

Stage di Campobasso - 2012
GARA A SQUADRE - 25/02/2012

Che campioni Holly e Benji!

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000 .
- Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati: $\sqrt{2} = 1.4142$, $\sqrt{3} = 1.7321$, $\sqrt{5} = 2.2361$, $\sqrt{7} = 2.6458$, $\pi = 3.1416$.

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista).
- **30 minuti dall'inizio:** termine ultimo per fare domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio:** termine della gara.

1. Il provino di Holly

Oliver Hutton, Holly per gli amici, è appena arrivato in città e vuole giocare nella squadra di calcio Newppy. Per accettarlo nella squadra, il capitano Bruce Harper gli sottopone, dopo le prove atletiche, il seguente quesito: "Sai dirmi che numero porto sulla maglia? Ti do un indizio: è un numero primo positivo e se lo aumenti di 1 è un cubo perfetto." Holly risponde subito e, ovviamente, indovina. Che risposta ha dato Holly?

2. Questione di stile

Julian Ross, il tecnicissimo centrocampista offensivo della Mambo Football Club, si impone di fare sempre un certo numero di dribbling a partita. Restio a rivelarne l'esatto numero, risponde così a chi glielo chiede: il numero è pari alla somma degli inversi delle soluzioni dell'equazione $x^3 - 123x^2 + 527x - 17 = 0$. Quanti dribbling tenta di fare Julian, in ogni partita?

3. L'armadietto di Bruce

I compagni di squadra di Bruce (gli altri giocatori della Newppy), per fargli uno scherzo, hanno cambiato la combinazione del suo armadietto nello spogliatoio. Bruce non sa quale sia la nuova combinazione, ma sa solo che è un numero di 4 cifre, che non contiene zeri, multiplo di 9, di 11, ma non divisibile per nessuna delle proprie cifre. Decide di provare tutti i numeri possibili a partire dal più piccolo. Qual è il suo primo tentativo?

4. Errori tipografici

Teo Seller, il mastodontico portiere della Norfolk decide di personalizzare la propria maglia. Purtroppo il tipografo, al momento della stampa del cognome, ricorda solo quali lettere formano il cognome e che la *S* e la *R* non erano adiacenti. Quante possibili maglie sbagliate potrà stampare lo smemorato tipografo?

5. La potenza è nulla senza controllo

I tiri in porta di Mark Lenders spesso vanno a segno, rompono la rete e si schiantano sul muro retrostante, lasciando evidenti segni su di esso. Alla fine di un allenamento, il custode del campo nota che tre di questi

segni sono circonferenze dello stesso raggio, tutte passanti per un punto, i cui centri formano un triangolo equilatero. Meravigliato, si domanda quale area in metri quadri abbia il triangolo formato dai 3 ulteriori punti di intersezione delle tre circonferenze. Sai rispondere al suo dubbio ozioso, sapendo che i tre raggi misurano 20 metri?

6. Palloni d'avanzo

Benji, l'incredibile portiere della Saint Francis, si allena aiutato dai 10 compagni di squadra. L' n -esimo tira rigori contro Benji tante volte quant'è il resto di 7^n nella divisione per 5 (ad esempio il primo tira $7 - 5 = 2$, il secondo $49 - 45 = 4$ volte). Alla fine dell'allenamento, quanti tiri in porta sono stati effettuati?

7. Un nuovo stemma

Tra le proposte per il nuovo stemma della squadra Newteam c'è quella di un quadrilatero convesso non intrecciato $ABCD$ in cui

$$\begin{aligned}\widehat{ACB} &= \widehat{ADB} = 30^\circ \\ \widehat{DAC} &= \widehat{DBC} = 90^\circ \\ AB &= 20 \text{ cm} \quad AB \parallel CD.\end{aligned}$$

Quanto vale l'area del quadrilatero? Indicare la parte intera del risultato.

8. Foto ricordo

Quattro tifosi chiedono a Holly, Tom e Benji di fare una foto con loro. I 7 si mettono in fila, ma i tifosi vogliono che nella foto non vi siano due calciatori adiacenti. In quanti modi possono disporsi per la fotografia?

9. Sana rivalità

Holly e Benji si trovano a giocare nella stessa squadra del campionato regionale; tra i due nasce subito una certa rivalità, che li porta ad allenarsi strenuamente per superarsi. Se Holly si allena un certo numero di minuti a tirare in porta, Benji il giorno dopo si allena il doppio dei minuti più 1 a parare rigori. Holly, il giorno dopo ancora, si allena lo stesso numero di minuti di Benji il giorno prima. Proseguono così per vari giorni. Sapendo che il primo giorno Holly si è allenato 10 minuti, quanto dura il primo allenamento di Benji che supera i 2000 minuti?

10. Passaggi lunghi

"Benji Price rinvia il pallone e lo riceve Bruce, a un quarto della metà campo avversaria sulla linea sinistra di bordo campo. Bruce Harper subito passa sulla linea destra di bordo campo, a tre quarti della stessa metà campo, a Tom Becker, che subito tenta il tiro in porta. Ma Warner para e rinvia a Fletcher, all'incrocio tra la linea di metà campo e il bordo destro del campo. Fletcher temporeggia." Dopo questa concitata telecronaca, uno spettatore attento nota che il passaggio da Harper a Becker, il rinvio di Warner e la linea destra di bordo campo formano un triangolo. Sapendo che le due metà campo sono quadrati di lato 20 e che le porte si trovano nei punti medi, qual è l'area di quel triangolo?

11. Un severo allenamento

I gemelli Derrick, temibili attaccanti della Hot Dog, si preparano alle partite così: una settimana prima, scelgono uno un numero reale x e l'altro il suo inverso $1/x$, di modo che la somma dei due sia intera. Eseguono poi tante flessioni quant'è tale somma. Il giorno dopo (6 giorni prima della partita) fanno $x^2 + 1/x^2$ flessioni, il giorno seguente $x^3 + 1/x^3$ e così via. Se 7 giorni prima della partita hanno fatto 10 flessioni, quante ne faranno 3 giorni prima?

12. In ritiro

Nel villaggio che ospita la nazionale giapponese di calcio, per garantire la concentrazione dei nostri campioni, ci sono solo abitazioni isolate, collegate al più da un sentiero l'una all'altra. Le abitazioni sono di due tipi: centrali e periferiche. Ogni abitazione centrale è collegata esattamente ad altre 3 abitazioni, mentre ogni abitazione periferica è collegata esattamente ad altre 2 abitazioni. Sapendo che ci sono in tutto 30 sentieri e che le abitazioni periferiche e centrali sono in ugual numero, quante abitazioni ci sono in tutto il villaggio?

13. Training brasiliano

Il famoso giocatore brasiliano Roberto Sedinho si è offerto di allenare Holly; per iniziare ogni sessione di allenamento gli chiede un certo numero di giri di campo, pari al numero di soluzioni *interi* (x, y) dell'equazione $x^2 - y^2 = 5n^2 + 3$, dove n è il numero del giorno in cui si allena. Quanti giri di campo dovrà fare Holly il 7 marzo?

Nota: Le soluzioni che differiscono per uno scambio delle variabili, ad esempio $x = -1, y = 2$ e $x = 2, y = -1$, sono da considerarsi distinte.

14. Forza Bruce!

La supertifosa Patty ha deciso di concedere un appuntamento galante al difensore Bruce Harper, solo se quest'ultimo saprà aspettare tante ore quanti sono i numeri di 6 cifre con le cifre disposte in ordine strettamente crescente da sinistra a destra (ad esempio 245679, ma non 134468 o 135246). Quante ore dovrà pazientare il nostro Bruce?

15. Strategie vincenti

La rosa della Newteam è formata da 26 giocatori che portano tutti i numeri di maglia da 1 a 26. L'allenatore Roberto Sedinho vuole schierare in campo una formazione di 11 giocatori in modo che in squadra non ci siano due giocatori con numeri di maglia consecutivi. Quante diverse formazioni può schierare?

16. Porta aurea

Il portiere Ed Warner ha fatto realizzare una enorme porta da calcio per allenarsi nei suoi tipici salti da palo a palo: si consideri una piramide a base rettangolare il cui vertice si proietti sul punto medio di uno dei lati maggiori della base e la si sezioni con un piano parallelo alla base. Il tronco ottenuto è la porta da calcio. Sappiamo che il lato più grande della base sta al più piccolo come il più piccolo sta alla differenza tra i due e che la stessa relazione sussiste tra l'altezza della piramide e l'altezza del piano di sezione. Se il lato maggiore della base misura 4 metri e l'altezza della piramide misura 6, qual è la parte intera del volume della porta da calcio ottenuta?

17. Fino allo sfinimento!

Mark Lenders, il fortissimo attaccante e capitano della Muppet, si allena ogni giorno sulla spiaggia, calciando onde fino a quando non è stremato. Oggi si è stancato così tanto che non riesce più nemmeno a ricordarsi quante ne ha calciate; rammenta solo che, se x è tale che $x^2 - 7x - 1 = 0$, allora il numero di onde è $x^3 + 2x^2 - 64x + 128$. Quante onde ha calciato?

18. Rigoristi per caso

Sempre Ed Warner, il "portiere del karate" della Flynet, ogni giorno si allena a parare rigori, facendoli tirare ad un suo compagno di squadra sempre diverso. Il suo metodo è il seguente: il rigorista prescelto è uno tra i giocatori il cui numero di maglia è tale che la somma degli interi da 1 al numero della maglia dà resto il numero del mese corrente, se divisa per il numero del giorno corrente. Sapendo che i numeri di maglia vanno da 1 a 17 e che Ed porta la maglia 17, quali giocatori potranno essere rigoristi il 17 Gennaio? Indicare la somma dei numeri di maglia.

19. La coppia d'oro

Tom Becker, la seconda punta d'attacco della Newppy, ha con Holly un'intesa perfetta sul campo e il loro gioco è fitto di passaggi. Uno dei tifosi più assidui alle loro partite ha notato questo fatto buffo. Il numero di passaggi tra di loro, nell'arco di una partita, è sempre un numero a , positivo e minore di 100 e tale che esiste un polinomio $p(x)$ a coefficienti interi con $p(1) = 7$, $p(7) = 1$ e $p(4) = a$. Quanti sono i possibili valori per a ?

20. Balistiche geometriche

Il tiro triangolare dei gemelli Derrick consiste in questo: uno dei due gemelli salta sul palo della porta avversaria, l'altro tira il pallone in linea retta sopra la porta e il primo spicca un balzo dal palo intercettando il tiro e passandolo di testa all'altro, che tira in porta. Affinché questa tecnica riesca, vi sono delle precise condizioni: presa la circonferenza tangente al palo, alto 2 metri, nel suo punto più alto e al suolo, il tiro rettilineo del secondo gemello la incontra in due punti, che vanno entrambi bene per il tiro triangolare solo se formano un lato del triangolo equilatero inscritto in quella circonferenza. Sapendo che il secondo gemello calcia da 10 metri di distanza dalla porta, si trovi la parte intera del quadrato della somma delle distanze dei due punti favorevoli dal punto in cui parte il tiro.