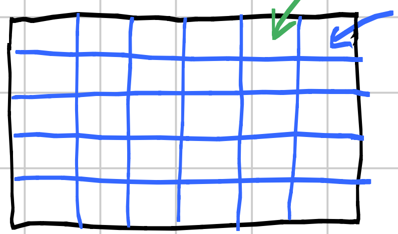
Piastrellazione con la L

Quali rettangoli $m \times n$
si possono piastrellare con le L?



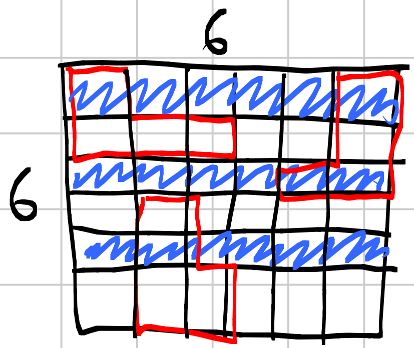
10×25 ? NO! L'area deve essere multipla di 4

10×24 ? SI!



2×4

In questo si fanno i rettangoli $2h \times 4k$ ← Area multipla di 8



18 B   18 C

Quante mattonelle ? $\frac{36}{4} = 9$

Comunque si metta la mattonella i colori sono 3+1

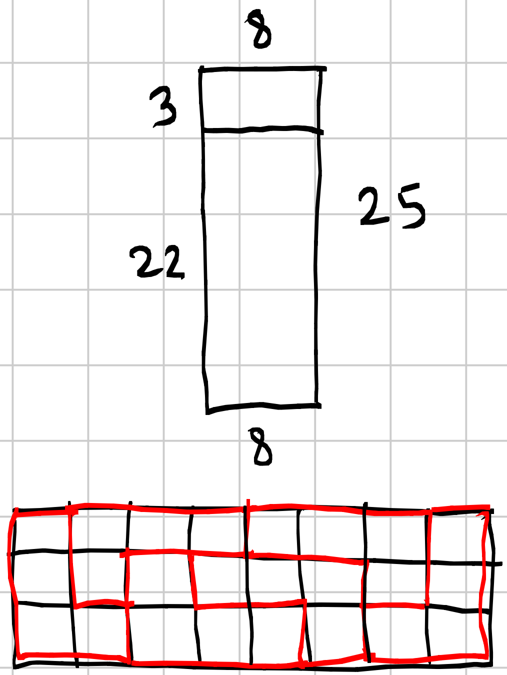
Devo ricoprire 18 caselle B

$$\underbrace{1+3+1+1+\dots+3}_{\text{gli addendi sono tanti quante le mattonelle, quindi } 9} = 18$$

Sommando 9 numeri dispari viene dispari quindi non 18

$\Rightarrow$ impossibile

8 × 25 ? SI !



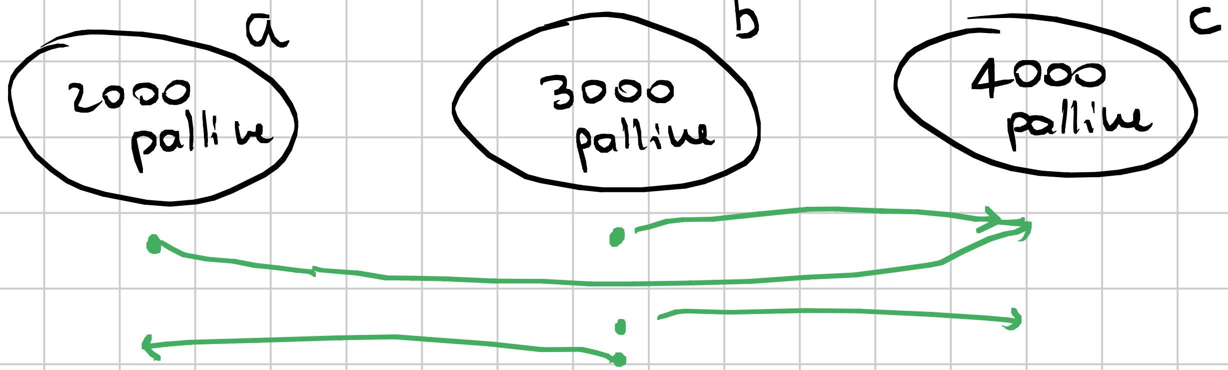
22 · 8 si può fare

pari   multiplo di 4 ok

Basta fare il 3 × 8

— o — o —

Problema



Posso fare 2 mosse

Si può arrivare a 3000 3000 3000 ?

Esamino b − a

a diminuisce di 2 Quindi b−a è aumentato di 3
b aumenta di 1

Si vede che

b − a può solo
↗ aumentare di 3
→ restare uguale
↘ diminuire di 3

Parte da 1000 ⟹ NON può arrivare a 0