# CESENATICO FAKE EDITION - V.2

Titolo nota 04/04/2007

1) $p(x) = x^{2006} + 2x^{2005} + 3x^{2004} + \dots + 2006x + 2007$

$\alpha$ radice di p

$$\alpha^{2006} + 2\alpha^{2005} + \dots + 2006\alpha + 2007 = 0 \Leftarrow$$

$\alpha \neq 0 \Rightarrow$ divido per $\alpha^{2006}$

$$1 + 2\frac{1}{\alpha} + 3\frac{1}{\alpha^2} + \dots + 2006\frac{1}{\alpha^{2005}} + 2007\frac{1}{\alpha^{2006}} = 0 \quad (*)$$

$$q(x) := 1 + 2x + 3x^2 + \dots + 2006x^{2005} + 2007x^{2006}$$

$(*) \Rightarrow \frac{1}{\alpha}$ è radice di $q(x)$.

Resta da dim. che le radici di q (tutte!) sono reciproci di radici di p.

$\beta$ radice di q $\quad p\left(\frac{1}{\beta}\right) = 0$

$\longrightarrow 1+2\beta+3\beta^2+\dots+2006\beta^{2005}+2007\beta^{2006}=0$

$\beta\neq 0 \Longrightarrow$ divido per $\beta^{2006}$

$$P\left(\frac{1}{\beta}\right)=0$$

2) $2,2,2$

$3,3,3$

$$\boxed{\cancel{a},b,c \longrightarrow b+c-1,b,c}$$

$2,2,\cancel{2} \longrightarrow 2,\cancel{2},3 \longrightarrow 2,4,\cancel{3} \longrightarrow 2,\cancel{4},5 \longrightarrow 2,6,5 \longrightarrow$

~~e così via....~~

"Per induzione si dimostra che $\forall n\geq 2$ si può ottenere la terna

$2,n,n+1$ oppure $2,n+1,n$ "

$\Rightarrow$ se partiamo da 2, 2, 2 possiamo ottenere $\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

## Induzione

$P_n$ che "dipende" da un $n \in \mathbb{N}$

Supponiamo che

- $P_0$ è vero
- se $P_n$ è vero $\Rightarrow$ $P_{n+1}$ è vero

2, 2, 3

- $P_2$ è vero

Allora $P_n$ è vero $\forall n \in \mathbb{N}$.

$(P_n)$ $2, \cancel{n}, n+1$ oppure $2, n+1, \cancel{n}$

$\downarrow$ $\downarrow$

$(P_{n+1})$ $2, n+2, n+1$ oppure $2, n+1, n+2$

$P_n$ è vero $\forall n \geq 2$

$3, 3, 3$ <u>possiamo ottenere tutti i dispari</u>

Per induzione, possiamo ottenere le terne

$3, 2K+1, 2K+3$ oppure $3, 2K+3, 2K+1$ $\forall K \in \mathbb{N}$

$3, 3, 5$ $\forall K \geq 1$

**Non** possiamo ottenere i numeri pari.

$a, b, c$ tutti dispari

$\Rightarrow$ al passo successivo ho ancora tutti numeri dispari

$3, 3, 3 \longrightarrow$ tutti dispari

$\square$

3) $\underbrace{\frac{1}{x+2}}_{A} + \underbrace{\frac{1}{y+2}}_{B} = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{z+2}}_{>0} > \frac{1}{2}$

$A+B > \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{A > \frac{1}{4} \text{ oppure } B > \frac{1}{4}}$

Se $A \leq \frac{1}{4}$ e $B \leq \frac{1}{4} \Rightarrow A+B \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ↯

a) $A > \frac{1}{4}$

$\frac{1}{x+2} > \frac{1}{4} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x < 2 \\ x \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0$ oppure $x = 1$

• $x = 0$ $\quad \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{y+2} = \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{z+2} \Rightarrow y = z$

$\boxed{(0, y, y)}$ ok $\quad y \in \mathbb{N}$

- $x = 1$ $\quad \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{y+2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{z+2}$

$$0 < \underline{\frac{1}{y+2}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{z+2} = \underline{\frac{z+8}{6(z+2)}} > 0$$

$$\Rightarrow y+2 = \frac{6(z+2)}{z+8} = 6\,\frac{\widetilde{z+2}+\widetilde{8}-8}{z+8} = 6 - \frac{36}{z+8}$$

$$\Rightarrow \underset{\in \mathbb{N}}{y} = 4 - \underbrace{\frac{36}{z+8}}_{>0} \Rightarrow \frac{36}{z+8} \in \mathbb{N} \Rightarrow \cancel{0}, 1, 2, 3, 4$$

- $\dfrac{36}{z+8} = 1 \Rightarrow y = 3, \; z = 28$
- $= 2 \Rightarrow$ $\quad 2 \quad 10$
- $3$ $\quad 1 \quad 4$
- $4$ $\quad 0 \quad 1$

$(1, 3, 28)$ ✓

$(1, 2, 10)$ ✓

$(1, 1, 4)$ ✓

$(1, 0, 1)$ ✓

$(0, y, y)$ ✓

b) $B > \frac{1}{4} \rightsquigarrow y < 2$

3, 1, 28

2, 1, 10

1, 1, 4

0, 1, 1

x, 0, x

✓

4) $$(x-16)\,p(2x) = 16(x-1)\,p(x)$$

$p(x) = 0$ va bene ✓

$p(x) \neq 0 \implies p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$\boxed{a_m \neq 0}$ $\qquad m \geq 0$

$$\longrightarrow \quad (x-16)\left(a_m 2^m x^m + a_{m-1} 2^{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 2x + a_0\right) =$$

$$= 16(x-1)\left(a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0\right)$$

$$\cancel{a_m} 2^m = 16 \cancel{a_m} \implies m = 4$$

Se $p(x)$ soddisfa l'equazione, $p(x) \neq 0$ $\Big\} \implies \deg p(x) = 4$.

$$(x-16)\,p(2x) = 16(x-1)\,p(x)$$

$x=1 \longrightarrow -15\,p(2) = 0 \Rightarrow p(2)=0$

$x=2 \longrightarrow -14\,p(4) = 0 \Rightarrow p(4)=0$

$x=4 \longrightarrow p(8)=0$

$x=8 \longrightarrow p(16)=0$

$x=16 \longrightarrow 0\cdot p(32) = 16\cdot 15\,p(16) = 0$

**Ruffini:**

$\alpha$ radice di $p$

$\Longleftrightarrow p(x) = (x-\alpha)\,q(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \deg p = 4 \\ 2, 4, 8, 16 \text{ radici di } p \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\longrightarrow (x-2)(x-4)(x-8)(x-16)$ divide $p(x)$

deg 4

$\longrightarrow p(x) = r(x)\,\underbrace{(x-2)(x-4)(x-8)(x-16)} \Rightarrow \deg r = 0$

$\deg r = 0 \implies r$ è costante $K$

$\implies p(x) = K(x-2)(x-4)(x-8)(x-16) \qquad K \in \mathbb{R}$

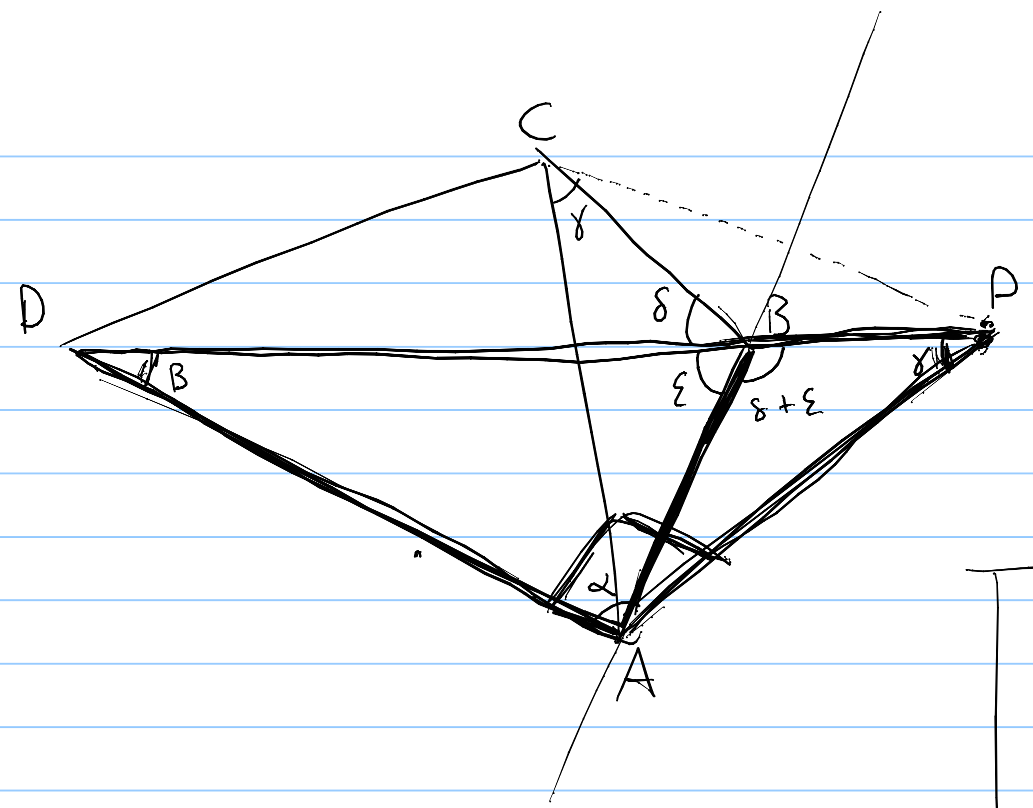
$= 0 \qquad p \equiv 0$

$p$ soddisfa l'eq. $\implies p$ deve essere di questa forma

$\Longleftarrow$ ?

"Si verifica facilmente che . . . "

5)




hp $\alpha < 90^\circ$

$\beta + \gamma = 90^\circ$

$\delta + 2\varepsilon = 180^\circ$

th

$(DB+BC)^2 = AD^2 + AC^2$

ADP

$A\hat{D}P = \beta$ $\qquad \beta + \gamma = 90^\circ$

$A\hat{P}D = \gamma$

$\Rightarrow D\hat{A}P = 90^\circ$

ABC congruente ABP

$A\hat{B}P = \delta + \varepsilon \qquad D\hat{B}P = \varepsilon + \delta + \varepsilon = \delta + 2\varepsilon = 180^\circ$

$\Rightarrow$ D, B, P sono allineati

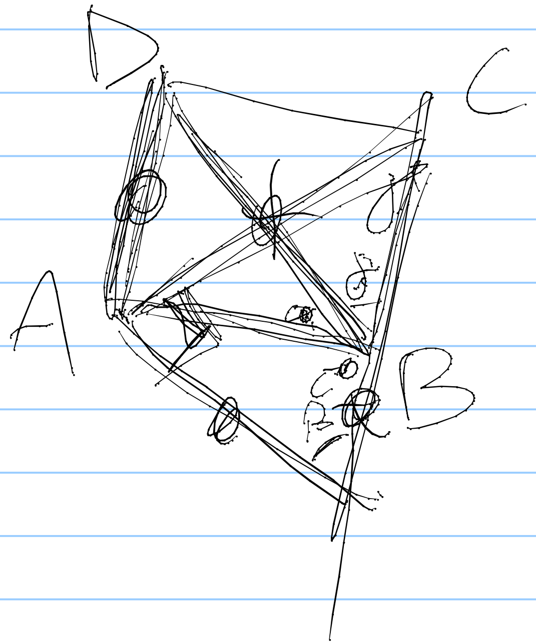
$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} DP &= DB + BP \\ &= DB + BC \end{aligned}}$$

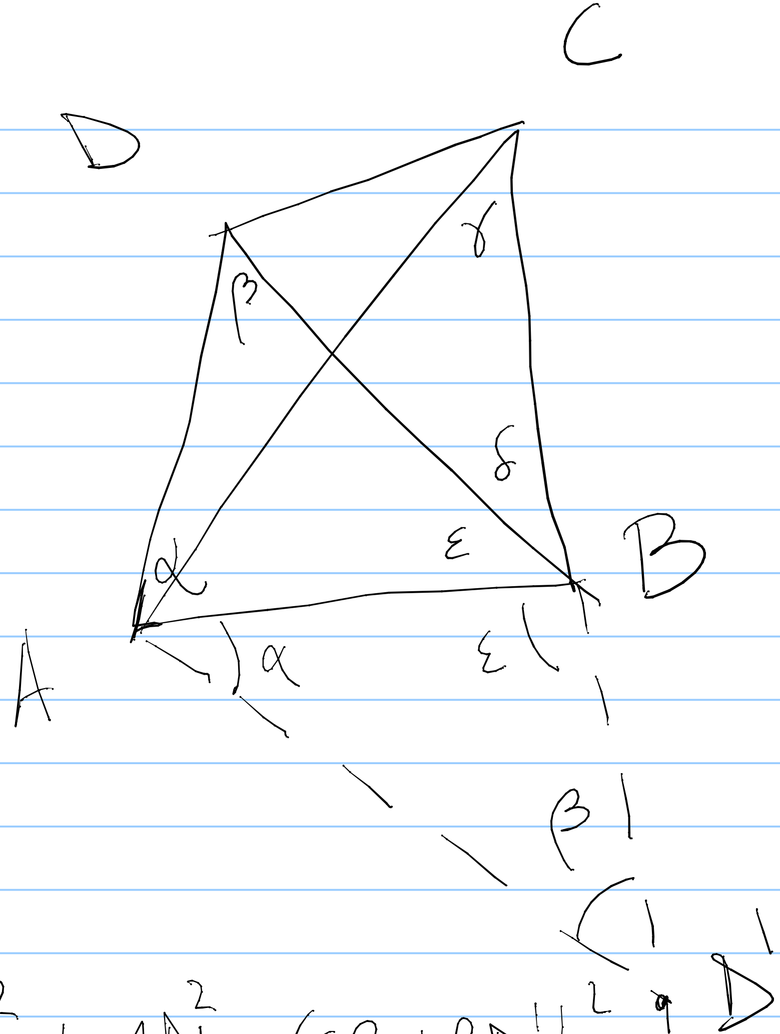
<u>Th</u> $(DB + BC)^2 = AD^2 + AC^2 \iff DP^2 = AD^2 + AC^2$

ADP rettangolo $\Longrightarrow$ $\underline{DP}^2 = AD^2 + AP^2$

$$= AD^2 + AC^2$$

Soluzione alternativa (Di Piazza & c.)






$\gamma + \beta = \frac{\pi}{2}$

$\delta + 2\varepsilon = \pi$

$D'$ in $BC$

t.c. $\widehat{CAD'} = \frac{\pi}{2}$

$A\hat{B}D' \cong A\hat{B}D$

$AD = AD'$

$BD = BD'$

$AC^2 + AD'^2 = (CB + BD')^2$

$AC^2 + AD^2 = (CB + BD)^2$