Stage di TERNI (24/01/2011)

Titolo nota 24/01/2011

ARITMETICA - I

"p è primo se è divisibile solo per 1 e se stesso."

p è primo se ogni volta che p divide ab allora

- p divide a oppure
- p divide b

⇓ Fattorizzazione unica

2011 primo

Oss: devo verificare che p non divide 2011 per ogni p primo $\leq \sqrt{2011}$

(!) se a^2 è pari, allora a^2 è mult. di 4

2 divide $a \cdot a = a^2 \Rightarrow$ 2 divide $a \Rightarrow a = 2b$

$\Rightarrow a^2 = 4b^2$

$\Longrightarrow$ n è un quadrato se e solo se $n = p_1^{2a_1} \cdot p_2^{2a_2} \cdot \ldots p_k^{2a_k}$

Es: Trovare tutti gli n interi $0 \leq n \leq 2011$ tali che n è un quadrato e le sue ultime 2 cifre sono 26.

Zero!

Variante: " " " sono 27.

Trovare x, y interi tali che

$$x^2 + 100y = 26$$

Trovare x, y interi tali che $\qquad n^2 = 4k+2$

$$x^2 + 4y = 2 \implies x = 2z$$

$$\cancel{4}z^2 + \cancel{4}y = \cancel{2} \qquad 2(z^2+y) = 1 \qquad \text{Impossibile}$$

2 2

Se divido un $\square$ per 4 posso ottenere:

- 0 se $\square = 4k^2$
- 1 o 3 boh
- 2 no!! $\quad n^2 : 4 = k \quad r = 2$

$n^2 = 4k+2$ non si può!!

Es: $27^3 + 39^3$ è divisibile per 11?

$3^3(9^3 + 13^3)$ $\qquad a^3 + b^3 = (a+b)$ (non mi ricordo)

$a^2 - ab + b^2$

$(27+39)$ (non mi ricordo)

$66 \cdot NMR \implies$ Sì è mult. di 11

Es: Trovare gli x, y interi tali che

$$x^2 - y^2 = 2011$$

$$(x+y)(x-y) = 2011$$

$1 \cdot 2011$

$2011 \cdot 1$

$-1(-2011)$

$-2011(-1)$

$$(x,y) \to (x,y),\ (-x,-y),\ (-x,y),\ (x,-y)$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2011 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=2011 \\ x-y=1 \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2011 \end{cases} \qquad \begin{aligned} 2x &= 2012 \\ 2y &= -2010 \end{aligned} \to \begin{aligned} x &= 1006 \\ y &= -1005 \end{aligned}$$

$$(1006, -1005)\ (-1006, 1005)\ (1006, 1005)$$
$$(-1006, -1005).$$

<u>Es 2</u>: $x^2 - y^2 = 2 \dashrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=1 \end{cases} \begin{cases} 2x=3 \\ 2y=1 \end{cases}$ impossibile

$$x^2 - y^2 = 74 \qquad (x+y)(x-y) = 2 \cdot 37$$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=37 \end{cases} \begin{cases} 2x=39 \\ 2y=-35 \end{cases} \text{ impossibile}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=74 \end{cases} \begin{cases} 2x=75 \\ 2y=-73 \end{cases} \text{ impossibile}$$

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases}$$

quando si risolve con a, b interi?

$$\to \begin{cases} 2x=a+b \\ 2y=a-b \end{cases}$$

a, b della stessa parità.

Quando $x^2 - y^2 = n$ ha soluzioni intere?

a, b entrambi pari
o
entrambi dispari e $ab = n$

1) a, b pari $\Rightarrow$ $n = ab =$ pari $\cdot$ pari $=$ multiplo di 4

2) a, b dispari $\Rightarrow$ $n = ab =$ disp $\cdot$ disp $=$ dispari.

Es: $ab - 2a + b = 0$

$(a+1)(b-2) = -2$

$b(a+1) - 2(a+1) = -2$

$(a+1)(b-2) = -2$

$\Downarrow$

$\begin{cases} a+1 = -2 \\ b-2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a+1 = 2 \\ b-2 = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} a+1 = 1 \\ b-2 = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} a+1 = -1 \\ b-2 = 2 \end{cases}$

Es: $x^2 + 2xy + 2y^2 - 2y + 1 = 0$

$\underbrace{x^2 + 2xy + y^2} + \underbrace{y^2 - 2y + 1} = 0$

$(x+y)^2 + (y-1)^2 = 0$

$\square + \square = 0$

$\Updownarrow$

$\square = \square = 0$

$\begin{cases} x+y = 0 \\ y-1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -y \\ y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

ESERCIZI: Trovare m, n interi tali che:

1) $\frac{1}{5+m} + \frac{1}{5-n} = \frac{1}{10}$

2) $mn - 7m + 2n = 5$

3) $m^4 - n^4 = 6$ 4) $m^4 - n^4 = 8$ 5) $m^4 - n^4 = 80$

6) $m^2 + 3n^2 = 1, 2, 3, 113$

7) $m^2n^2 - 3m^2 - 4n^2 + 1 = 0$

8) Per quali m $\frac{5m^2 - 2m + 1}{m+3}$ è intero? *

9) Per quali n $n^4 + 4$ è primo?

Tracce: 1) $5 - n + 5 + m = \frac{(5-n)(5+m)}{10}$

$100 - 10n + 10m = 25 - 5n + 5m - nm$

$nm - 5n + 5m + 75 = 0$

$(n+5)(m-5) = -100$

2) $mn - 7m + 2n = 5$

$(m-2)(n-7) = -9$

3) $m^4 - n^4 = 6$

$(m^2 + n^2)(m+n)(m-n) = 6$

$6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$ o $6 = 1 \cdot 1 \cdot 6$

(con i segni). $m^2 + n^2 \geq 0$

e m^2+n^2 può fare solo 1, 2 ma allora

$m=n=1$ o $m=-n=1$ oppure m o $n=0$.

4) $m^4-n^4=8$ $\qquad (m^2+n^2)(m+n)(m-n)=8$

se $m,n>0$, $m>n$, allora $m^2+n^2>m+n>m-n$

$\Rightarrow 4, 2, 1$ impossibile

5) $m^4-n^4=80$ $\qquad (m^2+n^2)(m+n)(m-n)=80$

$m,n>0$, $m>n$, $\Rightarrow m^2+n^2>m+n>m-n$

$\Rightarrow \quad 2\cdot 5 \quad 2\cdot 2 \quad 2$

$\quad 10 \quad 4 \quad 2$

$\Rightarrow m=3,\ n=1$

$m=-3,\ n=-1$

$m=3,\ n=-1$

$m=-3,\ n=1$

6) $m^2+3n^2=1$: i quadrati sono positivi

$\Rightarrow m^2\le 1,\ 3n^2\le 1$

$\Rightarrow m=\pm 1 \quad n=0$ ok

$m^2+3n^2=2$: i quadrati sono positivi

$\Rightarrow m^2\le 2 \quad 3n^2\le 2$

$m=\pm 1, 0,\ n=0$ <u>no!</u>

$m^2+3n^2=3$: " " "

$\Rightarrow m^2\le 3 \quad 3n^2\le 3$

$m=0,\ n=\pm 1$ ok

$m^2+3n^2=113$: ne parliamo la prossima volta

7) $(m^2-3)(m^2-4)=11$ ...

$x^2+ax+b=0$ $\qquad$ $x^2+k=0$

$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 = x^2+ax+\frac{a^2}{4}$

$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 \underbrace{-\frac{a^2}{4}+b}_{\text{costante}} = 0$ $\qquad$ $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}-b \geq 0$ $\quad a^2-4b\geq 0$

$x+\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$

$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ $\qquad$ $a_n \dots a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

$p(0) = a_0$ $\qquad$ $p(1) = a_n + \dots + a_1 + a_0$

somma dei coefficienti

$p(2) =$ fa schifo

$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ e $\underline{a_n \neq 0}$

n : grado del polinomio

$(x^2+4x+3) + (x^3+x^2-4x+1) = x^3+2x^2+4$

$0x^3$

$(x^2+2)(x+3) = x^3+2x+3x^2+6$

$p(x)$ $\quad q(x)$ $\qquad$ $\deg p(x) = n$ $\qquad$ $\deg p(x) = m$

grado di $p(x)$ (sta per "degree")

$\deg(p(x)+q(x)) = ?$ $\qquad$ $\deg(p(x)\cdot q(x))$?

$$(-x^3+3)+(x^3+2x^2)$$

se $m \neq n$ $\deg(p+q) = \max\{m,n\}$

se $m = n$ boh! può essere m

o può essere qualsiasi cosa $\leq m$

$$\deg(p(x)-q(x)) = m+n$$

le costanti $\neq 0$ hanno grado 0

---

divisione con gli interi

- $n, m \in \mathbb{Z}$ $\exists\, a, b$

$$n = m \cdot a + b \qquad \underline{b < a}$$

Avete $p(x)$ $q(x)$ ne potete trovare altri due $a(x)$ $b(x)$

in modo che

$$p(x) = q(x) \cdot a(x) + b(x)$$

$$\deg b(x) < \deg q(x)$$

per un'ho diviso

$p(x)$ o $q(x)$

$$\frac{x^3}{3x^2} = \frac{1}{3}x$$

	x^3	$-3x^2$	$+x$	$+1$	$3x^2+2$	
diff.	x^3	0	$\frac{2}{3}x$	0	$\frac{1}{3}x-1$	$\leftarrow a(x)$
	0	$-3x^2$	$+\frac{1}{3}x$	$+1$		
differenza		$-3x^2$		-2		
			$\frac{1}{3}x$	$+3$		

resto della divisione $b(x)$

$\rightarrow$ il grado qui è $< \deg(3x^2+2)$

$$\underset{p(x)}{x^3-3x^2+x+1} = \underset{q(x)}{(3x^2+2)}\underset{a(x)}{\left(\tfrac{1}{3}x-1\right)} + \underset{b(x)}{\left(\tfrac{1}{3}x+3\right)}$$

i coefficienti di $p(x)$ sono interi
e anche quelli di $q(x)$
però quelli di $a(x)$ e di $b(x)$ no.

Se però il polinomio per cui divido ($q(x)$)
è <u>MONICO</u> (il termine di grado massimo
ha coefficiente $+1$) il risultato
della divisione sono sempre
polinomi a coefficienti interi
(Assumendo che $p(x)$ fosse a coeff interi)

$$\frac{5m^2-2m+1}{m+3} \in \mathbb{Z}$$ faccio la divisione

$$\begin{array}{r|l} 5m^2-2m+1 & m+3 \\ \hline 5m^2+15m & 5m-17 \\ \hline -17m+1 & \\ -7m-51 & \\ \hline 52 & \end{array}$$

$$5m^2-2m+1 = (m+3)(5m-17)+52$$

$$\frac{5m^2-2m+1}{m+3} = \underbrace{5m-17} + \frac{52}{m+3}$$

Bisogna che $\frac{52}{m+3} \in \mathbb{Z}$

$52 = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 26, \pm 13, \pm 52$

$m+3$ ← qualsiasi di queste cose

In particolare posso sempre fare la divisione
per un polinomio di I grado

$$p(x) = \underline{(x-a)}\, q(x) + K \quad \text{costante}$$
$(\deg q < 1)$

$x = a \qquad p(a) = K$

a t.c. $p(a) = 0 \qquad K = 0$

$\overset{0}{(a-a)} \cdot \text{Roba}$

se $p(a) = 0$ allora $p(x) = (x-a)\, q(x)$

se $\deg p(x) = n$

$\deg q(x) = n-1$

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

$p(x) = x^n - 1$ pongo $x = 1$ $\quad p(1) = 0 \to$ è divisibile per $x-1$

$$x^n - 1 = (x-1)(\text{cosa orribile})$$

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1$$

$$x^n + x^{n-1} + \dots + x^3 + x^2 + x$$

$$-x^{n-1} - \dots - x^2 - x - 1$$

$$\overset{\shortparallel}{0}$$

$$x^n - 1$$

$x^n + 1$ ci metto -1 $\quad (-1)^n + 1 = 0$ OK se n dispari

se n è dispari $x^n + 1 = (x+1)(\text{altra cosa orribile})$

$(x+1)(x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} - \dots - x + 1)$

se n è pari col cavolo !!

$x^2 + 1$ non la fattorizzate

$x^n + 1$ non si fattorizza in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q} \to$ razionali

$\mathbb{Z} \to$ interi relativi (ZAHLEN!)

$$\left.\begin{array}{l} 4x^4+1 \\ x^4+4 \end{array}\right\}$$ si fattorizzano a coefficienti razionali o interi

$$4x^4+1 = (2x^2+1)^2 - \underbrace{4x^2}_{\text{è quadrato}} = (2x^2+1-2x)(2x^2+1+2x)$$

stesso cosa per x^4+4 → così si fa curva il 9 di prima

---

x^n-1 $\qquad$ x^n-2^n

$$p(x)=x^n-y^n = (x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\dots+xy^{n-2}+y^{n-1})$$

y costante parametro

$p(y)=0$

y^n-y^n

$p(x) = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$ a coeff interi $\qquad n, m \in \mathbb{Z}$

$$p(n)-p(m) = (a_k n^k + \dots + a_1 n + a_0) - (a_k m^k + \dots + a_1 m + a_0) =$$

$$= a_k(n^k-m^k) + a_{k-1}(n^{k-1}-m^{k-1}) + \dots + a_1(n-m)$$

$n-m \mid n^k-m^k$

$n^{k-1}-m^{k-1}$

tutti pezzi divisibili per $n-m$

$\Downarrow$

$$\boxed{n-m \text{ divide } p(n)-p(m)}$$

$p(1)=3 \quad p(3)=6$

$p(n+2)-p(n)$ è divisibile per 2

se valete un polinomio a coeff INTERI

$p(n+2)$ e $p(n)$ siano tutti e due pari o tutti e due dispari

$$p(x) = (x-a)\,q(x) + K$$

$p(a) \neq 0 \longrightarrow$ vale: $\underline{p(a) = K}$

posso sempre scrivere

$$\boxed{p(x) = (x-a)\,q(x) + p(a)}$$

se p è a coeff interi è ancora a coeff interi

$p(1) = 2$ $\quad x+1$

$2x$

forma generale $p(x) = (x-1)\,q(x) + p(1)$

$p(1) = 2 \qquad p(2) = 5$

$p(x) = (x-1)\,q(x) + 2 \longrightarrow p(2) = q(2) + 2 = 5$

voglio dire qualcosa su $q(x)$

$q(2) = 3$

$q(x) = (x-2)\,r(x) + 3$

Sostituisco: $\underline{p(x) = (x-1)(x-2)\,r(x) + 3(x-1) + 2}$

Ho un polinomio di grado 21

$p(n) = \underline{2n} \quad n = 1, 2, 3, \dots 21$

ultime 4 cifre di $p(22)$?

$p(x) = (x-1)\,q(x) + 1 \qquad p(2) = q(2) + 1 = 4$

$q(2) = 3$

$q(x) = (x-2)\,r(x) + 3$

etc..

Considero il polinomio $\underline{p(x) - 2x} = q(x)$

$n = 1 \dots 21 \quad \underline{q(n) = 0}$

$p(n) = 2n$

$\underline{p(n) - 2n = 2n - 2n = 0}$

$q(x) = (x-1)(x-2) \dots (x-21)\,r(x)$

$p(x) = 2x + \underbrace{(x-1) \dots (x-21)}_{\text{ha già grado 21}}\,r(x)$

grado 21

$r(x)$ deve essere una costante.

$p(22) = 44 + \underline{k(21)(20)(19) \dots 2 \cdot 1}$

0044

tentiamo di dimostrare che finisce con 4 zeri

$\Updownarrow$

divisibile per 10000

$20 \to 10$

$10 \to 10$

$15, 2 \to 10$

$5 \cdot 4 \to 20$

$p(1) = 2$ $\quad$ $p(x) - 2$ si annulla in 1

$$[p(x) - 2] = (x-1)\,q(x)$$

$p(x) = 2x$ $\quad$ $1 \ldots 21$

$q(x)$ t.c. $q(1) = \ldots = q(21) = 0$

$p(x) - 2x = 0$

$q(x) = (x-1)\,q'(x)$, $q'(2) = 0$

$q'(x) = (x-2)\,q''(x)$

$$q(x) = (x-1)(x-2)\,q''(x)$$

$$q(x) = (x-1)(x-2)\ldots(x-21)\cdot \underbrace{\text{QUALCOSA}}_{\text{costante}}$$

$\deg = 21 + \deg$ QUALCOSA

$p(x) - 2x = q(x)$ $\quad$ $p(x) = 2x + q(x)$

$p(22) = 44 +$ cosa con la tesi alla fine

$$q(22) = \underset{1}{(22-21)}\,\underset{2}{(22-20)}\ldots\underset{21}{(22-1)}$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 21 \quad (21!)$$

$$2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 20$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{array}$$

è divisibile per 10'000

$$5^4 \cdot 2^4 = 10^4 = 10'000$$

Trovare un polinomio $p(x)$ tale che

$$\underline{16(x-1)\,p(x) = (x-16)\,p(2x)} \qquad \forall x$$

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$
$$p(2x) = a_n 2^n x^n + \dots + 2a_1 x + a_0$$

Sostituisco $+1 \to \underline{0} = 16(1-1)\,p(1) = \underline{-15\,p(2)}$

$$\Rightarrow \boxed{p(2) = 0}$$

$$16 \to 16 \cdot 15\, p(16) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{p(16) = 0}$$

$$16(x-1)\,p(x) = (x-16)\,p(2x)$$

Sostituisco $\underline{x = 2}$

$$0 = 16\,p(2) = -14\,p(4) \qquad \boxed{p(4) = 0}$$

Sostituisco $x = 4$ $\quad 0 = 16 \cdot 3\, p(4) = -12\, p(8)$

$$\to \boxed{p(8) = 0}$$

$$16(x-1)\,p(x) = (x-16)\,p(2x)$$

$$p(2) = p(4) = p(8) = p(16) = 0$$

$$p(x) = (x-2)(x-4)(x-8)(x-16)\,\underline{q(x)}$$

$$p(2x) = (2x-2)(2x-4)(2x-8)(2x-16)\,q(2x) =$$

$$= \underbrace{2^4}_{16}(x-1)(x-2)(x-4)(x-8)\,q(2x)$$

sostituendo

$$\cancel{16}\cancel{(x-1)}\cancel{(x-2)}\cancel{(x-4)}\cancel{(x-8)}\cancel{(x-16)}\,q(x) =$$

$$= \cancel{16}\cancel{(x-16)}\cancel{(x-1)}\cancel{(x-2)}\cancel{(x-4)}\cancel{(x-8)}\,q(2x)$$

mi avanza solo $\underline{q(x) = q(2x)}$

$$\forall x \neq 1, 2, 4, 8, 16$$

$q(x)$ di grado k

$$q(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)\,q(x)$$

avrebbe grado ≥ 5

<u>Un polinomio di grado n ha al massimo n radici</u>

$q(x) = q(2x)$ $\qquad$ $17, 18, 19, 20, \ldots$

$s(x) = q(x) - q(2x)$ $\qquad$ $s(17) = s(18) = s(19) \ldots\ldots = s(n) = 0$

$s(x) = 0 \quad \forall x$

$$q(x) - q(2x) = 0$$

$$q(2x) = 2^n a_n x^n + \dots + 2a_1 x + a_0$$

$$q(2x) - q(x) = (2^n - 1) a_n x^n + \dots + (4-1) a_2 x^2 + (2-1) a_1 x$$

deve essere il polinomio nullo

se $n \geq 1$ non lo è

$\Rightarrow n = 0$

$$\boxed{q(x) = k}$$

$$p(x) = k(x-2)(x-4)(x-8)(x-16)$$

1) Calcolare la somma dei coefficienti di:

$$p(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)^{31} - (x^2 + 1)^{30} + (1 - 2x^3)^{29}$$

2) $p(x)$ polinomio a coefficienti interi

Allora se $p(0)$ e $p(1)$ sono dispari, $p(x)$ non può avere radici intere.

3) • Trovare $a, b \in \mathbb{Z}$ in modo che $x^2 - x - 2$ divida $x^4 + 2x^3 - ax^2 + bx + 6$

• " " " $bx^{2n} - ax^{2n-1} + bx^{2n-2} - ax^{2n-3} + \dots$

$+ \dots - ax + b$ sia divisibile per $x^2 - 1$

4) Sia $p(x)$ a coefficienti interi tale che $p(1) = p(2) = p(3) = 1$

È possibile che ci sia un intero n con $p(n) = 4$?