TEORIA DEI NUMERI

Titolo nota 10/03/2007

Progr. olimpico :

1. Algebra
   - → polinomi
   - → disuguaglianze
   - → funzioni
   - → numeri reali e complessi
   - → successioni
2. Combinatoria
   - → conteggio
   - → probabilità
   - → giochi
   - → tutto il resto
3. Geometria
   - → EUCLIDEA
   - → CALCOLO TUTTO
     - → trigonom.
     - → analitica
     - → vettori
4. Teoria dei Numeri → numeri INTERI e razionali

Problema ①

$x^2-y^2=2007$ $\quad (x,y)$ interi

$$(x+y)(x-y)=2007 \qquad 2007=3^2\cdot 223$$

$x+y$ e $x-y$ devono essere divisori di 2007.

Quanti e quali sono i div. di 2007: 6 (positivi)

In generale se $n = p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{a_k}$, un divisore di n sarà

$$d = p_1^{b_1}\cdot p_2^{b_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{b_k}$$

dove $\underset{(a_1+1)\text{ possib.}}{0\le b_1\le a_1}$, $\underset{(a_2+1)\text{ poss.}}{0\le b_2\le a_2}$, ..., $\underset{(a_k+1)\text{ possib.}}{0\le b_k\le a_k}$

Potendo scegliere gli espon. indip. le possib. sono

$\boxed{(a_1+1)(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_k+1)}$ Numero dei div. pos. di n

I div. pos. di 2007 sono $1, 3, 9, 223, 223 \cdot 3, 223 \cdot 9$

$$\begin{cases} x+y = 223 \cdot 9 \\ x-y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y = 223 \cdot 3 \\ x-y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y = 223 \\ x-y = 9 \end{cases}$$

In tutto devo costruire 12 sistemi (anche i div. neg.)

Siamo sicuri che i sistemi abbiano soluz. intere ?

Problema (2) $\begin{cases} x+y = A \\ x-y = B \end{cases}$ Quando ha sol. intere ?

Sommo: $2x = A+B$ $\quad x = \dfrac{A+B}{2}$

Sottraggo: $2y = A-B$ $\quad y = \dfrac{A-B}{2}$

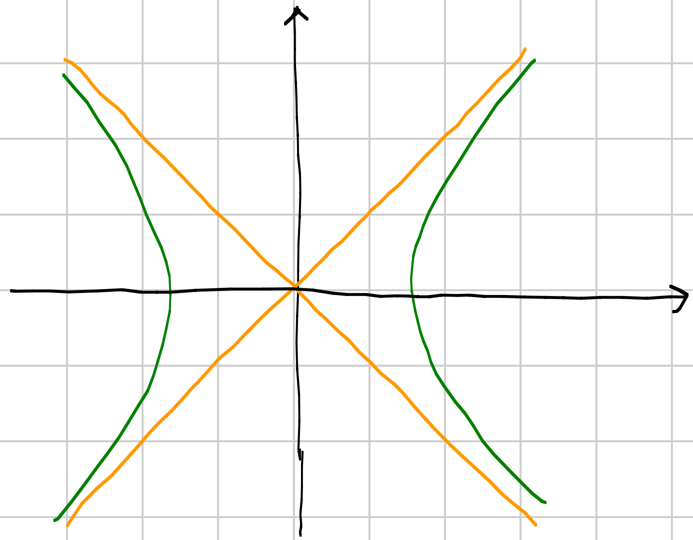
x e y sono interi

$\Updownarrow$

A e B sono tutti 2 pari o tutti e 2 dispari

Nei 12 sistemi del pb. (1) A e B sono sempre dispari

$x^2 - y^2 = 2007$



Sull'iperbole ci sono 12 punti a coord. intere, 3 in ogni quadrante

Motivo: SIMMETRIA !!!

Se (x, y) è una sol. allora $(\pm x, \pm y)$ sono ancora soluz.

Problema 3 $\quad x^2 - y^2 = 2006 \quad$ NON HA SOLUZ. INTERE

perchè questo è pari ma non divisibile per 4.

$$\begin{cases} x+y = A \\ x-y = B \end{cases} \quad \text{dove } A \cdot B = 2006$$

A e B dispari: NO

A e B pari: NO, perchè 2006 sarebbe divisibile per 4.

In generale $x^2-y^2=k$ ha sempre soluzioni a meno che k sia pari e non divisibile per 4

Congruenze: $x = 0, 1, 2, 3 \pmod 4$

$x^2 = 0, 1, 0, 1$

I quadrati modulo 4 sono solo 0 e 1.

$$\begin{array}{ccc} x^2 - y^2 & = & \\ 0 - 0 & = & 0 \\ 1 - 0 & = & 1 \\ 0 - 1 & = & 3 \\ 1 - 1 & = & 0 \end{array}$$

In nessun caso può fare 2.

Siano x e y pari $x=2k$, $y=2h$ $x^2-y^2 = 4(k^2-h^2)$

DIV. per 4

x e y dispari $x=2k+1$, $y=2h+1$

$$x^2 - y^2 = 4k^2 + 4k + \cancel{1} - 4h^2 - 4h - \cancel{1} = 4(\quad)$$

DIV PER 4

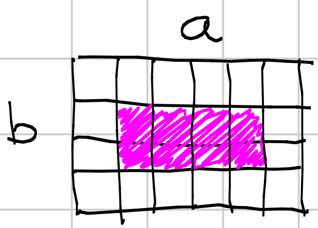
Se x e y sono uno pari e uno dispari

$x^2 - y^2$ viene DISPARI

— o — o —

MORALE DELLA FAVOLA: $\boxed{\text{FATTORIZZARE !!!}}$

Problema (4)



Per quali valori di a, b l'area interna è = all'area bianca?

$$ab = \text{Area grande} = 2\ \text{Area piccola} = 2(a-2)(b-2)$$

$$ab = 2(a-2)(b-2), \qquad ab = 2ab - 4a - 4b + 8$$

$$ab - 4a - 4b + 8 = 0$$

RICAVARE !!!!

$$a(b-4) = 4b - 8 \qquad a = \frac{4b-8}{b-4} = \frac{4b-16+8}{b-4}$$

$$= 4 + \frac{8}{b-4}$$

Ora $b-4$ deve essere un divisore di 8

$b-4=$	1	$b=5$	$a=12$	
	2	$b=6$	$a=8$	
	4	$b=8$	$a=6$	
	8	$b=12$	$a=5$	$\leftarrow$ SIMMETRIA !!!
	-1	$\cancel{b=3}$	$\cancel{a=-4}$	
	-2	$\cancel{b=2}$	$\cancel{a=0}$	
	-4	$\cancel{b=0}$		
	-8	$\cancel{b=-4}$		

Problema 5

$$a = \frac{b^2+3b+1}{b-4}$$ Soluzioni intere

Div. tra polinomi

$$\begin{array}{rrr|l}
b^2 & +3b & +1 & b-4 \\ \cline{4-4}
-b^2 & +4b & & b+7 \\ \cline{1-3}
 & 7b & +1 & \\
 & -7b & +28 & \\ \cline{2-3}
 & // & 29 &
\end{array}$$

$$b^2+3b+1 = (b-4)(b+7) + 29$$

dividendo per $b-4$

$$\frac{b^2+3b+1}{b-4} = b+7 + \frac{29}{b-4}$$

$\nearrow$ $b-4$ deve essere $\pm 1, \pm 29$

$\Downarrow$

4 soluzioni intere

Problema 6

$$a = \frac{b+3}{2b+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2b+6}{2b+1}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2b+1+5}{2b+1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{2b+1}\right)$$

$$2b-1 = \pm 1, \pm 5$$

ricavo b e sostituisco

— o —

Problema 7

Trovare il M.C.D. tra tutti i numeri della forma

$$3n^5 + 5n^3 - 8n$$

$n = 0 \to 0$

$n = 1 \to 0$

$n = 2 \to 120$

$n = 3 \to 840$

Sembrano tutti divisibili per 120. Come lo dimostro?

$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Devo dim. che è divisibile per 3, 5, 8

$$n(3n^4+5n^2-8) = n(n^2-1)(3n^2+8)$$

$$= \underbrace{n(n+1)(n-1)}_{\text{Qui c'è almeno un 3.}}(3n^2+8)$$

Per l'8: n dispari

$n-1 \quad n \quad n+1$

PARI e uno dei 2 è div. anche per 4

$\Downarrow$

il prod. è div. per 8

n pari: n è pari

$3n^2+8$ è div. per 4

$\Downarrow$

Divisib. per 8

Per il 5 uso le congruenze: $n \equiv 0, 1, 4$ uno dei primi 3 fattori è div. per 5

$n \equiv 2 \pmod 5$ $\quad 3n^2+8 \equiv 12+8 \equiv 20 \equiv 0 \pmod 5$

$n \equiv 3 \pmod 5$ $\quad$ 〃 〃 〃 〃

Guardo l'ultima cifra

— o —

$$3n^5 + 5n^3 - 8n \equiv 3n^5 - 8n \equiv 3n^5 - 3n$$

$$\equiv 3(n^5 - n) \equiv 0 \pmod 5$$

PICCOLO TEOREMA DI FERMAT

$\boxed{\text{P.T.F.}}$ Se p è primo, allora $a^p \equiv a \pmod p$ per ogni a

Problema ⑧

$100 + n^3 = k_n$

Quanto può valere il M.C.D. fra k_n e k_{n+1} ?

100	
101	1
104	1
109	1
116	1
125	1
136	

È sempre 1 ? NO !!!

$d \mid n^2+100$

$d \mid n^2+2n+101$

"$\mid$" vuol dire DIVIDE

$d \mid 4n^2+400$

$\Rightarrow d \mid 2n+1 \quad \Rightarrow d \mid 4n^2+4n+1$

sottraggo

$d \mid 4n+2 \qquad d \mid 4n-399$

sottraggo

$d \mid 401$ (è primo)

Ho dim. che d può essere 1 oppure 401

Può essere $d = 401$? Posso fare in modo che $2n+1 = 401$,
cioè $n = 200$

$$K_{200} = 100 + 200^2 = 100 + 4 \cdot 100^2 = 100\,(1+400) = 100 \cdot 401$$

$$K_{201} = K_{200} + \underbrace{(2n+1)}_{\substack{\text{sapevamo che} \\ \text{la diff. è} \\ 2n+1 \,=\, 401}} = K_{200} + 401 \Rightarrow \text{div. per } 401,$$

Problema 9 $\qquad 3^a - 2^b = 1 \qquad$ Sol. intere

Modulo 3 $\qquad -2^b \equiv 1 \pmod 3$

2^b è $\quad -1, 1, -1, 1 \pmod 3$

b disp. $\qquad$ b pari

se b è pari $\quad -2^b$ è $-1 \mod 3$

" dispari $\quad -2^b$ è $1 \mod 3$

Quindi $b = 2k+1$ $\qquad 3^a = 2^b + 1$

potenza di 3

$$3^a = 2^{2k+1} + 1$$

$$= \underset{\underset{3}{\shortparallel}}{(2+1)}\left(2^{2k} - 2^{2k-1} + \dots + 1\right)$$

Quando è una potenza di 3

$\boxed{\text{Modulo } 4}$

$$3^a - 2^b = 1$$

b=0 e b=1 si fanno a parte "A MANO"

$$(-1)^a \equiv 1 \pmod 4$$

$\Rightarrow$ a deve essere pari $\Rightarrow a = 2k$

$$3^{2k} - 2^b = 1 \qquad 3^{2k} - 1 = 2^b$$

$$\underbrace{(3^k+1)}_{=4}\,\underbrace{(3^k-1)}_{=2} = 2^b$$

DEVONO ESSERE ENTRAMBI POTENZE DI 2.

Essendo la loro diff. = 2 si ha che sono 4 e 2

$k=1 \leftarrow$

$a=2$

$3^2 - 2^b = 1$

$b = 3$

$$2^a - 3^b = 1 \qquad \text{Modulo } 3 \qquad (-1)^a \equiv 1 \pmod 3$$

QUI occorre fare b=0 a mano!!!!

$\Rightarrow$ a pari $\Rightarrow a = 2k$

$$2^{2k} - 3^b = 1 \qquad\qquad 2^{2k} - 1 = 3^b$$

$$\overset{3}{(2^k+1)}\,\overset{1}{(2^k-1)} = 3^b$$

potenze di 3 la cui differenza è 2, quindi 3 e 1

$$k=1 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a=2 \\ b=1 \end{array}}$$

— o —

Problema..., Esistono 2007 interi tali che la media aritmetica di ogni sottoinsieme sia un intero? DISTINTI

Se li prendo tutti multipli di 2007! ce la faccio

SENZA FATTORI PRIMI IN COMUNE

$\boxed{\text{IDEA}}$ Li prendo: * tutti dispari (a 2 a 2 ok)

* tutti $\equiv 1 \pmod 3$ (a 3 a 3 ok)

* tutti $\equiv 1 \pmod 4$ 4 4

⋮

* tutti $\equiv 1 \pmod{2007}$

$a_1 = 2007! + 1$ ← congruo a 1 mod 2, 3, 4, ..., 2007

$a_2 = 2 \cdot 2007! + 1$ ← " "

⋮

$a_{2007} = 2007 \cdot 2007! + 1$ ← "

Saranno primi tra di loro? Supponiamo che 2 di questi abbiano in comune un fattore primo p.

$p \mid k \cdot 2007! + 1$

$p \mid h \cdot 2007! + 1$

Sottraggo $p \mid (k - h)\, 2007!$

al max 2007

Quindi $p < 2007$

Assurdo perché tutti i numeri della lista sono $\equiv 1$ modulo i primi + piccoli di 2007.

Posso trovare infiniti interi con media sottoinsiemi (finiti) INTERA ?

NON SI PUÒ.

TUTTI DEVONO ESSERE DISPARI (congrui tra di loro mod 2)

Devono essere tutti congrui mod 3. Perché ?

Consideriamo le possibili congruenze mod 3: 0, 1, 2

Ci sono almeno 2 numeri congrui mod 3 a_1, a_2

Ogni altro numero deve essere congruo ai 2 dati altrimenti ho un terzetto con somma che non è multipla di 3.

Modulo un qualunque k devono essere tutti congrui tra di loro.

$0, 1, 2, \dots, k-1$

Ce ne sono almeno $(k-1)$ nella stessa classe

$a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$, ? deve essere congruo ai precedenti

k gabbie.
Quanti piccioni per averne almeno ℓ nella stessa gabbia?
$k(\ell-1)+1$

Conclusione: se 2 numeri sono congrui modulo tutto, allora sono congrui fra di loro.

— o — o —

Problema Pre IMO

Trovare (se esistono) 2007 interi distinti e coprimi t.c.

* la media Aritm. di ogni sottoinsieme è intera
* " Geom. " " "

Basta prendere i numeri di prima elevati alla 2007!

Se $a \equiv 1 \pmod{k}$ con $k \leq 2007$

$a^{\text{qualsiasi cosa}} \equiv 1 \pmod{k}$