TEORIA DEI NUMERI = problemi che parlano di numeri interi

PROBLEMA 1 Trovare i valori interi di n per cui

$$\frac{2006}{n-5}$$ risulta a sua volta intero.

Idea: $n-5$ deve essere un DIVISORE di 2006

$$2006 = 2 \cdot 1003$$
$$= 2 \cdot 17 \cdot 59$$

Quali sono i divisori di 2006?

$$\begin{array}{r} 17\cdot \\ 59 \\ \hline 153 \\ 85- \\ \hline 1003 \end{array}$$

$\boxed{1}$, 2, 17, 59, $2\cdot 17$, $\underset{1003}{\underset{\parallel}{17\cdot 59}}$, $2\cdot 59$, 2006

Ci sono quindi 8 DIVISORI

Per ogni divisore ho un valore buono di n

Quante soluz. trovo ?

1 $\quad n-5=1 \Rightarrow n=6$

2 $\quad n-5=2 \Rightarrow n=7$

$\vdots$

$2\cdot 17=34 \quad n-5=34 \Rightarrow n=39$

8

SBAGLIATO !!!

Devo aggiungere tutte le soluz. che provengono dai div. negativi

Divisore $-2 \qquad n-5=-2 \qquad n=3$

PROBLEMA 2 $\qquad$ Stessa cosa con $\dfrac{n+1}{n-5}$

$$\frac{n+1}{n-5}=\frac{n-5+6}{n-5}=1+\frac{6}{n-5}$$

Mi sono ricondotto a $n-5$ divisore di 6

$$n - 5 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

$$\frac{n^2+1}{n-5}$$

Divisione di polinomi

$$\begin{array}{r|l} n^2+1 & n-5 \\ \hline -n^2+5n & n+5 \\ \hline 5n+1 & \\ -5n+25 & \\ \hline \quad 26 & \end{array}$$

Mi dice $\quad n^2+1 = (n-5)(n+5)+26$

$$\frac{n^2+1}{n-5} = \frac{(n-5)(n+5)+26}{n-5} = n+5+\frac{26}{n-5}$$

$$n-5 = \pm 1, \pm 2, \pm 13, \pm 26$$

In generale $\dfrac{\text{polinomio in } n}{n-5}$ intero

Si fa la divisione e rimane $\ldots\ldots + \dfrac{\text{numero}}{n-5}$

Guardo questo.

Trovare le soluzioni intere di

$$(x+1)(y+1) = 2xy$$

$$xy + x + y + 1 = 2xy \qquad xy - x - y - 1 = 0$$

$$y(x-1) = x+1 \qquad y = \frac{x+1}{x-1}$$

Cerco gli x interi per cui la fraz. è intero.

TEOREMA DI RUFFINI

Dato un polinomio $p(x)$, se $p(\alpha)=0$ (cioè α è radice) allora posso dividere

$$p(x) = (x-\alpha)\, q(x)$$

Cosa importante: se p ha coeff. interi e α è intero, allora $q(x)$ ha coeff. interi

I pol. a coeff. interi sono molto RIGIDI

Problema $p(x)$ a coeff. interi. Supp. $p(2006)=0$.

Quanto può fare $p(2004)$? Può essere $p(2004)=7$? Può essere $p(2004)=70$?

Ruffini $\Rightarrow$ posso scrivere $p(x) = (x-2006)\,q(x)$

Quindi $p(2004) = (2004-2006)\cdot q(2004)$

$= -2 \cdot q(2004)$

INTERO

$\Rightarrow$ $p(2004)$ DEVE ESSERE PARI

Quindi 7 non può essere, 70 forse.

Per dimostrare che può essere 70, basta fare in modo che $q(2004) = -35$ Ad esempio $q(x) \equiv -35$ (costante)

$p(x) = (x-2006)\cdot(-35)$ $\rightarrow$ vale 0 in 2006 e vale 70 in 2004

Problema

$p(x)$ coeff. interi $\qquad p(6)=0$

$p(2006)=0$

Può essere $p(2004)=70$?

Ruffini $\qquad p(x) = (x-2006)\, q(x)$ ← ho usato solo che $p(2006)=0$

Metto $x=6$. $\qquad 0 = p(6) = (6-2006)\, q(6)$

$\Rightarrow \quad q(6)=0$

Ancora Ruffini $\Rightarrow \quad \boxed{q(x) = (x-6)\, r(x)}$

$$p(x) = (x-2006)(x-6)\, r(x)$$

Metto $x=2004 \Rightarrow \quad p(2004) = (2004-2006)\cdot(2004-6)\cdot r(2004)$

$= (-2)\cdot 1998 \cdot r(2004)$

$p(2004)$ è per forza un multiplo di $2 \cdot 1998$ quindi

70 non va bene

— o — o —

Problema $\quad p$ coeff. interi $\quad p(1) = p(3) = 7$

Quanto può fare $p(4) = \,?$

Considero il polinomio $\quad q(x) = p(x) - 7$

$$q(1) = p(1) - 7 = 0 \qquad q(3) = 0$$

Ruffini: $\quad q(x) = (x-1)(x-3)\,r(x)$

$$p(x) - 7 = (x-1)(x-3)\,r(x)$$

$$p(x) = 7 + (x-1)(x-3)\,r(x)$$

INTERO

Metto $x = 4 \Rightarrow \quad p(4) = 7 + (4-1)(4-3)\,r(4)$

$$p(4) = 7 + 3 \cdot \text{intero}$$

I valori possibili per $p(4)$ sono quelli della forma

$$7 + 3 \cdot \text{intero} = 7 + 3k$$

70 va bene ? $7+3k = 70$, $3k = 63$, $k = 21$ ok

80 " ? $7+3k = 80$, $3k = 73$ no 73 no div.

CONGRUENZE

$\boxed{0}$ $\boxed{1}$
2 3
4 5
6 7

2006

P D

RESTI NELLA DIV. PER 3

$\boxed{0}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$
3 4 5
6 7 8

multipli di 3

resto 1 nella div. per 3

resto 2 nella div. per 3

2006

Multiplo di 3

$2006 = 2004 + 2$

$\boxed{0}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$
4 5 6 7

MULT 4

Pari non multipli di 4, 2006

Dico che $x \equiv 1 \quad (4)$

x congruo a 1
modulo 4

se x, diviso per 4, dà resto 1

$x \equiv 2 \quad (7)$ x, diviso per 7, dà resto 2

$2006 \equiv 2 \quad (4)$ $2006 \equiv 1 \quad (5)$

$2006 \equiv 2 \quad (3)$ $2006 \equiv 0 \quad (2)$

Pari / Dispari

$P + P = P$

$P + D = D$

$D + D = P$

$P \cdot P = P$

$P \cdot D = P$

$D \cdot D = D$

Queste regole valgono anche modulo 3, 4, 5, 6, ...

$$x \equiv 2 \quad (3)$$
$$y \equiv 2 \quad (3)$$

$$x+y \equiv 2+2 \equiv 4 \equiv 1 \quad (3)$$

$$x \equiv 2 \quad (5)$$
$$y \equiv 3 \quad (5)$$

$$x+y \equiv 3+2 \equiv 5 \equiv 0 \quad (5)$$

Prodotto: stessa cosa!

$$x \equiv 2 \ (5)$$
$$y \equiv 3 \ (5)$$

$$x \cdot y \equiv 2 \cdot 3 \equiv 6 \equiv 1 \ (5)$$

$$2006 \equiv 2 \quad (3)$$
$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 2006^2}}{2006 \cdot 2006} \equiv 2 \cdot 2 \equiv 1 \quad (3)$$

$$2006^3 \equiv 2006^2 \cdot 2006$$
$$\equiv 1 \cdot 2 \equiv 2 \quad (3)$$
$$2006^4 = 2006^3 \cdot 2006 \equiv 2 \cdot 2 \equiv 1 \ (3)$$

$$2006^n \equiv \begin{cases} 2 \ (3) & n \text{ dispari} \\ 1 \ (3) & n \text{ pari} \end{cases}$$

In part.

$$2006^{2006} \equiv 1 \quad (3)$$

— o — o —

Criteri di congruenza

$$72568 \equiv \qquad (3)$$

Somma cifre = 28 non multiplo di 3 $\Rightarrow$ numero non multiplo di 3.

$$1 \equiv 1 \quad (3)$$
$$10 \equiv 1 \quad (3)$$
$$100 \equiv 1 \quad (3)$$
$$1000 \equiv 1 \quad (3)$$

Tutte le potenze di 10 sono $\equiv 1 \quad (3)$

$$72568 = \boxed{8} + \boxed{6} \cdot 10 + \boxed{5} \cdot 10^2 + \boxed{2} \cdot 10^3 + \boxed{7} \cdot 10^4$$

$$\equiv 8 + 6 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 7 \cdot 1$$

$$\equiv 8 + 6 + 5 + 2 + 7 = 28 \equiv 1 \quad (3)$$

Ogni intero è congruo (mod 3) alla somma delle sue cifre

Cong. Ogni numero è congruo (mod 9) alla somma delle cifre

$$1 \equiv 1 \quad (9)$$

$$10 \equiv 1 \quad (9) \quad \Longrightarrow \text{ stessa dim. di prima}$$

$$10^2 \equiv 1 \quad (9)$$

$$\vdots$$

$$10^k \equiv 1 \quad (9)$$

Per 11 : $\quad 7\,5\,6\,9\,4$

$4-9+6-5+7 = 17-14 = 3$ non è div. per 11

$75694 \equiv 3 \quad (11)$

$\overset{}{0} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad 9 \quad \overset{-1}{10}$

$11 \quad 12 \quad 13$

$1 \equiv 1 \quad (11)$

$10 \equiv -1 \quad (11)$

$10^2 \equiv (-1)\cdot(-1) \equiv 1 \quad (11)$

$10^3 \equiv -1 \quad (11)$

$\vdots$

$$10^k \equiv \begin{cases} 1 & k \text{ pari} \\ -1 & k \text{ dispari} \end{cases}$$

$4\cdot 1 + 9\cdot 10 + 6\cdot 10^2 + 5\cdot 10^3 + 7\,10^4 \equiv$

$4 + 9\,(-1) + 6\cdot 1 + 5\,(-1) + 7\cdot 1$

Somma a segni alterni

$95788 \equiv 3 \quad (5)$

basta vedere l'ultima cifra

$957\boxed{88} \equiv 88 \quad (4)$

basta vedere le ultime 2 cifre

$$95788 = 88 + 957 \cdot 100$$

$100 \equiv 0 \quad (4)$

$$\equiv 88 + 957 \cdot 0$$

$$\equiv 88 \quad (4)$$

Trovare le soluzioni intere di

$$x^2 - y^2 = 2006200626 \leftarrow \text{NO SOL.}$$

$$x^2 - y^2 = 2006200625 \leftarrow \text{SI SOL.}$$

Come sono i quadrati modulo 4 ?

Se x è pari $\quad x^2$ è multiplo di 4 $\Rightarrow x^2 \equiv 0 \ (4)$

se x è dispari $\quad x^2$ è $\equiv 1 \ (4)$

$$x \equiv \begin{cases} 1 \longrightarrow x^2 = 1 \cdot 1 \equiv 1 \ (4) \\ 3 \longrightarrow x^2 \equiv 3 \cdot 3 = 9 \equiv 1 \ (4) \end{cases}$$

x dispari $\Rightarrow x = 2k+1$, $x^2 = 4k^2 + 4k + 1$

I quadrati, modulo 4, possono essere solo $\equiv 0$ o $\equiv 1$

$$x^2+y^2 \equiv \begin{cases} 0+0 & & \equiv 0 \\ 0+1 & (1+0) & \equiv 1 \\ 1+1 & & \equiv 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ La somma di quadrati <u>non</u> può essere $\equiv 3 \ (4)$

$$x^2+y^2 = 2006753964\boxed{27}$$

ACHTUNG!

$\equiv 3 \ (4)$ Non può essere

Se fosse stato $\equiv 0,1,2$ poteva essere, ma non era detto.

$x^2 - y^2 = \ldots\ldots\ldots \boxed{26}$ $\equiv 2 \ (4)$ non può essere.

$$x^2 - y^2 \equiv \begin{cases} 0-0 \equiv 0 \\ 1-0 \equiv 1 \\ 0-1 \equiv 3 \\ 1-1 \equiv 0 \end{cases}$$

Non può essere $\equiv 2 \quad (4)$

$x^2 + y^2 = \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\text{Mostro}}030$

Mod 4 è 2, che può essere somma di 2 quadri (1+1)

__Mod 8__

x^2 cosa può essere?

x pari $\quad x^2 \equiv \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$ mod 8

x dispari $\quad x^2 \equiv 1$ mod 8

$$x \equiv \begin{cases} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{cases}$$

Faccio i quadrati e vedo che viene sempre $1 \ (8)$

$$(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 4(k^2+k)+1$$

$$= \underbrace{4\underbrace{k(k+1)}_{\text{uno dei 2 fattori è pari}}}_{\text{multiplo di 8}} + 1$$

x^2+y^2 quando può essere $\equiv 2 \ (4)$. Solo se x e y sono dispari $(1+1)$

Modulo 8 $\quad disp^2 + disp^2 \equiv 1+1 \equiv 2 \quad (8)$

Può funzionare solo se la somma è $\equiv 2 \quad (8)$

$030 \equiv 030 \equiv 6 \quad (8)$

IMPOSSIBILE

$2\underbrace{000\ldots\ldots}_{k \text{ zeri}}\boxed{06}$ può essere un quadrato perfetto?

$\equiv 2 \ (4) \Rightarrow$ NO

$500\ldots\ldots 06$ stessa cosa!

$600\ldots 00\boxed{65}$ $\equiv 1 \ (4)$ forse si può!!!

Mod 3 $\downarrow$ è $6+6+5 \equiv 5 \equiv 2 \ (3)$

Può un quadrato essere 2 (mod 3)

$$x = \begin{cases} 0 \longrightarrow x^2 \equiv 0 \\ 1 \longrightarrow x^2 \equiv 1 \\ 2 \longrightarrow x^2 \equiv 4 \equiv 1 \end{cases} \quad (3) \Rightarrow$$

2 non può essere

$$\text{dispari}^4 \equiv 1 \quad (16)$$

$$x^3 \equiv \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{matrix} \quad (7)$$

$$x^3 \equiv \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{matrix} \quad (9)$$