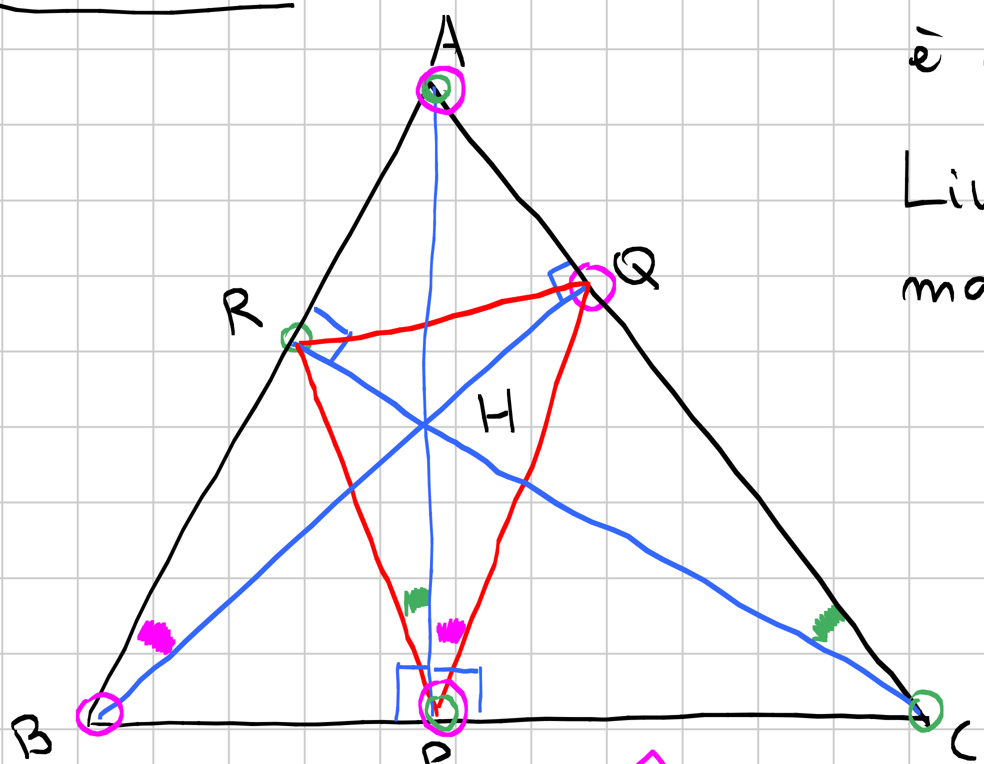
ESERCIZIO



≡ uguali e ≡ = 90° − $\hat{A}$ = ≡

H (ortocentro di ABC)
è anche incentro di PQR

Linee blu = altezze di ABC
ma anche bisettrici di PQR

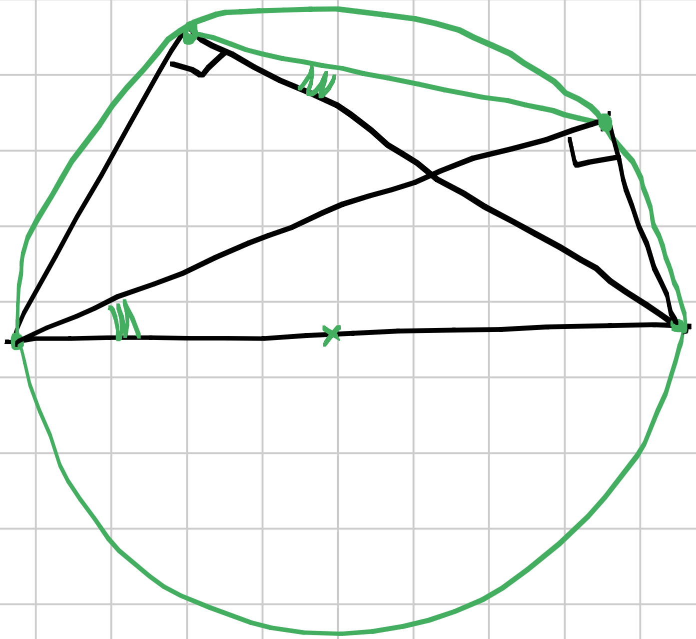
DEVO DIMOSTRARLO

ARPC è ciclico

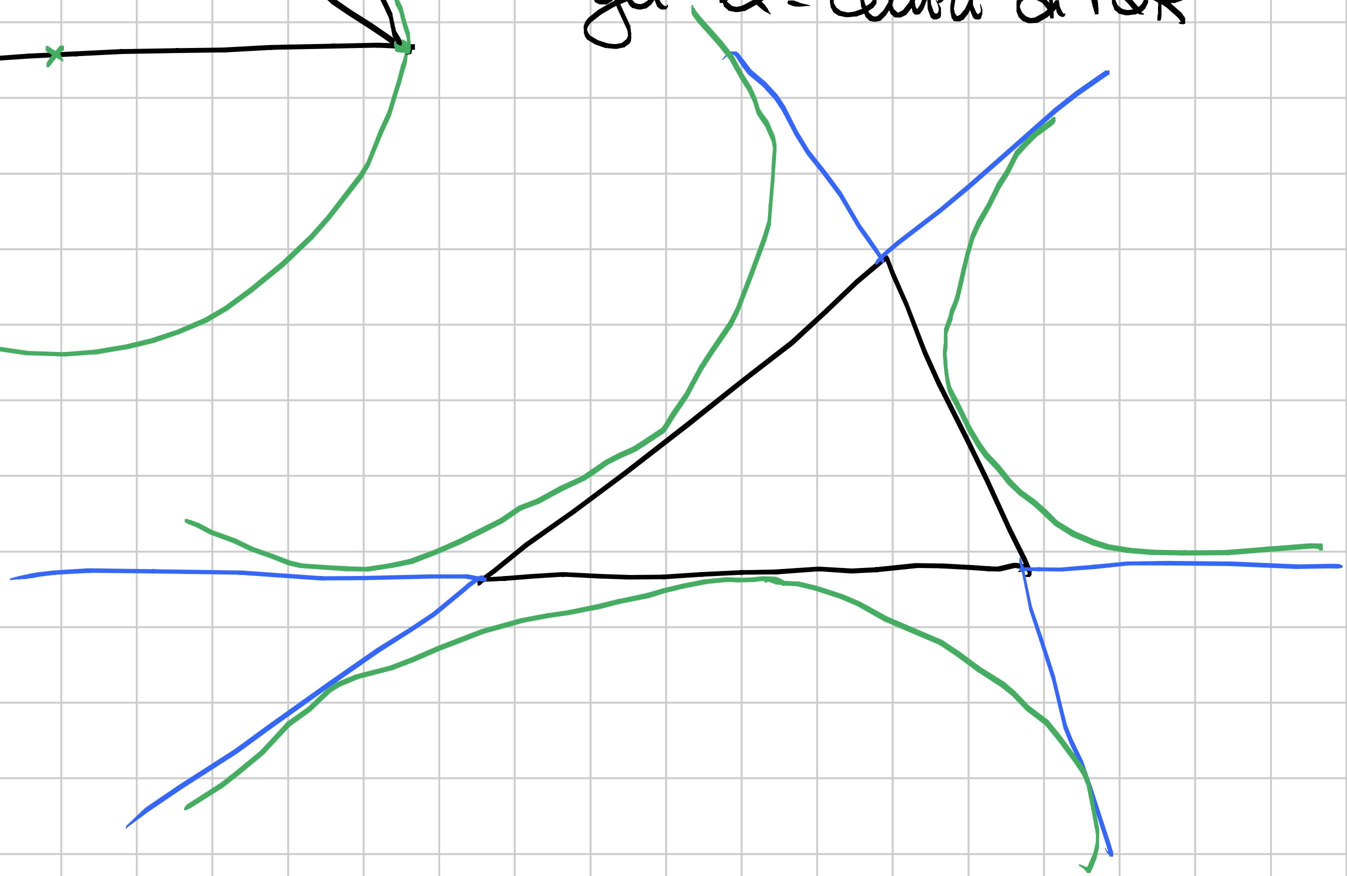
≡ uguali perché insistono
stessa corda

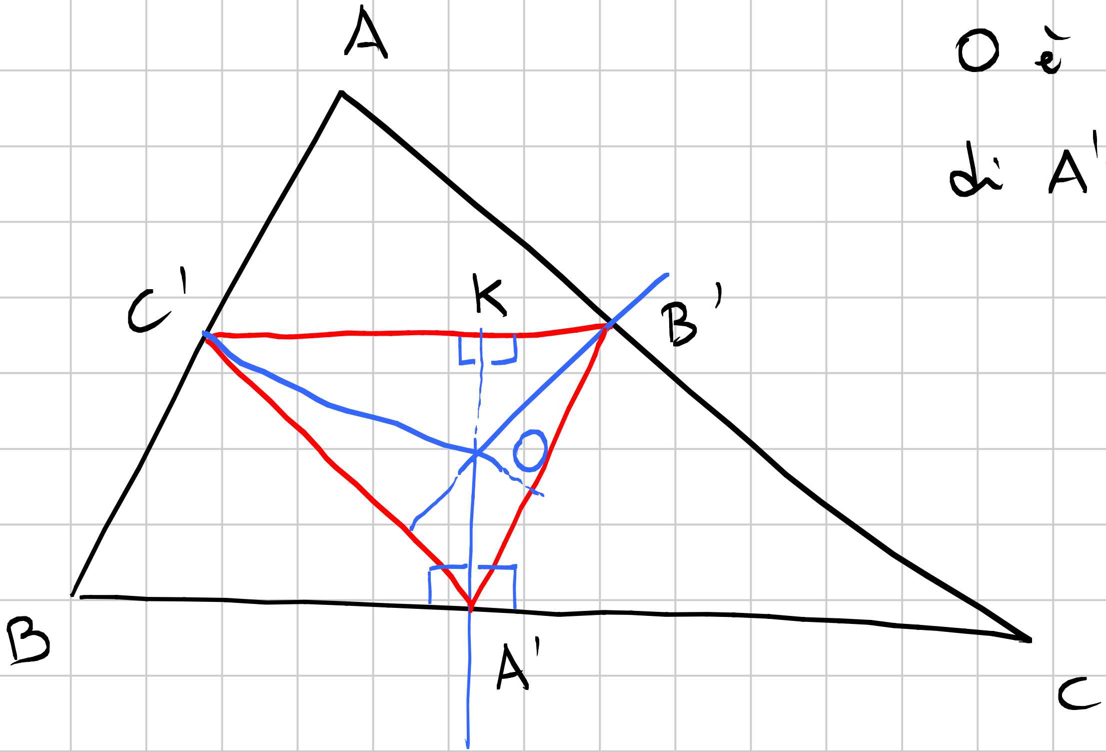
≡ = 90° − $\hat{A}$

AQPB ciclico
BRQC ciclico



Nell' es. prec. si ha che A, B, C sono gli ex-centri di PQR



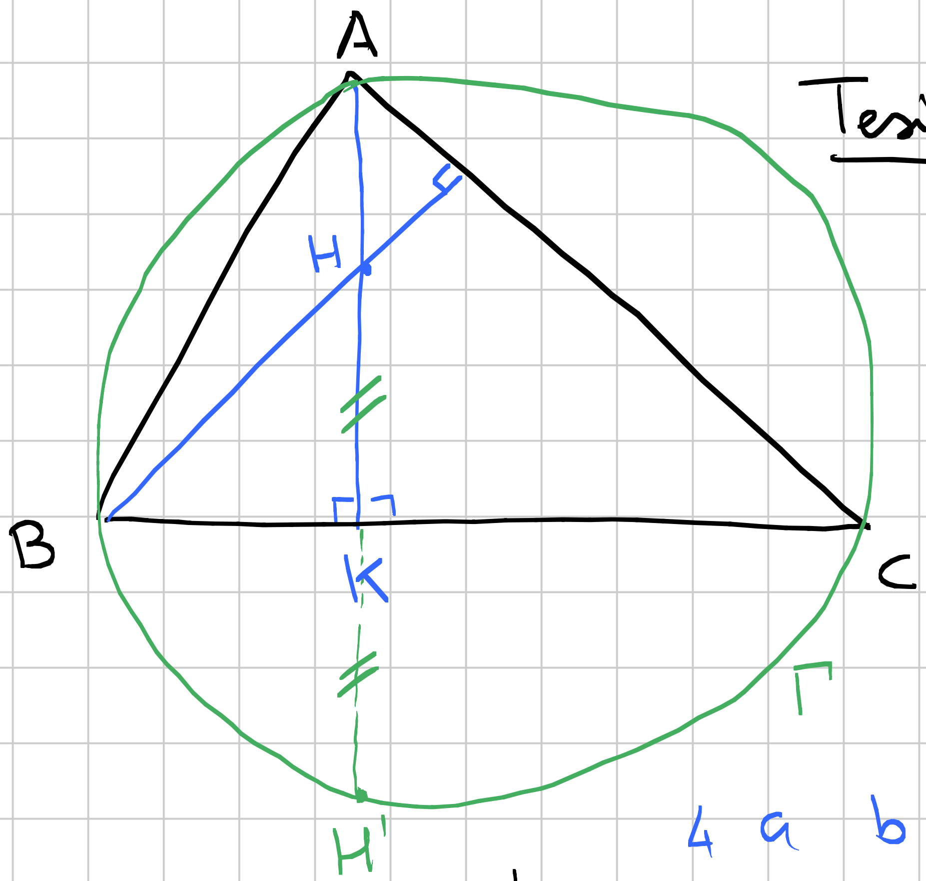


O è ORTOCENTRO di A'B'C'

C'B' è parallelo a BC

A'K è perp. a BC, dunque perp. anche a B'C'

$\Rightarrow$ A'K è altezza di A'B'C' (Idem per le altre)



Tesi: $4\,AK\cdot HK \le (BC)^2$

H' simmetrico di H risp. a BC

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$$

GM $\le$ AM

$$4ab \le (a+b)^2$$

$$4\,AK\cdot HK = 4\,\underbrace{AK\cdot KH'}_{\mathrm{pow}_\Gamma(K)} = \overset{4}{4}\,\underbrace{\overset{a}{BK}\cdot \overset{b}{KC}}_{\mathrm{pow}_\Gamma(K)} \overset{\text{AM-GM}}{\le} \overset{(a+b)^2}{(BK+KC)^2} = BC^2$$

Trovare le soluz. intere di

$$7^x - 4^y = 3$$

Sol. banale: $x=1,\ y=1$ Ce ne sono altre?

Modulo 4 $\qquad 7^x - 4^y = 3$

$$3^x - 0^y = 3 \qquad (4)$$

$$3^x = 3 \qquad (4)$$

$$3^x = (-1)^x = \begin{cases} 1 & x \text{ pari} \leftarrow \text{NO BUONO} \\ -1 & x \text{ dispari} \leftarrow \text{BUONO} \end{cases}$$

$$7^x - 4^y = 3$$ Modulo 8

$(-1)^x$

4^y

$4^1 \equiv 4 \quad (8)$

$4^2 \equiv 0 \quad (8)$

$4^3 \equiv 0 \quad (8)$

$$4^y \equiv \begin{cases} 4 & \text{se } y = 1 \\ 0 & \text{se } y > 1 \end{cases}$$

Se $y = 1$ $\quad 7^x - 4 = 3$; $7^x = 7$; $x = 1 \Rightarrow$ SOL. GIÀ TROVATA

se $y > 1$, mod 8 diventa

$$7^x - 4^y = 3$$

$$(-1)^x - 0 = 3$$

$(-1)^x \equiv 3 \quad (8)$

$\pm 1 \not\equiv 3 \quad (8)$ non ci sono altre soluz.

$p(x)$ a coeff. interi. $p(1)=1$, $p(7)=7$

Cosa possiamo dire di $p(4)$?

Proposta 1. $q(x) = p(x) - 1$ così $p(1) = 1$ ci dà $q(1) = 0$ che è cosa buona

$p(7) = 7$ ci dà $q(7) = 6$ che è così-così

Proposta 2. $q(x) = p(x) - x$ Ora abbiamo che

$$q(1) = p(1) - 1 = 0 \; ; \; q(7) = p(7) - 7 = 0$$

Quindi $q(x)$ si annulla in $x=1$ e $x=7$.

Ruffini $\Rightarrow$ $q(x) = (x-1)(x-7) \cdot r(x)$

$$p(x) - x = (x-1)(x-7) \cdot r(x)$$

$$p(x) = x + (x-1)(x-7) \cdot r(x)$$

Metto $x = 4$

$$p(4) = 4 + (4-1)(4-7) \cdot r(4)$$ INTERO

$$p(4) = 4 - 9k$$

Questo vuol dire che $p(4) \equiv 4 \quad (9)$