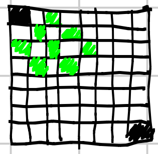
NAPOLI 2011 - PARTE 1

↗ Invarianti semplici
→ Gioco semplice

$\boxed{\text{INVARIANTI SEMPLICI}}$ Scacchiera 8×8 con 2 caselle eliminate.



Problema: ricoprire ciò che rimane (62 caselle) con 31 mattonelle 2×1

Non ci si riesce. Perchè?

Se le caselle le coloro nel solito modo scopro che ne ho eliminate 2 verdi, quindi sono rimaste

32 bianche

30 verdi

Ogni mattonella 2×1 copre 1B e 1V, quindi no abbastanza verdi.

Invariante: differenza bianche − verdi

Inizio: 2 alla fine non può essere 0.

Se toglievo 2 vertici dello stesso lato, levavo 1V e 1B, quindi restavano $31+31$. Questo dice che FORSE si può fare, ma per dimostrarlo bisogna dire come.

Esercizio: si può sempre fare quando tolgo $1+1$.

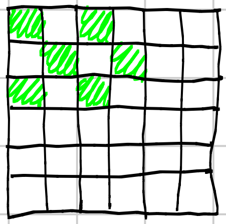
<u>Esempio 2</u> Quali quadrati $N\times N$ posso ricoprire con mattonelle 4×1?

$\boxed{\text{FATTO 1}}$ Impossibile se N è dispari

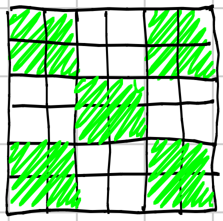
$\boxed{\text{FATTO 2}}$ Possibile e facile se N è multiplo di 4 ($N\equiv 0\ (4)$)

Restano da fare gli $N\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$, cioè PARI ma non div. per 4

Es: $n = 6, 10, 14, 18$.



Coloro a scacchiera
Ogni mattonella: $2B + 2V$
Bianche: 18
Verdi: 18
Nulla di impossibile, per ora...



Ogni mattonella: $2B + 2V$
Bianche: 16
Verdi: 20
Impossibile !!

<u>Esempio 3</u> Rettangolo $M \times N$

[Fatto 1] Impossibile se M <u>ed</u> N dispari (area dispari)
[Fatto 2] Impossibile se area non multipla di 4.
[Fatto 3] Possibile se M o N sono multipli di 4 (vado in fila)
[Fatto 4] Resta il caso in cui M ed N sono pari, ma non multipli di 4. Colorando a blocchi 2×2 ottengo un numero diverso di B e V (verificarlo), quindi è impossibile.

<u>Oss.</u> Quali rettangoli $M \times N$ si pavimentano con 
è MOLTO difficile.
Più facile: quali quadrati $N \times N$ si fanno

Esempio 4 A e B partono da 2011. Ad ogni mossa posso togliere 1 oppure togliere 2.
Vince chi scrive 0.

Domanda: chi vince? come deve giocare per vincere?

$\boxed{\text{Fatto 1}}$ Il gioco finisce entro 2011 mosse

Tabella dei numeri vincenti e perdenti

Vinco se trovo	Perdo se trovo
1	3
2	6
4	
5	

$3 \nearrow 1$, $3 \searrow 2$

$4 \to 3$ ok

$5 \to 3$

$6 \nearrow 5$ AHI

$6 \searrow 4$ AHI

Proprietà dei numeri vincenti: da questi devo poter andare verso un numero perdente

Proprietà dei numeri perdenti: qualsiasi cosa faccio cado su un vincente.

Per questo gioco:

Perdenti = multipli di 3

Vincenti = non multipli di 3.

Esempio 5 Come prima, ma posso fare −1 oppure −4

Vinco se trovo	Perdo se trovo
1	2
3	5 (→ 4, 1)
4	7 (→ 6, 3)
6 (→ 5)	10 (→ 9, 6)
8 (→ 7)	
9 (→ 5)	

Si dimostra abbastanza bene che

Vinco se trovo $5k+1$, $5k+3$, $5k+4$

Perdo se trovo $5k$, $5k+2$.

Se trovo 2011 vinco giocando 2010 oppure 2007.

<u>Esempio 6</u>  20110 quadratini

Mossa: colorare 2 quadratini consecutivi

Perde chi non può più giocare.

Suddividere in 2 classi le situazioni è difficile

Tecnica: incanalare la partita.

Tecnica del copione: copiare la mossa dell'avversario

A inizia giocando le 2 caselle centrali 

Da qui in poi A "copia B", giocando sempre simmetricamente.

La mossa iniziale è l'unica che non si può copiare.

<u>Esempio 7</u> Stessa cosa se si gioca su un quadrato pari × pari