Stage di TERNI - (25/01/2011)

Titolo nota 25/01/2011

Algebra 2

① <u>divisione</u> $p(x)$ $q(x)$ polinomi

$a(x)$

$$p(x) = a(x) \cdot q(x) + \underbrace{\text{QUALCOSA}}_{\downarrow}$$

ancora un polinomio che ha grado $< \deg q(x)$.

② $p(x)$ a $p(a) = 0$

$\Downarrow$

$$p(x) = (x-a)\, q(x)$$

se $\deg p(x) = n$

allora $\deg q(x) = n-1$

$p(1) = 2$ $\qquad p(x) = (x-1)\, q(x) + 2$

$\downarrow$ n $\qquad \downarrow$ $n-1$

$p(2) = 5 \longrightarrow$ condizioni su $q(x)$

$$p(2) = 1 \cdot q(2) + 2 = 5$$

$$q(2) = 3$$

③ $\underline{\deg\big(p(x)\, q(x)\big) = \deg p(x) + \deg q(x)}$

il grado di $p(x) = 0$ non è definito

$k \neq 0$ $\quad \deg(k \cdot p(x)) = \underset{0}{\underset{\downarrow}{\deg k}} + \deg p(x) = \deg(p(x))$

$$k\, p(x) = k a_n x^n$$

$k = 0$ $\quad \deg p(x) = n$ $\qquad \deg(0 \cdot p(x)) = \deg 0$

$\nexists$ $p(x)$ ha grado n $\quad$ $n+1$ radici

$a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n \quad a_{n+1}$

n

$$p(x) = (x-a_1)\,q_1(x) = (x-a_1)(x-a_2)\,q_2(x) \dots$$

$$= \underbrace{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n+1})}_{\text{grado } n+1} \cdot q_{n+1}(x)$$

deve essere $q_{n+1}(x) = 0$

$\boxed{p(x) = 0}$ non ha grado n

$p(x)$ $q(x)$ due polinomi di grado n

sono uguali per $n+1$ valori

$$p(a_1) = q(a_1)$$
$$\vdots$$
$$p(a_{n+1}) = q(a_{n+1})$$

$p(n) = 2n \qquad n = 1 \dots 21$

$$p(x) - 2x = q(x)$$

$p(x) - q(x) \equiv s(x) \qquad s(a_1) = s(a_2) = \dots = s(a_{n+1}) = 0$

s ha ancora grado n o al massimo di meno

$$s(x) \equiv 0$$

ma allora $p(x) = q(x)$

!! Posso fissare in un solo modo un polinomio di grado n su $n+1$ punti

Esercizi

1). somma dei coefficienti di

$$(x^3-3x^2+4)^{31}-(x^2+1)^{30}+(1-2x^3)^{29}$$

metti $p(1) = 2^{31}-2^{30}-1 = 2^{30}-1$

$$2^{31} = 2\cdot 2^{30} = 2^{30}+2^{30}$$

2). $p(0)$ e $p(1)$ dispari, p a coeff interi

$\Rightarrow p(x)$ non ha radici intere

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

supponiamo $\exists\, m$ intero $p(m)=0$

- se m è pari

$p(m)$ è dispari

roba pari $+ a_0$, ma $a_0 = p(0) =$ dispari

$p(m)$ dispari $\Rightarrow p(m)\neq 0$ (0 è pari)

$p(x) = x^3+x^2+1$ non ha radici intere.

$p(1)=3 \quad p(0)=1$

$p(m) = m^3+m^2+1$

- se m è pari m^3+m^2 è ancora pari

e allora m^3+m^2+1 è dispari

$\Rightarrow$ se m è pari $p(m)\neq 0$

- se m è dispari

m^3+m^2 è ancora pari $\Rightarrow m^3+m^2+1$ è di nuovo dispari

e non può essere 0.

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

- $p(m) = \underbrace{a_n m^n} + \dots + \underbrace{a_1 m} + a_0$

<u>se m è pari</u> $\quad a_n m^n = \text{cosa} \cdot \text{PARI} = \text{PARI}$

$$p(m) = \text{PARI} + \text{PARI} + \dots + \text{PARI} + a_0$$

$a_0 = p(0)$ è dispari

$p(m)$ è dispari

- se <u>m è dispari</u> $\quad m^n$ è dispari $= \text{PARI} + 1$

$$p(m) = a_n(\text{PARI} + 1) + a_{n-1}(\text{PARI} + 1) + \dots + a_1(\text{PARI} + 1) + a_0 =$$

$$= \underbrace{\left[a_n \cdot \text{PARI} + a_{n-1} \cdot \text{PARI} + \dots + a_1 \cdot \text{PARI}\right]}_{\text{PARI}} + \underbrace{(a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0)}_{p(1) = \text{dispari}}$$

$= \text{dispari}$

se m è dispari $p(m)$ è dispari e non può essere 0

- se m è pari $p(m) \neq 0$
- se m è dispari $p(m) \neq 0$

3) $x^2 - x - 2$ divide $x^4 + 2x^3 - ax^2 + bx + 6$

$$x^4+2x^3-ax^2+bx+6 = (x^2-x-2)(\ldots\ldots) + x(b-1-a)+8-2a$$

e si impone $\begin{cases} b-1-a=0 \\ 8-2a=0 \end{cases}$ $\quad b-a=1$, $a=4$, $b=5$

$$\underbrace{x^4+2x^3-ax^2+bx+6} = \underbrace{(x^2-x-2)}\,q(x)$$

$x^2-x-2=0$ radici: -1, 2

$$(-1)^4+2(-1)^3-a(-1)^2+b(-1)+6=0 = q(x)\underbrace{((-1)^2-(-1)-2)}_{=0}$$

$$1-2-a-b+6=0$$

$$a+b=5$$

$$2^4+2\cdot 2^3-a2^2+b(2)+6=0$$

$$16+16-4a+2b+6=0$$

$$4a-2b=38$$

$$2a-b=19$$

$3a=24$

$a=8$

$b=-3$

$$\begin{array}{l|l}
x^4+2x^3-8x^2-3x+6 & x^2-x-2 \\ \hline
x^4-x^3-2x^2 & x^2+3x-3 \\ \hline
3x^3-6x^2-3x+6 & \\
3x^3-3x^2-6x & \\ \hline
-3x^2+3x+6 & \\
-3x^2+3x+6 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

$$p(x) = bx^{2n} - ax^{2n-1} + bx^{2n-2} - ax^{2n-3} \dots bx^2 - ax + b$$

è divisibile per $x^2 - 1$

radici ± 1

$p(1) = 0$ $\quad b - a + b - a + \dots - a + b$

$$\boxed{n(b-a) + b = 0}$$

$p(-1) = 0$ $\quad b + a + b + a + \dots + a + b$

$$\boxed{n(b+a) + b = 0}$$

sottraendo le due equazioni $\quad 2na = 0 \Rightarrow a = 0$

allora b deve essere 0.

---

se $q(x)$ divide $p(x)$

allora le radici di $q(x)$ sono anche radici di $p(x)$

$$p(x) = q(x) \cdot \cos n$$

---

se TUTTE le radici di $q(x)$ sono radici anche di $p(x)$ allora $q(x)$ divide $p(x)$

n radici con $n = \deg q(x)$

$$q(x) = k(x - a_1) \dots (x - a_n) \cancel{s(x)}$$

dove $a_1 \dots a_n$ sono le n radici di $q(x)$

se $p(a_1) = 0$ $\quad p(x) = (x - a_1)\, p'(x)$

$$p(x) = \underbrace{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)}_{\frac{q(x)}{k}}\, s(x)$$

Quindi $p(x) = q(x) \cdot \frac{s(x)}{k}$

e $q(x)$ divide $p(x)$!

Funziona solo assumendo tutti gli $a_1 \dots a_n$ distinti

$(x+1)^2$ non divide x^2-x-2

ma le radici di $(x+1)^2$ (senza molteplicità) sono radici anche di x^2-x-2

$x^2 - ax + b$ $\qquad$ α, β sono le radici

allora $\begin{cases} a = \alpha+\beta \\ b = \alpha\cdot\beta \end{cases}$

$$x^2 - ax + b = (x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta$$
$$= \underline{x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta}$$

Attenzione il polinomio deve essere MONICO

il coeff di x^2 è $= +1$

$$ax^2 - bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta) =$$

$-$ somma

$$= a\left[x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\right] = ax^2 - a(\alpha+\beta)x + a\cdot\alpha\beta$$

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = ? \qquad \alpha, \beta, \gamma \text{ radici}$$

$$= (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \; ?$$

$-$ somma

$$a = -\alpha - \beta - \gamma$$

$$b = \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma$$

$$c = -\alpha\beta\gamma$$

$$(x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta)(x-\gamma) =$$

$$= x^3 - (\alpha+\beta)x^2 + \alpha\beta x - \gamma x^2 + \gamma(\alpha+\beta)x - \alpha\beta\gamma =$$

$$= x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma$$

$$p(x) = Kx^3 + ax^2 + bx + c$$

$$-\frac{a}{K} = \alpha+\beta+\gamma \qquad -\frac{c}{K} = \alpha\beta\gamma$$

$$+\frac{b}{K} = \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma$$

---

le radici sono

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \qquad \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$$

cosa sono i coeff?

$$a_0 = \alpha_1 \dots \alpha_n \cdot (-1)^n \qquad (x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)$$

$$a_{n-1} = -(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$$

$$a_1 =$$

$$(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta$$

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n) =$$

$$= x(\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n)(-1)^{n-1} + -\alpha_1 \cdot x(-\alpha_2)(-\alpha_3)\dots(-\alpha_n)$$

$$+ (-\alpha_1)(-\alpha_2)(-\alpha_4)(-\alpha_5)\dots(-\alpha_n)$$

$$= (-1)^{n-1} x \left[\text{somma di tutti i prodotti di } n-1 \text{ radici}\right]$$

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

2 $\qquad -$ somma $\qquad +$(somma dei prodotti di 2 radici) $\qquad (-1)^n$ prodotto delle radici

$$a_{n-k} = (-1)^k \cdot [\text{somma di tutti i possibili prodotti di } k \text{ radici}]$$

$$x^2 - 5x + 6 \qquad \alpha, \beta$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = ? \qquad \left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 5 \\ \alpha\beta = 6 \end{array}\right\}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 25 - 12 = 13$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = ?$$

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{5}{6}$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = ?$$

$$= (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

$$(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

1) Costruire un polinomio di III grado in modo che le sue radici α, β, γ soddisfino
$$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 2 \\ \alpha+\beta+\gamma = 1 \\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} = -1 \end{cases}$$

2) Siano α, β, γ le radici di x^3-x^2+x+1 (non sperate di calcolarle!!)
Quanto fa $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$?

3) Siano α, β le radici di x^2+x+1. Quanto fa $\frac{1}{\alpha^4}+\frac{1}{\beta^4}$? ← è un quattro

(difficile) 4) Siano $a_1 \dots a_n$ interi e $p(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)-1$.
Dimostrare che se $p(x) = q(x)\cdot s(x)$, dove $q(x)$ e $s(x)$ sono polinomi a coefficienti interi, allora uno dei due è costante.

5) $p(1)=p(2)=p(3)=1$; p a coeff interi $\Rightarrow$ non esiste n intero con $p(n)=4$

6) $p(1)=p(2)=p(3)=8$; p a coeff interi $\Rightarrow$ $8 \mid p(d)$ $\forall d$ dispari.

1)
$$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 2 \\ \alpha+\beta+\gamma = 1 \\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} = -1 \end{cases}$$

$p(x) = x^3+ax^2+bx+c$

$a = -1$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = -1$

$x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

2)

x^3-x^2+x+1

$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$

$(\alpha\beta+\gamma\alpha+\beta\gamma)^2 = \alpha^2\beta^2+\gamma^2\alpha^2+\beta^2\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

$\alpha\beta+\gamma\alpha+\beta\gamma = 1$, $2(-1)(1)$

risultato: $1 + 2 = 3$

3)

x^2+x+1

$$\frac{1}{\alpha^4} + \frac{1}{\beta^4} = \frac{\alpha^4+\beta^4}{\underbrace{\alpha^4\beta^4}_{1}}$$

$$\alpha^4+\beta^4 = \underbrace{(\alpha^2+\beta^2)}^2 \underbrace{-2\alpha^2\beta^2}_{-2}$$

$x^n - y^n = (x-y)$ roba

$p(x)$ polinomio a coefficienti interi

n, m interi $\Rightarrow$ $p(n)-p(m)$ è divisibile per $(n-m)$

$p(1) = p(2) = p(3) = 1 \Rightarrow \nexists\, n$ t.c. $p(n) = 4$

$p(n) - 1$
- $p(n) - p(1)$ è divisibile per $n-1$
- $p(n) - p(2)$ $\quad n-2$
- $p(n) - p(3)$ $\quad n-3$

Se fosse $p(n) = 4$ $\quad p(n) - 1 = 3$

$(n-1), (n-2), (n-3)$ dividono 3

$-1, 1, -3$

non è possibile

6) $p(1) = p(2) = p(3) = 8 \Rightarrow 8 \mid p(d)$ $\forall d$ intero dispari

$p(x) - 8 = q(x) \Rightarrow q(1) = q(2) = q(3) = 0$

Dunque $q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\,s(x)$

$p(x) = 8 + (x-1)(x-2)(x-3)\,s(x)$

$s(x)$ ha ancora tutti i coefficienti interi perché ho diviso $q(x)$ per polinomi <u>monici</u> $(x-1, x-2, x-3)$

Tesi: 8 divide $p(d)$

$$p(d) = \underset{\text{divisibile per 8}}{8} + \underbrace{(d-1)(d-2)(d-3)\,s(d)}$$

intero

dispari

vorrei che $(d-1)(d-2)(d-3)$ fosse sempre divisibile per 8

$d-1$ e $d-3$ sono entrambi pari

28, 30

e uno dei due è anche divisibile per 4.

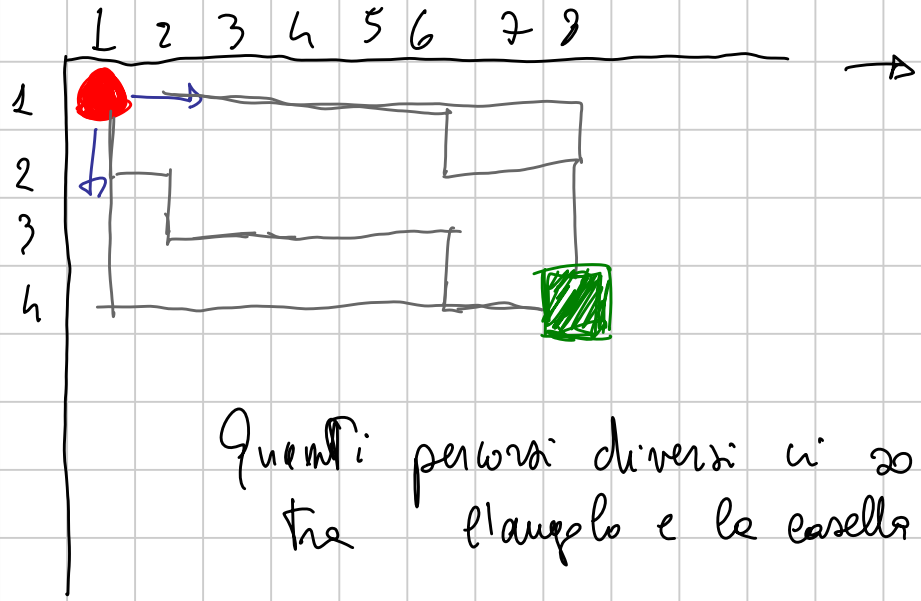
$\underline{h-2 = 8}$

COMBINATORIA - II

$$\binom{n}{k} = \text{coeff. binomiale} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

= n° di modi di scegliere k elementi tra n senza curarsi dell'ordine.

Es:



Quanti percorsi diversi ci sono tra l'angolo e la casella verde?

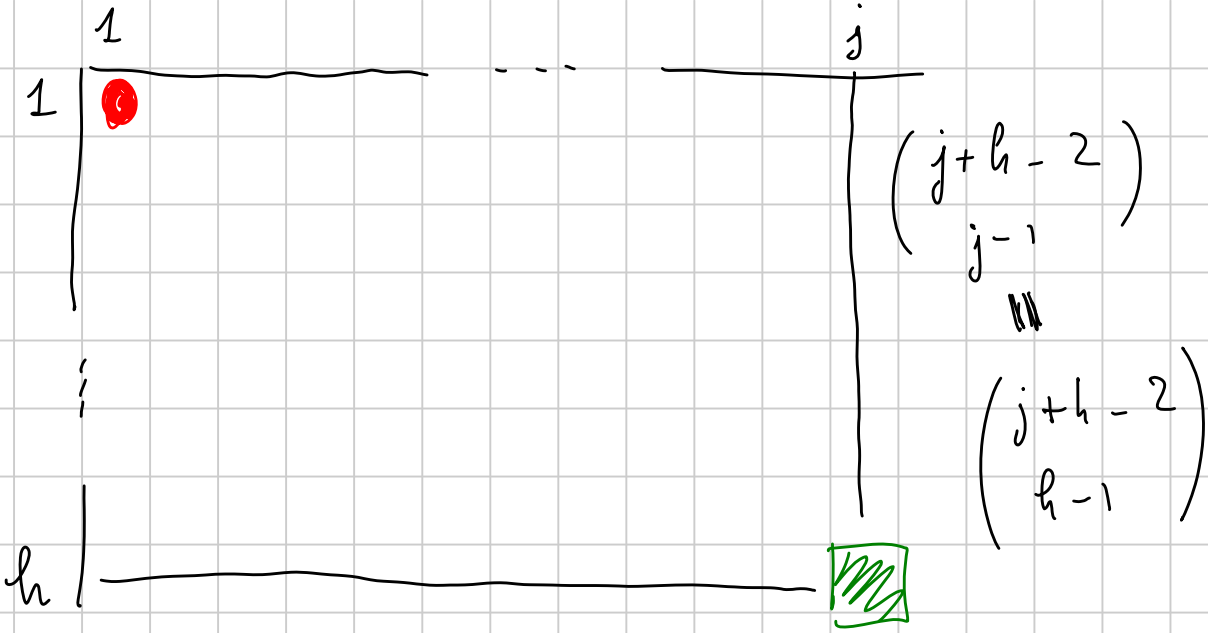
1) Devo muovermi 3 volte in basso e 7 a destra.

2) B = basso D = destra

$$n^\circ \text{ parole con } 3\,B \text{ e } 7\,D = \frac{10!}{3!\,7!} = \binom{10}{3}$$

Altrimenti: Ho 10 mosse da fare, devo scegliere quali fare verso il basso (e ne devo scegliere 3)

$$\binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2} = 10\cdot 3\cdot 4 = 120$$



	3											
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-	-	-
$15 = 5+10 =$	1	2	3	4	5	6	7	8				
$= 5+4+6 =$	1	3	6	10	15	21	28					
	1	4	10	20	35	56						
$= 5+4+3+3 =$	1	5	15	35	70							
$= 5+4+3+2+1$	1	6	21	56								
	1	7	28									
	1	8										
	1											
	1											
	1											

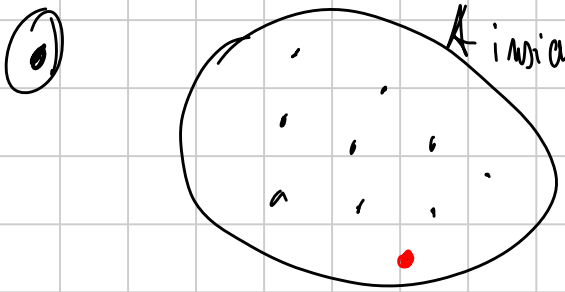
$$\binom{3+n-2}{3-1} = n$$

$$\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2!\,(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Per arrivare alla casella viola devo passare o dalla verde o dall'arancione, non posso passare da entrambe e, da ognuna, il percorso è obbligato

il numero in una casella è somma del numero sopra e di quello a sinistra

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}}$$



A insieme con n elementi

se B è un sottoinsieme di k elementi ci sono due possibilità

(i) $\bullet \in B$ (ii) $\bullet \notin B$

(i) Scelgo $k-1$ elementi in $A \setminus \{\bullet\}$ che ha $n-1$ elementi

(ii) Scelgo k elementi in $A \setminus \{\bullet\}$ che ha $n-1$ elementi

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

<u>OSS</u>: $(x-a)(x-a)(x-a)(x-a)(x-a) = p(x)$

$\deg p(x) = 5 \quad \Rightarrow \quad p(x) = \binom{5}{0} x^5 + x^4(-a)\binom{5}{1} +$

$$+ x^3(-a)^2\binom{5}{2} + x^2(-a)^3\binom{5}{3} + x(-a)^4\binom{5}{4} +$$

$$+ (-a)^5\binom{5}{5} =$$

$$= x^5 - 5ax^4 + 10x^3a^2 - 10x^2a^3 + 5xa^4 - a^5$$

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots$$

$$\dots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \dots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

1) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = ?$

2) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} +$

$$+ (-1)^n\binom{n}{n} = ?$$

1) $(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n}y^n$

pongo $x=y=1 \Rightarrow \binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n = (1+1)^n$

2) $\underset{\substack{\| \\ 0}}{(1-1)^n} = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}(-1) + \binom{n}{2}1^{n-2}(-1)^2 + \dots + \binom{n}{n}(-1)^n =$

$= \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$

	k	$\frac{k(k+1)}{2}$	$\downarrow 4$						
$k=1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$k=2$	1	2	3	4	5	6	7	8	
$k=3$	1	3	6	10	15	21	28		
	1	4	10	20	35	56			
	1	5	15	35	70				
$n=6 \rightarrow$	1	6	21	$\boxed{56}$					
	1	7	28						
	1	8							
	1								

$k=$ n° di riga

$\frac{1(1+1)}{2} + \frac{2(2+1)}{2} + \frac{3(3+1)}{2} + \frac{4(4+1)}{2} + \frac{5(5+1)}{2} + \frac{6(6+1)}{2}$

$\frac{1}{2}\left[(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) + (1+2+3+4+5+6)\right]$

$1^2+2^2+\dots+6^2 = 2\cdot 56 - \overbrace{(1+2+\dots+6)}^{=21}$

$1^2+2^2+\dots+n^2 = 2\cdot\binom{n+4-2}{4-1} - \binom{n+3-2}{3-1} =$

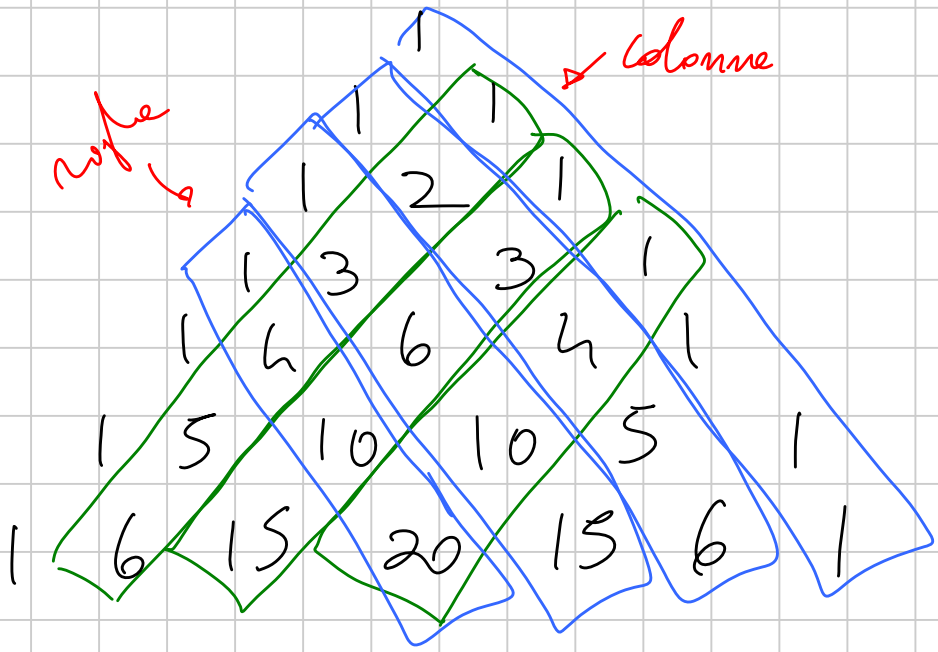
$= 2\binom{n+2}{3} - \binom{n+1}{2} =$

$= 2\frac{(n+2)!}{3!(n-1)!} - \frac{n(n+1)}{2} =$

$$= \frac{(n+2)(n+1)n}{3} - \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{2n(n+1)(n+2) - 3n(n+1)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)n\left[2n+4-3\right]}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

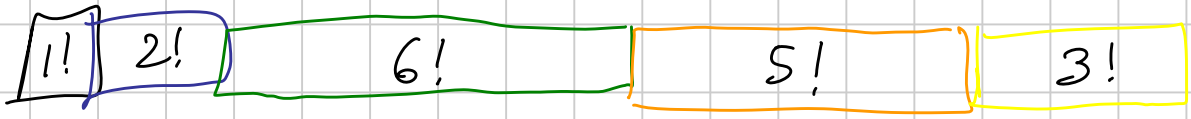


<u>Es</u>: Ad un corso di Judo ci sono:

- 3 cinture gialle
- 5 cinture arancioni
- 6 cinture verdi
- 2 cinture blu
- 1 cintura nera

In quanti modi possono mettersi in fila per il saluto.

(I) $\dfrac{17!}{3!\,5!\,6!\,2!}$ (II) $3!\,5!\,6!\,2!$



$$3!\,5!\,6!\,2!$$

Es: Ho 5 libri di matematica, 4 di italiano, 3 di storia, 2 geografia, 1 chimica.

In quanti modi posso disporli su uno scaffale di modo che quelli di una stessa materia siano tutti vicini?

$$5! \cdot 5!\,4!\,3!\,2!$$

perm. delle materie

Es: 4 semi, x(10 numeri + 3 figure) = 52 carte

Quale è la probabilità di avere un full servito

Casi possibili $= \binom{52}{5}$ $\quad 4 \cdot 10^4$

Casi favorevoli $= 156$, $52 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 48 \cdot 3$,

Fissato il numero avete $\binom{4}{1}$ tris oppure $\binom{4}{2}$ coppie

$\binom{4}{1} = 4$ $\quad \binom{4}{2} = 6$

A 3

CQP

$4 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 13$

$A_p A_Q A_F \; 3_p 3_Q$

$A_Q A_p A_F \; 3_p 3_Q$

$$\frac{52 \cdot \cancel{3 \cdot 2} \cdot \overset{24}{\cancel{48}} \cdot 3}{\cancel{3 \cdot 2 \cdot 2}} =$$

$$= 13 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 6$$