$\boxed{\text{COMBINATORIA}}$

Titolo nota 24/02/2007

Calcolo combinatorio = contare

$2007 = 3^2 \cdot 223$ Quanti divisori POSITIVI $= 6$

$\boxed{\text{1° PROB}}$

4000 Quanti divisori positivi ?

$$4000 = 4 \cdot 1000 = 4 \cdot 10^3 = 2^2 \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2^5 \cdot 5^3$$

Un divisore sarà del tipo $2^a \cdot 5^b$ $\quad 0 \leq a \leq 5 \rightarrow 6$ poss.

$0 \leq b \leq 3 \rightarrow 4$ "

$6 \cdot 4 = 24$ divisori

Più in generale dato $N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$

I suoi divisori positivi sono $(a_1+1)\cdot(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_k+1)$

20

$\boxed{\text{ANAGRAMMI}}$ PARCO ⇝ quanti anagrammi ?

$5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$

La prima lettera si può scegliere in 5 modi

seconda 4 "

terza 3

4^a 2 "

5^a è obbligata

In generale gli anagrammi di una parola di n lettere sono

$n!$ + NO che sì PO_1RCO_2 PO_2RCO_1

↓ SI se lettere sono tutte diverse NO altrimenti

Nel caso di PORCO sono $\dfrac{5!}{2}$ ← colpa delle 2 "O"!

E per $C\boxed{A}MP\cancel{O}B\boxed{A}SS\cancel{O}$?

$$\frac{10!}{2 \cdot 2 \cdot 2}$$

lettere "O" A S

E per MAMMA ?

$$\frac{5!}{\underset{A}{2} \cdot \underset{M}{3!}} = \frac{5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 10.$$

$\boxed{\text{3° PROBLEMA}}$ Contare i sottoinsiemi

Prendo una classe : 30 persone.

In quanti modi posso scegliere un gruppo che farà una gita ?

$$2^{30}$$

× × × × × .... ×

SI SI SI SI

NO NO NO NO

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{30}$

$\boxed{\text{4° PROBLEMA}}$ Sottoinsiemi con numero fissato di persone

30 persone gruppo da 7

$$\frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \ldots \cdot 24}{7!} \qquad \frac{23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{23 \cdot 22 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= \frac{30!}{7! \cdot 23!} = \binom{30}{7}$$ ← "30 su 7" = numero di modi di scegliere 7 persone su 30

$\boxed{\text{BINOMIALE}}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Torniamo agli anagrammi di MAMMA = modi di scegliere le 2 posizioni su 5 in cui mettere le A

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 10$$

Quante sono le partite possibili in un campionato a 20 squadre? (SOLO ANDATA)

$$\binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} \qquad \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!}$$

Simmetria dei BINOMIALI

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$\boxed{\text{5° PROBLEMA}}$ Scelta su 3 gruppi

30 persone
- ↗ 7 gara a squadre
- → 10 pubblico
- ↘ 13 a casa

In quanti modi?

$$\frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \ldots \cdot 24}{7!} \quad \frac{23 \cdot 22 \cdot \ldots \cdot 14}{10!} \cdot \frac{13 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{13 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

SCELTA SQUADRA

SCELTA SPETTATORI

NULLA

1

$$\frac{30!}{7!\,10!\,13!}$$

TRINOMIALE

Altro modo

$$\binom{30}{7}\binom{23}{10} = \frac{30!}{7!\,\cancel{23!}} \, \frac{\cancel{23!}}{10! \cdot 13!}$$

10 persone $\rightsquigarrow$ sceglierne 4

Però gianni non va se non c'è RITA

2 POSSIBILITÀ

con GIANNI

c'è anche RITA

$\binom{8}{2}$

senza GIANNI

$\binom{9}{4}$

$$\binom{8}{2} + \binom{9}{4}$$

— o — o —

$\boxed{\text{PROBABILITÀ}}$ $= \dfrac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}$

FREGATURA !!!! La prob. di vincere al totocalcio è $\frac{1}{2}$

2 casi possibili: VINCO, PERDO 1 favorevole

Un set ragionevole di casi EQUIPROBABILI sono tutte le possibili colonne, cioè 3^{14}

$$\left.\begin{array}{ccccl} 1 & x & 2 & \leftarrow & 3 \text{ poss.} \quad 3 \cdot \\ 1 & x & 2 & \leftarrow & \quad " \quad\;\; 3 \cdot \\ \vdots & & & \vdots & \quad\;\;\;\;\;\; \vdots \\ 1 & x & 2 & \leftarrow & \quad " \quad\;\; 3 \end{array}\right. = 3^{14}$$

Usando questi come casi equiprobabili la prob. di vincere viene $\frac{1}{3^{14}}$

315 senatori. Tiro a sorte l'ordine in cui parlano. Det. la prob. che 2 senatori dati, SERGIO e GIULIO parlino uno di seguito all'altro.

Denom = modi in cui possono parlare senza restrizioni
$= 315!$

Num = modi di parlare con i 2 vicini

 modi di sceglierne 2 vicine ?

314

$\cdot\ 2$ GIULIO - SERGIO viceversa

$\cdot\ 313!$ L'ordine degli altri

$$p = \frac{314 \cdot 2 \cdot 313!}{315!} = \frac{\cancel{314} \cdot 2 \cdot \cancel{313 \cdot 312 \cdot \ldots}}{315 \cdot \cancel{314} \cdot \cancel{313 \cdot \ldots}} = \frac{2}{315}$$

— o — o —

Altro modo di fare lo STESSO. Calcoliamo la prob. che GIULIO parli subito prima di SERGIO

$$\frac{\cancel{314}}{315} \cdot \frac{1}{\cancel{314}} = \frac{1}{315}$$

prob. che GIULIO non sia ultimo

prob. che SERGIO sia il successivo

$\boxed{\text{6° problema}}$ Colonne totocalcio

1	x	2
8	3	3
5	2	7

In quanti modi posso scegliere tre numeri a, b, c (≥ 0) tali che

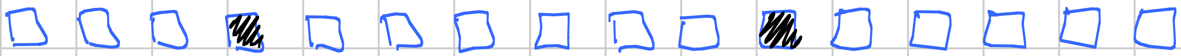
$$a + b + c = 14$$

Nota bene: l'ordine è importante: DICO che

$5 + 2 + 7$ è DIVERSO da $2 + 5 + 7$

Finestra aperta: quante sono le colonne con 5 uno, 2x e 7 due?

$$\frac{14!}{5!\,2!\,7!}$$



Ne coloro 2: restano 3 tronconi la somma dei cui elementi fa 14

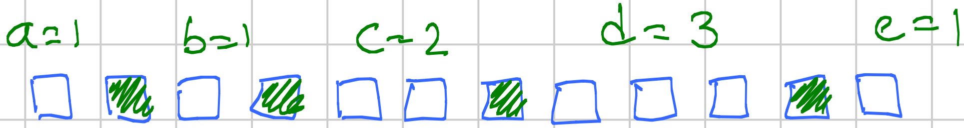
L'idea è che ad ogni modo di colorare 2 caselle su 16 corrisponde UNIVOCAMENTE un modo di scegliere 3 numeri ≥ 0 che sommati danno 14

$$\binom{16}{2} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 8 \cdot 15 = 120.$$

— o — o —

LONTANO DAI VICINI !!!

12 case



Voglio scegliere 4 case evitando COPPIE di vicini

In quanti modi posso farlo?

Il primo in 12 modi. Il secondo DIPENDE

4 casette dividono la fila di 12 in 5 tronconi di lunghezza a, b, c, d, e t.c.

$$a+b+c+d+e = 8$$

$a \geq 0, \quad e \geq 0$ ← laterali possono essere 0

$b \geq 1, \ c \geq 1, \ d \geq 1$ ← centrali

Lasciamo a ed e inalterati e poniamo

$b = \beta + 1, \quad c = \gamma + 1, \quad d = \delta + 1$

Cosa possiamo dire di $a, \beta, \gamma, \delta, e$: 5 numeri ≥ 0

$$a + \beta + \gamma + \delta + e = 5$$

Problema finale: cercare 5 numeri ≥ 0 la cui somma faccia 5. In quanti modi?

Ne coloro 4 $\rightsquigarrow$ ottengo 5 tronconi la somma delle cui lunghezza è 5

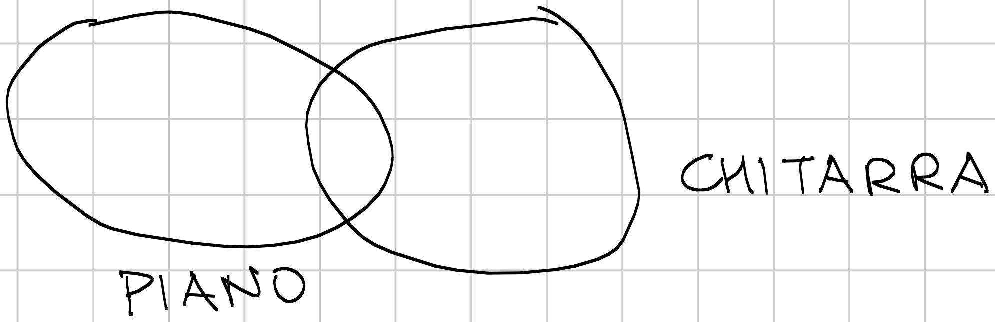
$$\binom{9}{5}$$

— o — o —

PRINCIPIO DI INCLUSIONE - ESCLUSIONE

Classe con 30 studenti. Tutti suonano uno strumento (almeno). 20 piano
16 chitarra. Quanti suonano tutti e 2?

6



30 studenti = PIANO + CHITARRA − (TUTTI E 2)

$$30 = 20 + 16 - x$$

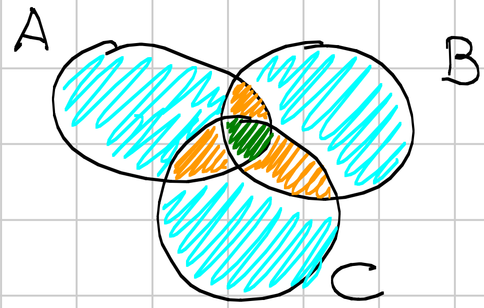
$$\Rightarrow x = 6$$

— o — o —

Se abbiamo 2 insiemi A e B, quanti elementi ha l'unione $A \cup B$? ($|\cdot|$ = numero di elementi)

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$$
$$- |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A|$$
$$+ |A \cap B \cap C|$$



$$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D|$$
$$- |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D|$$
$$+ |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D|$$
$$- |A \cap B \cap C \cap D|$$

Problema Abbiamo 4 buste già indirizzate e 4 lettere. Imbustiamo a caso.

Det. la probabilità che nessuno riceva la sua lettera!

Denominatore = tutti i modi di imbustare = $4!$

Numeratore = tutti i modi di imbustare sbagliando sempre.

$A \rightsquigarrow$ busta B
$\rightsquigarrow$ busta C
$\rightsquigarrow$ busta D

Chiamo M_A il numero dei modi di imbustare che mandano la lettera giusta ad A

M_B il numero di modi che mandano ... a B

M_C, M_D

Devo togliere da tutti i 4! modi possibili

$$\left| M_A \cup M_B \cup M_C \cup M_D \right| =$$

$$= |M_A| + |M_B| + |M_C| + |M_D| \qquad 3! + 3! + 3! + 3! \quad \boxed{24}$$

$$- |M_A \cap M_B| - |M_A \cap M_C| - \dots \qquad - \boxed{12}$$

$$+ |M_A \cap M_B \cap M_C| + |M_A \cap M_B \cap M_D| + \dots \qquad + \boxed{4}$$

$$- |M_A \cap M_B \cap M_C \cap M_D| \qquad - \boxed{1}$$

$28 - 13 = 15$ devo escludere 15 casi!

ne restano 9

$$\text{prob} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8} \qquad \frac{1}{e} \qquad 1 - \frac{1}{e}$$