TEORIA DEI NUMERI

Titolo nota 23/02/2007

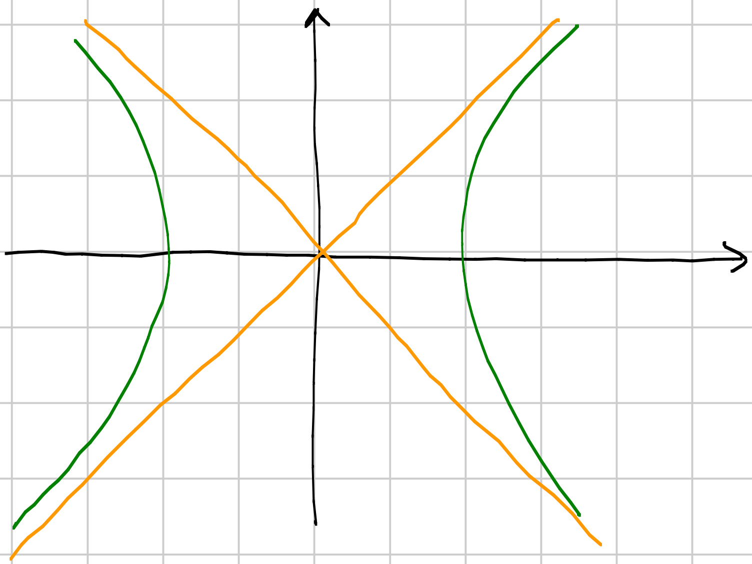
Equazioni con numeri interi (EQUAZIONI DIOFANTEE)

Esempio 1

$$x^2 - y^2 = 2007$$

IPERBOLE

Cerco coppie (x, y) di numeri $\boxed{\text{INTERI}}$ che la risolvono



NON HA NULLA A CHE FARE CON LA DIOFANTEA (VICOLO CIECO 1)

Sto cercando i punti sull'iperbole che hanno

$\boxed{\text{COORDINATE INTERE}}$

$$x^2 - y^2 = 2007 \Rightarrow y^2 = x^2 - 2007$$

$$y = \pm\sqrt{x^2 - 2007}$$

VICOLO CIECO 2

IDEA BUONA: $\boxed{\text{FATTORIZZARE !!!}}$

$$x^2 - y^2 = 2007$$

$$(x+y)(x-y) = 2007 \rightarrow$$

$x+y$ e $x-y$ devono essere DIVISORI di 2007, e questi non sono molti

Scomponiamo

$$\begin{array}{r|l} 2007 & 9 \\ 223 & 223 \\ 1 & \end{array}$$

Quando voglio fattorizzare un certo N, devo provare tutti i primi fino a $\sqrt{N}$

$$2007 = 3^2 \cdot 223$$

Quali sono TUTTI i divisori di 2007?

Un divisore sarà del tipo

$$d = 3^a \cdot 223^b$$

$0 \leq a \leq 2$ ← 3 possibilità

$0 \leq b \leq 1$ ← 2 possibilità

I divisori in tutto sono $3 \cdot 2 = 6$ ← DIVISORI POSITIVI

$\boxed{\text{NI}}$ ← Occhio al segno

Conclusione: i divisori di 2007 sono

± 1	± 223
± 3	$\pm 3 \cdot 223$
± 9	$\pm 9 \cdot 223$

Tornando al problema iniziale ho 12 possibilità per $x+y$ e di conseguenza 12 poss. per $x-y$

$$\begin{cases} x+y = 9\cdot 223 \\ x-y = 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x+y = 3 \\ x-y = 3\cdot 223 \end{cases} \quad \text{oppure} \dots$$

Si risolvono tutti questi sistemi? In generale

$$\begin{cases} x+y = A \\ x-y = B \end{cases}$$

Sommo: $2x = A+B \Rightarrow x = \frac{A+B}{2}$

Sottr: $2y = A-B \Rightarrow y = \frac{A-B}{2}$

Se voglio x e y interi deve succedere che

A e B sono entrambi PARI oppure entrambi DISPARI.

Nel nostro caso in tutti i 12 sistemi A e B sono dispari $\Rightarrow$ si risolvono.

Esempio 2

$$x^2 - y^2 = 20\boxed{06}$$

$$(x+y)(x-y) = 2006$$

Scrivo $2006 = A \cdot B$ in tutti i modi possibili e vado a risolvere il sistema

$$\begin{cases} x+y = A \\ x-y = B \end{cases}$$

A e B entrambi dispari: NO! 2006 sarebbe dispari

A e B entrambi pari: NO! 2006 sarebbe multiplo di 4, che è falso...

NON CI SONO SOLUZIONI INTERE

Esempio 3 $x^2 - y^2 = 2008$

$$(x+y)(x-y) = 2008$$

$$2008 = 2 \cdot 1004$$

$$\begin{cases} x+y = 1004 \\ x-y = 2 \end{cases} \rightsquigarrow \text{SOLUZIONI}$$

Non è l'unica: un'altra arriva da

$$\begin{cases} x+y = 502 \\ x-y = 4 \end{cases}$$

Ci sono varie altre soluzioni!

Esempio 4 $\quad y^3 = x^3 + 35$ SOLUZIONI INTERE

$$y^3 - x^3 = 35$$ FATTORIZZARE !

$$(y-x)(y^2+xy+x^2) = 35$$

FATTORIZZO 35 e procedo come prima

$y - x = \pm 1, \pm 5, \pm 7, \pm 35$ Devo impostare 8 SISTEMI

$$\begin{cases} y-x=1 \\ y^2+xy+x^2=35 \end{cases} \quad \begin{cases} y-x=5 \\ y^2+xy+x^2=7 \end{cases} \quad \begin{cases} y-x=7 \\ \ldots = 5 \end{cases} ; \quad \begin{cases} y-x=35 \\ \ldots = 1 \end{cases}$$

Gli stessi con i segui –

$y = x+1 \rightarrow$ sostituisco nella II e vedo se ho soluz. intere ...

Devo considerare anche i sistemi con i segni meno ? No

L'espressione $x^2 + xy + y^2$ non può essere negativa qualunque siano i numeri REALI x e y.

COMPLETARE I QUADRATI !!!

$$x^2 + xy + y^2 = x^2 + 2x\frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{3}{4}y^2$$

$$\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$$

perchè SOMMA di QUADRATI

$x^2 + 3xy + 2y^2$ è vero che è sempre ≥ 0 ???

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = \underbrace{\boxed{x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2}y + \frac{9}{4}y^2}}_{\parallel} \underbrace{- \frac{9}{4}y^2 + 2y^2}$$

$$\left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 \boxed{-} \frac{1}{4}y^2$$

L'espressione può essere negativa: posso prendere ad esempio $y = 32$ e x in modo che $x + \frac{3}{2}y = 0$

$x = -48$

$\boxed{\text{Esempio 5}}$ Risolvere (sugli interi) l'equazione

$$x^2 + 2y^2 = 4z^2$$ Funziona fattorizzare?

Potrei provare a mettere

$$4z^2 - x^2 = 2y^2 \qquad (2z+x)(2z-x) = 2y^2$$

Si arriva ad un sistema del tipo

$$\begin{cases} 2z + x = A \\ 2z - x = B \end{cases} \quad \text{dove} \quad A \cdot B = 2y^2$$

Per risolverlo, devono essere A e B $\nearrow$ tutti e 2 pari

$\searrow$ ~~tutti e 2 dispari~~

Se y fosse dispari, non potrebbero essere A e B tutti e 2 pari

FATTORIZZARE FUNZIONA se y è dispari.

$$x^2 + 2y^2 = 4z^2$$

x DEVE ESSERE PARI $x = 2a$

$$4a^2 + 2y^2 = 4z^2 \rightsquigarrow 2a^2 + y^2 = 2z^2$$

$\rightsquigarrow$ y deve essere pari $\rightsquigarrow$ $y = 2b$ $\rightsquigarrow$

$$2a^2 + 4b^2 = 2z^2 \rightsquigarrow a^2 + 2b^2 = z^2$$ $\rightsquigarrow$ ORA SI FATTORIZZA

e si arriva a

$$z^2 - a^2 = 2b^2 \rightsquigarrow (z+a)(z-a) = 2b^2$$ DA QUI SI VEDE

che ci sono delle soluzioni OLTRE a quella con tutti zeri

Prendo $b=2$ $\qquad (z+a)(z-a)=8$ $\qquad$ Allora ad esempio

$$\begin{cases} z+a=4 \\ z-a=2 \end{cases} \qquad 2z=6 \qquad \boxed{z=3 \qquad a=1}$$

$$a=1 \qquad b=2 \qquad z=3$$

$$x=2 \qquad y=4 \qquad z=3$$

Ci sono soluzioni oltre a quella banale!!!

L'eq. ha infinite soluzioni.

$\boxed{\text{Esempio 6}}$ $\qquad \boxed{x^3+2y^3=4z^3}$

$\rightsquigarrow$ x pari $\rightsquigarrow$ $x=2a$ $\rightsquigarrow$ $8a^3+2y^3=4z^3$ $\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow$ $4a^3+y^3=2z^3$ $\rightsquigarrow$ y pari $\rightsquigarrow$ $y=2b$ $\rightsquigarrow$

$4a^3 + 8b^3 = 2z^3 \rightsquigarrow 2a^3 + 4b^3 = z^3 \rightsquigarrow z$ pari

$\rightsquigarrow z = 2c \rightsquigarrow 2a^3 + 4b^3 = 8c^3 \rightsquigarrow \boxed{a^3 + 2b^3 = 4c^3}$

DISCESA INFINITA :

Io avevo una soluzione (x, y, z), ho diviso per 2 e ho verificato che $\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}\right)$ è ancora una soluzione INTERA

ora posso continuare e ottenere che

$\left(\frac{x}{4}, \frac{y}{4}, \frac{z}{4}\right)$ è ancora soluz. INTERA

e dopo n passaggi $\left(\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}, \frac{z}{2^n}\right)$ è soluz. INTERA

NO POSSIBILE CHE SIA INTERO PER n MOLTO GRANDE

$\Rightarrow$ NON ci SONO SOLUZIONI $\boxed{N1}$

Il ragionamento NON funziona se $(x, y, z) = (0,0,0)$

che infatti è l'unica SOLUZIONE.

— o — o —

$\boxed{\text{Esempio 7}}$ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{5}$

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{5} \quad ; \quad 5a + 5b = ab$$

$$5(a+b) = ab$$

5 è un primo $\rightsquigarrow$
- ↗ o a è div. per 5
- ↘ o b è " " 5

$\boxed{\text{WLOG}}$ a è divisibile per 5 $\rightsquigarrow$ $a = 5k$

Without Loss Of Generality

$\cancel{5}(5k+b) = \cancel{5}kb$ $\qquad$ $5k+b = kb \rightsquigarrow$ conclusione non ovvia.

Torniamo a $5a+5b = ab$ e proviamo a ricavare b

$ab - 5b = 5a$; $\qquad b(a-5) = 5a$

$$b = \frac{5a}{a-5} = \frac{5a-25+25}{a-5} = \frac{5(a-5)+25}{a-5}$$

$$= 5 + \frac{25}{a-5}$$

Quindi $a-5$ deve essere un DIVISORE di 25

quindi

$$a-5 \begin{cases} \pm 1 \\ \pm 5 \\ \pm 25 \end{cases}$$

$a=6$	$a=4$
$a=10$	$\boxed{\cancel{a=0}}$ NO
$a=30$	$a=-20$

BISOGNA CONTROLLARE che anche i b siano $\neq 0$

In generale, se avessi trovato

$$b = \frac{a^3+27a^2-14a+326}{a-5} = \frac{P(a)}{a-5}$$

Posso fare la divisione tra polinomi

$$P(a) = (a-5)\,Q(a) + \boxed{R(a)}$$

grado < 1 dunque è un numero K

quindi

$$\frac{P(a)}{a-5} = \frac{(a-5)\,Q(a)+k}{a-5} = Q(a) + \boxed{\frac{k}{a-5}}$$

a − 5 deve dividere k.

$$y^3 - x^2 = 23$$