STAGE OLIMPIADI MATEMATICA

ALGEBRA — CAGLIARI

Note Title — 03/02/2012

2006

9. Quanti simboli di radice quadrata, come minimo, devono comparire nell'espressione $\sqrt{\cdots\sqrt{\sqrt{123.456.789}}}$ affinché il risultato sia minore di 2?
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9.

$\sqrt{\sqrt{123.456.789}} \approx \sqrt{11000}$ .... circa 5 radici

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{n}}}}}} \rightarrow \sqrt{2}$

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{n}}}}} \rightarrow 2 \qquad 2^1$

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{n}}}} \rightarrow 2^2 = 4 \qquad 2^2$

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{n}}} \rightarrow 4^2 = 16 \qquad 2^4$

$\sqrt{\sqrt{n}} \rightarrow 16^2 = 256 \qquad 2^8$

$\sqrt{n} \rightarrow 256^2 = 65536 \qquad 2^{16} \qquad 2^{10} = 1024 \qquad 2^{16} \approx 64\,000$

$n \rightarrow 65536^2 = \,?\qquad 2^{32} \qquad 4 \cdot 1000^3 \approx 4$ mld

$n = 123$ mln ... $\approx 10^8 \rightarrow 10^4 \rightarrow 10^2 \rightarrow 10 \rightarrow 3 \rightarrow 1$

2009

1. Quanti interi n sono tali che $\sqrt{n}$ differisce da $\sqrt{101}$ per meno di 1?
(A) 19 (B) 21 (C) 40 (D) 41 (E) 42.

$\sqrt{100} = 10$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{101} = 10{,}$poco

$10 - 1 < \sqrt{n} < 10 + 1$ $\qquad\qquad$ $9{,}$poco $< \sqrt{n} < 11{,}$poco

$81 < n < 121$ $\quad$ 39 valori $\qquad$? $81{,}$poco $< n < 121{,}$poco

$82{,}$poco $\quad 122{,}$poco ?

$83{,}$poco

81 non va bene $\quad$ 82? $\quad$ 82 va bene

121 va bene $\quad$ 122? $\quad$ 122 va bene

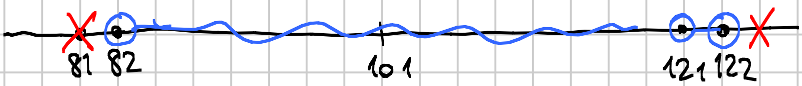
$n = 82 \qquad \sqrt{n} \overset{?}{>} \sqrt{101} - 1 \qquad\qquad n = 122 \qquad \sqrt{122} \overset{?}{<} \sqrt{101} + 1$

$82 \overset{?}{>} 101 + 1 - 2\sqrt{101} \qquad\qquad 122 \overset{?}{<} 101 + 1 + 2\sqrt{101}$

$2\sqrt{101} \overset{?}{>} 20 \qquad\qquad 20 \overset{?}{<} 2\sqrt{101}$

$\sqrt{101} \overset{?}{>} 10$ vera $\qquad\qquad$ vera

$n = 123$ ....



$21 \overset{?}{<} 2\sqrt{101}$

$441 \overset{?}{<} 404$ NO

Gli n che vanno bene sono $82, 83, \ldots, 122$

41

2008

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**
Si determinino tutte le coppie (x, y) di numeri reali che verificano l'equazione

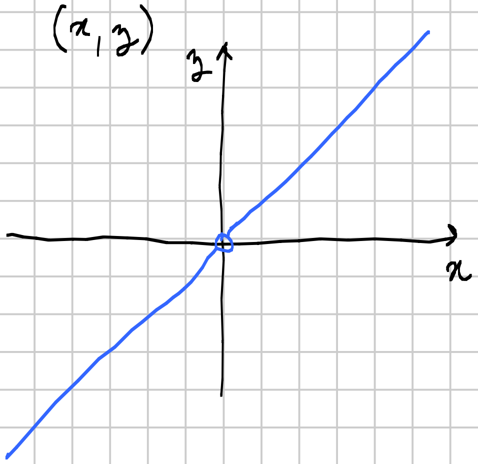
$$\frac{4}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

$$\frac{4}{x+y} = \frac{y+x}{xy}$$

$x \neq 0 \quad y \neq 0 \quad x+y \neq 0$

$$4xy = (x+y)^2$$
$$4xy = x^2+y^2+2xy$$
$$0 = x^2+y^2-2xy$$
$$0 = (x-y)^2$$
$$0 = x-y$$
$$x = y$$

(x, y)



Le soluzioni sono le coppie (x, y) tali che $x = y \neq 0$

2008

5. Siano $a_0, a_1, a_2, \ldots$ numeri interi tali che $a_0 = 19$, $a_1 = 25$, e per ogni $n \geq 0$ valga $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$.
Qual è il più piccolo $i > 0$ per cui a_i è multiplo di 19?
(A) 19 **(B)** 25 **(C)** 38 **(D)** 44 **(E)** 50.

$a_0 = 19$
$a_1 = 25$
$a_2 = 31$
$a_3 = 37$
$a_4 = 43$
$\vdots \quad \vdots$

$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n \qquad n \geq 0$

$n=0 \qquad a_2 = 2a_1 - a_0 = 2 \cdot 25 - 19 = 31$

$n=1 \qquad a_3 = 2a_2 - a_1 = 2 \cdot 31 - 25 = 37$

$n=2 \qquad a_4 = 2a_3 - a_2 = 2 \cdot 37 - 31 = 43$

$\ldots$

$\left(F_0 = 0 \quad F_1 = 1 \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 \ldots \right)$

Successione di Fibonacci

$\boxed{a_n = 6n + 19}$

$6n + 19$ è multiplo di 19 sse
$6n$ è multiplo di 19
siccome 19 è primo, se $m \cdot n$ è multiplo di 19
per forza m o n devono essere multipli di 19
Siccome $m = 6$, vuol dire che n è multiplo di 19

Soluzione : $n = 19$

Dimostro che $a_{n+1} = a_n + 6 \;:\; \mathcal{P}_n$ $\qquad n = 1, 2, 3, \dots$

1) <u>Per induzione</u>

$\mathcal{P}_1 : a_2 = a_1 + 6$

$\mathcal{P}_2 : a_3 = a_2 + 6$

$\dots$

$\mathcal{P}_n : a_{n+1} = a_n + 6$

A) PASSO BASE

Dimostro $\mathcal{P}_1$

$a_2 \overset{?}{=} a_1 + 6$

calcolo $a_2 = 2a_1 - a_0 = 31$

$31 = 25 + 6$

OK

B) PASSO INDUTTIVO

Mostro che, usando solo $\mathcal{P}_{n-1}$ vera, posso dimostrare che $\mathcal{P}_n$ vera (questo indipendentemente da n)

vera $\mathcal{P}_{n-1} : a_n = a_{n-1} + 6$

$\mathcal{P}_n \;:\; a_{n+1} \overset{?}{=} a_n + 6 \qquad a_{n+1} = \underbrace{2a_n - a_{n-1} \overset{?}{=} a_n + 6}$

$a_n \overset{?}{=} a_{n-1} + 6$ vera! $\mathcal{P}_{n-1}$

2) La successione a_n definita nel problema è univoca.

Siccome $c_n := 19 + 6n$ soddisfa le condizioni del problema, deve essere per forza a_n.

Devo verificare: $c_0 = 19$ ✓

$c_1 = 25$ ✓

$c_{n+2} \overset{?}{=} 2c_{n+1} - c_n$

$19 + 6(n+2) \overset{?}{=} 2[19 + 6(n+1)] - (19 + 6n)$

$\cancel{19} + \cancel{6n} + \cancel{12} \overset{?}{=} \cancel{38} + \cancel{12}n + \cancel{12} - \cancel{19} - \cancel{6n}$

vera!

3) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n \qquad n \geq 0$

$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n \qquad n \geq 0$

Ovvero a_n è una progressione aritmetica

Siccome $a_1 - a_0 = 6$, a_n è una progressione aritmetica che incrementa sempre di 6

FATTORIZZAZIONI NOTEVOLI

$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ $\qquad$ $(x+1)^2 = x^2+2x+1$

$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ $\qquad$ $(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$

$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$ $\qquad$ $(x+1)^4 = x^4+4x^3+6x^2+4x+1$

$$(x+y)^{18} = x^{18}+18x^{17}y+\frac{18\cdot 17}{2}x^{16}y^2+\frac{18\cdot17\cdot16}{2\cdot3}x^{15}y^3+\frac{18\cdot17\cdot16\cdot15}{2\cdot3\cdot4}x^{14}y^4+\dots$$

$$=\sum_{k=0}^{18}\frac{18!}{k!(n-k)!}x^{n-k}y^k \qquad 18! = 18\cdot17\cdot16\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1$$

$$=\sum_{k=0}^{18}\binom{18}{k}x^{n-k}y^k$$

coefficiente binomiale = triangolo di Tartaglia

(vedi lezione di COMBINATORIA)

$x^2-y^2 = (x-y)(x+y)$ $\qquad$ $x^2-1 = (x-1)(x+1)$

$x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$ $\qquad$ $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$

$x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$ $\qquad$ $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$

$$x^n-y^n = (x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\dots+xy^{n-2}+y^{n-1})$$

$$x^n-1 = (x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x^2+x+1)$$

1 2 4 8 16 32 ... $\qquad$ progr. geometrica

1/3 1/9 1/27 ... $\qquad$ " $\quad$ "

$\pi, \pi e, \pi e^2, \pi e^3 \dots$ $\qquad$ " $\quad$ "

$$1+x+x^2+x^3+\dots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

$$\frac13+\frac19+\frac1{27}+\dots+\frac{1}{3^{2012}} = \frac13\Big(\underbrace{1+\frac13+\frac19+\dots+\frac{1}{3^{2011}}}_{x=\frac13,\ n=2011}\Big) = \frac13\cdot\frac{\left(\frac13\right)^{2012}-1}{\frac13-1} = \frac13\,\frac{1-\frac{1}{3^{2012}}}{\frac23}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{3^{2012}}}{2} = 0{,}49999\dots$$

$$x^n + 1 = (x+1)(x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} - x^{n-4} + \dots + x^2 - x + 1)$$

solo se n dispari

$$x^6 + 1 = y^3 + 1 = (y+1)(y^2 - y + 1) = (x^2+1)(x^4 - x^2 + 1)$$

$y := x^2$

2009

14. Sia x la più piccola delle due soluzioni dell'equazione $x^2 - 4x + 2 = 0$. Quali sono le prime tre cifre dopo la virgola nella scrittura (in base 10) del numero

$$x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2009}?$$

■ EQUAZIONI DI II GRADO "FOR DUMMIES"

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$
$$x^2 - 4x + 4 = 2$$
$$(x-2)^2 = 2$$
$$x - 2 = \pm\sqrt{2}$$
$$x = 2 \pm \sqrt{2}$$

due soluzioni

$$(x+y)^2 = \underbrace{x^2 + 2xy}_{= x^2 - 4x} + y^2$$

$$\Updownarrow$$

$$y = -2$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$
$$x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 0$$
$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$$

nessuna soluzione reale

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$
$$(x-3)^2 = 0$$
$$x - 3 = 0$$
$$x = 3$$

una sola soluzione

- La soluzione minore è $x = 2 - \underbrace{\sqrt{2}}_{1{,}414\dots} = 0{,}586\dots$

$$x + x^2 + \dots + x^{2009} = x(1 + x + \dots + x^{2008}) = x\,\frac{1 - x^{2009}}{1-x} = \frac{x - x^{2010}}{1-x}$$

$$= \frac{2-\sqrt{2} - (2-\sqrt{2})^{2010}}{1 - 2 + \sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2} - (0{,}586)^{2010}}{\sqrt{2} - 1} \approx \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} \approx 1{,}414$$

soluzione : 414

2010

7. Qual è la seconda cifra (partendo da sinistra) del numero $(10^{16}+1)(10^8+1)(10^4+1)(10^2+1)(10+1)$? $= n$
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4.

$(10+1) = 11$

$(10+1)(10^2+1) = 11 \cdot 101 = 1111$

$(10+1)(10^2+1)(10^4+1) = 1111 \cdot 10001 = 11111111$

$10 = x$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{(x-1)(x+1)}_{x^2-1}(x^2+1)}_{x^4-1}(x^4+1)}_{x^8-1}(x^8+1)}_{x^{16}-1}(x^{16}+1)}_{x^{32}-1}$$

$9n = (10-1)n = 10^{32}-1 = \underbrace{999\ldots9}_{32\text{ cifre}} \Rightarrow n = \underbrace{111\ldots1}_{32\text{ cifre}}$

2005

15. Quante sono le coppie ordinate (x, y) di interi positivi x e y che soddisfano la relazione $xy + 5(x + y) = 2005$?

1) Vado per tentativi

$x = 1 \quad y + 5(1+y) = 6y + 5 = 2005 \quad 6y = 2000 \quad y$ non intero!

2) $x(y+5) + 5y - 2005 = 0$

$x(y+5) = 5(401-y)$

$xy + 5x + 5y + 25 = 2005 + 25$

$(x+5)(y+5) = 2030 = 2 \cdot 5 \cdot 203 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29$

$x \geq 1 \quad y \geq 1$

$x+5 \geq 6 \quad y+5 \geq 6$

divisori di 2030

$\cancel{1} \cdot \cancel{2030}$
$\cancel{2} \cdot \cancel{1015}$
$\cancel{5} \cdot \cancel{406}$
$7 \cdot 290$
$10 \cdot 203$
$14 \cdot 145$
$29 \cdot 70$
$35 \cdot 58$

$x+5$	$y+5$	x	y
7	290	2	285
10	203	5	198
14	⋮		⋮
29			
35			
58			
70			
145			
203			
290	7	285	2

Dieci soluzioni.

POLINOMI

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ grado n $n+1$ coefficienti

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ siano le radici del polinomio

$p(x) = a_n (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)$

esempio $p(x) = 7(x-4)(x-1) = 7x^2 - 35x + 28$

Esempi:

1) $(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Nei pol. di II gr. con $a_2 = 1$ (monici)

i coefficienti a_1 e a_0 sono:

a_1 l'opposto della somma delle radici

a_0 il prodotto delle radici

$$\left.\begin{array}{ll} x^2 - 3x + 2 & \text{il prodotto delle radici è } 2 \\ \shortparallel & \\ (x-1)(x-2) & \text{la somma delle radici è } 3 \end{array}\right\} \; 2 \text{ e } 1\,!$$

$x^2 - 3x + \frac{9}{4} + 2 - \frac{9}{4} = 0$

$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$

$x - \frac{3}{2} = \pm\frac{1}{2}$

$x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$ $x = 1, 2$

★ a, b $a + b = 6$ $ab = -216$

$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$

a e b sono le radici di $x^2 - 6x - 216 = 0$

$(x-3)^2 = 216 + 9 = 225 = 15^2$

$x = 3 \pm 15 = 18, -12$

$a = 18$ $b = -12$ o viceversa

2) $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma$

monico — somma radici — altri coeff sono più complicati — ± prodotto radici

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) = x^4 - (\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^3 +$$
$$+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)x^2$$
$$-(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)x + \alpha\beta\gamma\delta$$

2007

5. Sia $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Sapendo che la somma di due delle radici del polinomio vale zero, quale fra le seguenti relazioni tra i coefficienti di $P(x)$ è sempre vera?
(A) $abc = 0$ **(B)** $c = ab$ **(C)** $c = a + b$ **(D)** $b^2 = ac$
(E) nessuna delle risposte precedenti è corretta.

$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

α, β, γ le radici $\qquad \alpha+\beta = 0 \qquad \beta = -\alpha$

$$P(x) = (x-\alpha)(x+\alpha)(x-\gamma) = (x^2-\alpha^2)(x-\gamma) = x^3 - \gamma x^2 - \alpha^2 x + \alpha^2\gamma$$
$$= x^3 + ax^2 + bx + c$$

$-\beta$

$a = -\gamma \qquad b = -\alpha^2 \qquad c = \alpha^2\gamma$

2005

4. Quanti sono i polinomi $p(x)$ di secondo grado, a coefficienti interi e con 2 radici intere, tali che $p(8) = 1$? (Nota: ricordiamo che i numeri interi possono essere positivi, negativi o nulli)
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** un numero finito maggiore di 3 **(E)** infiniti.

$p(x) = ax^2 + bx + c \qquad \alpha, \beta$ radici intere

interi

$1 = p(8) = a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c = 1$

$p(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$

$1 = p(8) = a\,\underbrace{(8-\alpha)}\,\underbrace{(8-\beta)}$

interi

$a,\ 8-\alpha,\ 8-\beta \quad = \pm 1$

$a = 1$	$8-\alpha = 1$	$8-\beta = 1$	$\alpha = 7$	$\beta = 7$	$p(x) = (x-7)(x-7)$	$= x^2 - 14x + 49$
$a = 1$	$8-\alpha = -1$	$8-\beta = -1$	$\alpha = 9$	$\beta = 9$	$p(x) = (x-9)(x-9)$	$= x^2 - 18x + 81$
$a = -1$	$8-\alpha = 1$	$8-\beta = -1$	$\alpha = 7$	$\beta = 9$	$p(x) = -(x-7)(x-9)$	$= -x^2 + 16x - 63$
$a = -1$	$8-\alpha = -1$	$8-\beta = 1$	$\alpha = 9$	$\beta = 7$	$p(x) = -(x-9)(x-7)$	$= -x^2 + 16x - 63$

$p(x) \qquad p(k) = 2k$

$q(x) := p(x) - 2x \qquad q(k) := p(k) - 2k = 2k - 2k = 0$

$q(1) = 0 \quad q(2) = 0 \ \ldots \ q(20) = 0$

$q(x) = (x-1)(x-2) \ldots \cdot (x-20)$

$p(x) = (x-1)(x-2) \ldots \cdot (x-20) + 2x$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(n+1)n}{2}$$

$$\underbrace{12 + 19 + 26 + 33 + \ldots + 82}_{11} = \frac{12+82}{2} \cdot 11$$

m scelte per la prima opzione
n per la seconda

$m \cdot n$ scelte totali

5 primi 4 secondi SÌ/NO CAFFÈ

$5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$ possibili pranzi

12921 è palindromo

$$9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$$

2004 T

13. Un villaggio è costituito da abitazioni isolate, collegate da strade. Ognuna di queste strade è un sentiero che collega due abitazioni (e tra due abitazioni vi è al più un sentiero che le collega). Le abitazioni sono di due tipi: centrali e periferiche. Ogni abitazione centrale è collegata esattamente ad altre tre abitazioni; ogni abitazione periferica è collegata esattamente ad altre due abitazioni. Sapendo che il numero di abitazioni centrali è uguale al numero di abitazioni periferiche, e che ci sono in tutto 30 sentieri, quante abitazioni ci sono in tutto il villaggio?

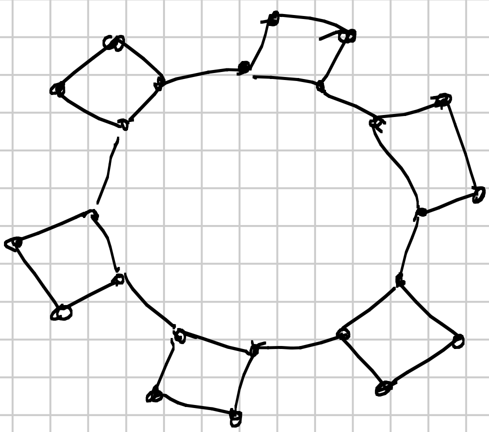
c numero centrali
p numero periferiche

$c = p$

$$\frac{3c + 2p}{2} = 30$$

$$3c + 2p = 60$$
$$5c = 60$$
$$c = 12 = p$$

$$c + p = 24$$



$$\{1, 2, 3, \ldots\ldots, n\}$$

sì sì sì ... sì

NO NO NO ... NO

$$2 \times 2 \times 2 \times \ldots\ldots \times 2 = 2^n \text{ sottoinsiemi}$$

$$12 = 2^2 \cdot 3 \qquad 1, 2, 3, 4, 6, 12$$

$$d = 2^{\boxed{}} \cdot 3^{\boxed{}}$$

$$0, 1, 2 \qquad 0, 1$$

$$3 \times 2 = 6$$

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots\ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

$$d = p_1^{\boxed{}} \cdot p_2^{\boxed{}} \cdot \ldots\ldots \cdot p_k^{\boxed{}}$$

$$0, 1, 2, \ldots \alpha_1 \qquad 0, 1, 2, \ldots \alpha_2 \qquad 0, 1, 2, \ldots \alpha_k$$

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \ldots\ldots \cdot (\alpha_k + 1) =$$

$= \text{numero divisori positivi di } n$

2. Determinare tutti i numeri naturali multipli di 6 e che possiedono esattamente 6 divisori naturali.
(dare come risultato la somma di tutti i numeri trovati)

$m = 2^a \cdot 3^b \cdot \ldots$

$(a+1)(b+1) \cdot \ldots = 6$

$\geq 2 \quad \geq 2 \quad \geq 2 \quad \geq 8$ NO

$m = 2^a \cdot 3^b \qquad (a+1)(b+1) = 6$

$m = 2 \cdot 3^2 = 18 \quad 2 \quad 3 \quad \cancel{1 \cdot 6}$

$m = 2^2 \cdot 3 = 12 \quad 3 \quad 2 \quad 2 \cdot 3$

STAGE

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$

$0! = 1$

MATEMATICA

$$\frac{10!}{3!\,2!\,2!}$$ anagrammi

n concorrenti

$n(n-1)(n-2)$

n studenti

k interrogati

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

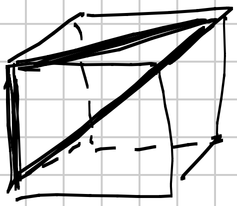
1998

9. Dato un cubo C, quanti sono i triangoli che hanno per vertici tre vertici di C e che non giacciono su nessuna delle facce di C?

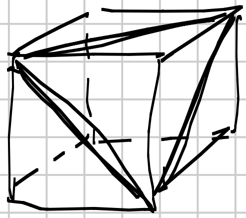
(A) 12 **(B)** 24 **(C)** 32 **(D)** 56 ~~**(E)** 112.~~

$$\underbrace{\binom{8}{3}}_{\frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}}{\cancel{3\cdot 2}\cdot 1}} \to \text{TOTALI}$$

$$\binom{8}{3} - 6\cdot \underbrace{4}_{\binom{4}{3}} = 56-24 = 32$$



24



8

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} =$$

$$= \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}{k!\,(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1} =$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} =$$

$= \binom{n}{n-k} \longrightarrow$ n−k che non interrogo

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

k=0, k=1, k=2, k=3, k=4

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \boxed{\binom{4}{1}} \quad \boxed{\binom{4}{2}} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{2}$$

← n=0 →
← n=1 →
← n=2 →
← 3 →
−4−

k=0, k=1, k=2, k=3, k=4

$$1$$
$$1 \quad 1$$
$$1 \quad 2 \quad 1$$
$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$
$$1 \quad \boxed{4} \quad \boxed{6} \quad 4 \quad 1$$
$$10$$

$$(x+y)^4 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y) =$$

$$= \underset{\binom{4}{4}}{1}\, x^4 + \binom{4}{3} x^3 y + \binom{4}{2} x^2 y^2 + \binom{4}{1} x y^3 + \binom{4}{0} y^4$$

$$x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)(x+y) \,\text{----}\, (x+y) =$$

$$= \overset{1}{\binom{n}{n}} x^n + \overset{n}{\binom{n}{n-1}} x^{n-1} y + \binom{n}{n-2} x^{n-2} y^2 + \text{---}$$

$$+ \text{--} + \binom{n}{2} x^2 y^{n-2} + \underset{n}{\binom{n}{1}} x y^{n-1} + \underset{1}{\binom{n}{0}} y^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \qquad (mx+n)^{2000}$$

8. m e n sono due naturali primi tra loro. Nel polinomio $(mx+n)^{2000}$, i coefficienti di x^2 e x^3 sono uguali. Quanto vale $m+n$?

$$(mx+n)^{2000} = (mx)^{2000} + \binom{2000}{1999}(mx)^{1999} n + \ldots$$

$$\ldots + \binom{2000}{3}(mx)^3 n^{1997} +$$

$$+ \binom{2000}{2}(mx)^2 n^{1998} + \ldots$$

Coef di x^3: $\dfrac{\cancel{2000}\cdot\cancel{1999}\cdot 1998}{3\cdot\cancel{2\cdot 1}} \cdot m^{\cancel{3}} \cdot \cancel{n^{1997}}$

$=$

Coef di x^2: $\dfrac{\cancel{2000}\cdot\cancel{1999}}{\cancel{2\cdot 1}} \cdot \cancel{m^2} \cdot n^{\cancel{1998}}$

$$\frac{1998}{3} m = n \qquad 666m = n$$

$$MCD(m,n) = 1$$

m multiplo di m, m divide m

n multiplo di m, m divide n

$$m \mid \underbrace{MCD(m,n)}_{1} \qquad m = 1 \qquad n = 666$$

„divide"

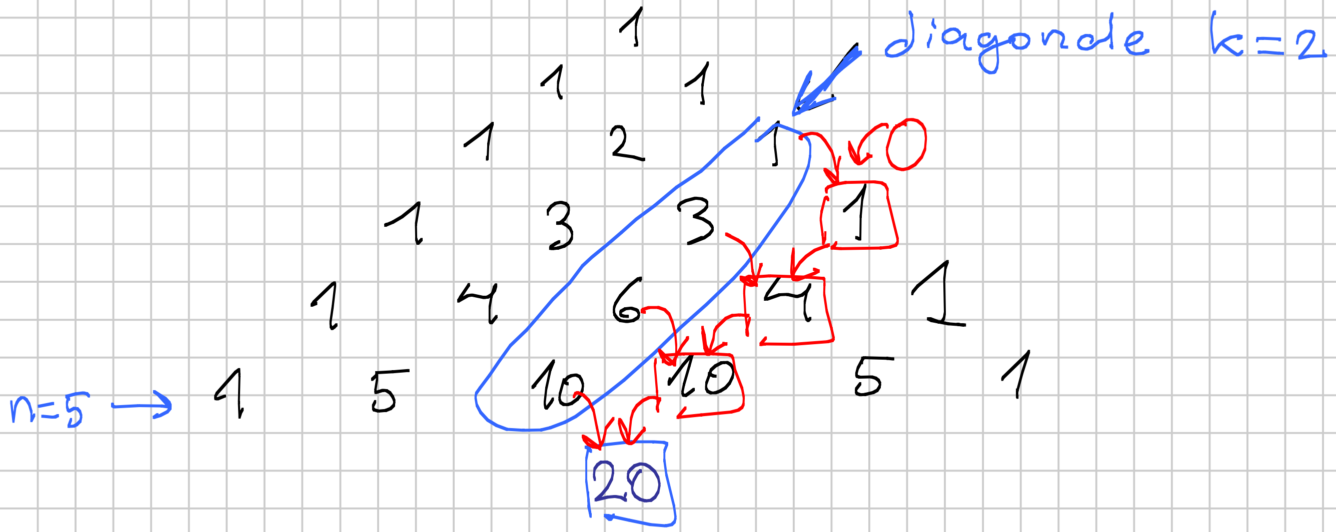
Fisso k $\qquad n \geq k$

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\dots+\binom{n}{k}$$

$(k+1-1)$

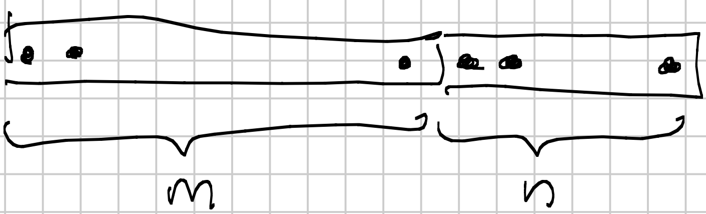
$$\frac{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{k!}+\frac{(k+1)k(k-1)\ldots 3\cdot 2}{k!}+\dots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}=$$

$$=\sum_{i=k}^{n}\frac{i(i-1)\ldots(i-k+1)}{k!}$$ → polinomio in i di grado k



$$\binom{m+n}{k}=\binom{m}{k}\binom{n}{0}+\binom{m}{k-1}\binom{n}{1}+\binom{m}{k-2}\binom{n}{2}+$$

$$+\dots+\binom{m}{1}\binom{n}{k-1}+\binom{m}{0}\binom{n}{k}=$$



$$=\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$$

$$\binom{90}{6} \qquad 90 \to 6+84$$

$$=\binom{6}{6}\binom{84}{0}+\binom{6}{5}\binom{84}{1}+$$

$$+\binom{6}{4}\binom{84}{2}+\binom{6}{3}\binom{84}{3}+\binom{6}{2}\binom{84}{4}+\binom{6}{1}\binom{84}{5}+$$
$$+\binom{6}{0}\binom{84}{6}$$

7 tipi di cioccolatini

Quanti pacchetti con 4 cioccolatini (anche uguali) ?

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \qquad \binom{7}{4}$$

$$c_1 < c_2 < c_3 < c_4$$

$$c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq c_4$$

$$c_1 < c_2+1 < c_3+2 < c_4+3 \qquad \binom{\overset{7+4-1}{10}}{4}$$

n tipi di cioccolato, k scelte

$$c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_k$$

$$c_1 < c_2+1 < c_3+2 < \dots < c_k+k-1 \qquad \binom{n+k-1}{k}$$

1. Quante sono le quintuple <u>ordinate</u> (a, b, c, d, e) di interi <u>positivi</u> (>0) tali che $a+b+c+d+e = 2012$

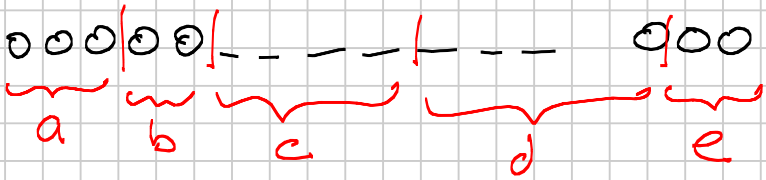
2. Come prima, ma interi non negativi (≥ 0)

La risposta è in ogni caso un binomiale

1. $\underbrace{\circ\circ\circ\circ\circ \text{ - - - - - - } \circ\circ}_{2012}$

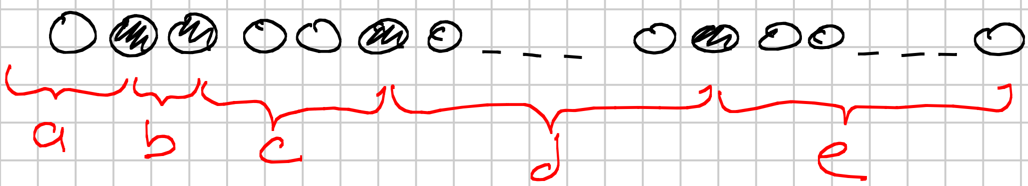
Avendone risolto uno, ricondurre l'altro a quella soluzione

2. Anagrammi, cioccolatini

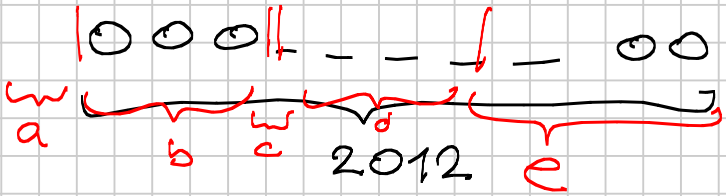


$$\binom{2011}{4}$$

2012 bianche 4 nere



$$\frac{2016!}{2012!\,4!} = \binom{2016}{4}$$



$$\binom{2013+4-1}{4} = \binom{2016}{4}$$

a = fondenti
b = latte
c = caffe
d = bianchi
e = gianduia

$$\binom{5+2012-1}{2012} = \binom{2016}{2012} = \binom{2016}{4}$$

$$\binom{5}{0}\binom{2011}{4} + \binom{2011}{3}\binom{5}{1} + \binom{2011}{2}\binom{5}{2} +$$

$$+ \binom{2011}{1}\binom{5}{3} + \binom{2011}{0}\binom{5}{4} = \binom{2011+5}{4}$$

$$(a+1)+(b+1)+(c+1)+(d+1)+(e+1) = 2012+5$$

$$\binom{2016}{4}$$

STAGE OLIMPIADI MATEMATICA

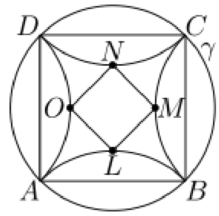
GEOMETRIA

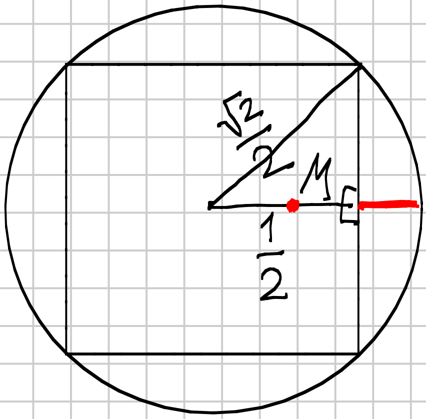
CAGLIARI

Note Title 04/02/2012

2009

5. Un quadrato $ABCD$ di lato 1 è inscritto in una circonferenza γ. Si costruiscano i simmetrici degli archi $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DA}$ di γ rispetto ai lati AB, BC, CD, DA rispettivamente. Indichiamo con L, M, N, O i punti medi degli archi così ottenuti; quanto vale l'area di $LMNO$?
(A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **(B)** $\sqrt{2}-1$ **(C)** $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(D)** $\frac{1}{4}$ **(E)** $3-2\sqrt{2}$.

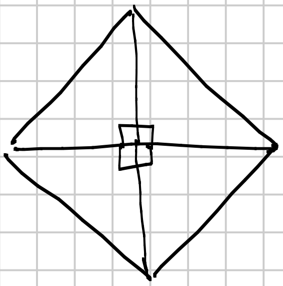




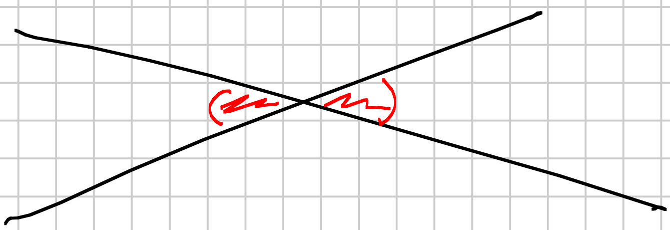
$$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}$$

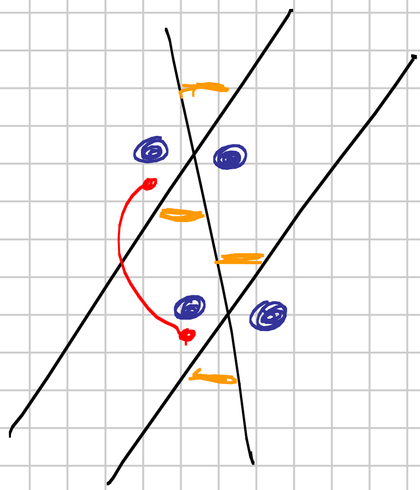
$$\frac{1}{2}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Diagonale piccolo: $2-\sqrt{2}$

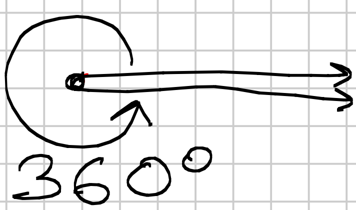


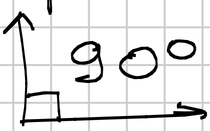
$$\frac{(2-\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{2}=3-2\sqrt{2}$$



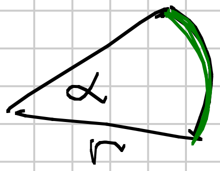


+ = angolo piatto

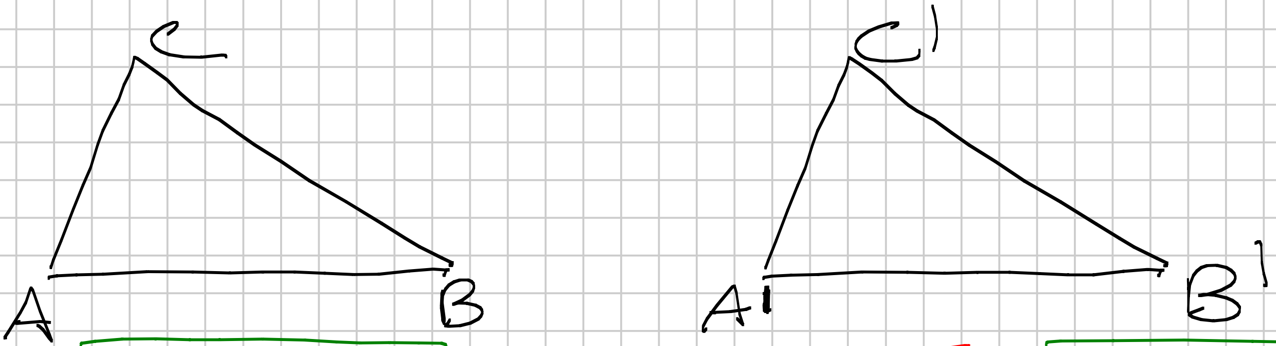




2π π $\frac{\pi}{2}$

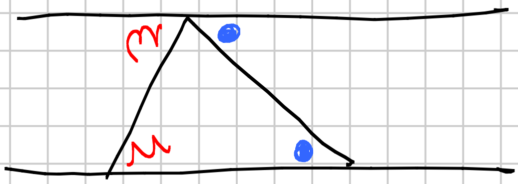


$\alpha \cdot r$



$AB = A'B'$ $BC = B'C'$ $CA = C'A'$

$C\hat{A}B = C'\hat{A}'B'$ $A\hat{B}C = A'\hat{B}'C'$ $B\hat{C}A = B'\hat{C}'A'$

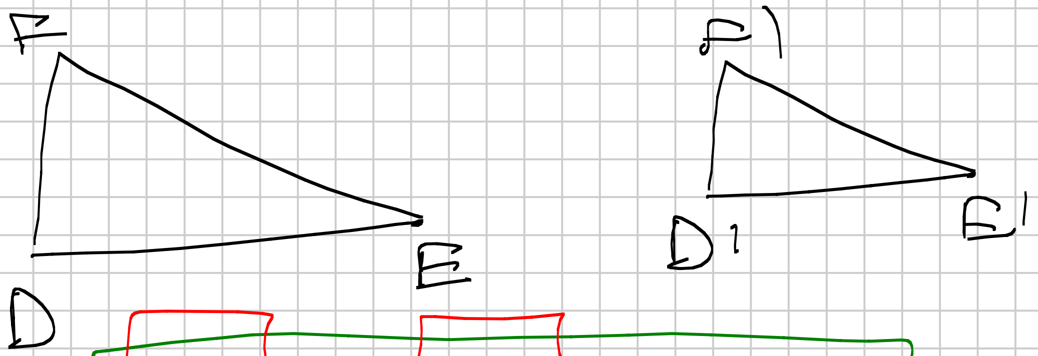


3 lati

2 lati e angolo compreso

2 angoli e un lato

$ABC \cong A'B'C'$



$$\frac{DE}{D'E'} = \frac{EF}{E'F'} = \frac{FD}{F'D'}$$

$\hat{D} = \hat{D}'$ $\hat{E} = \hat{E}'$ $\hat{F} = \hat{F}'$

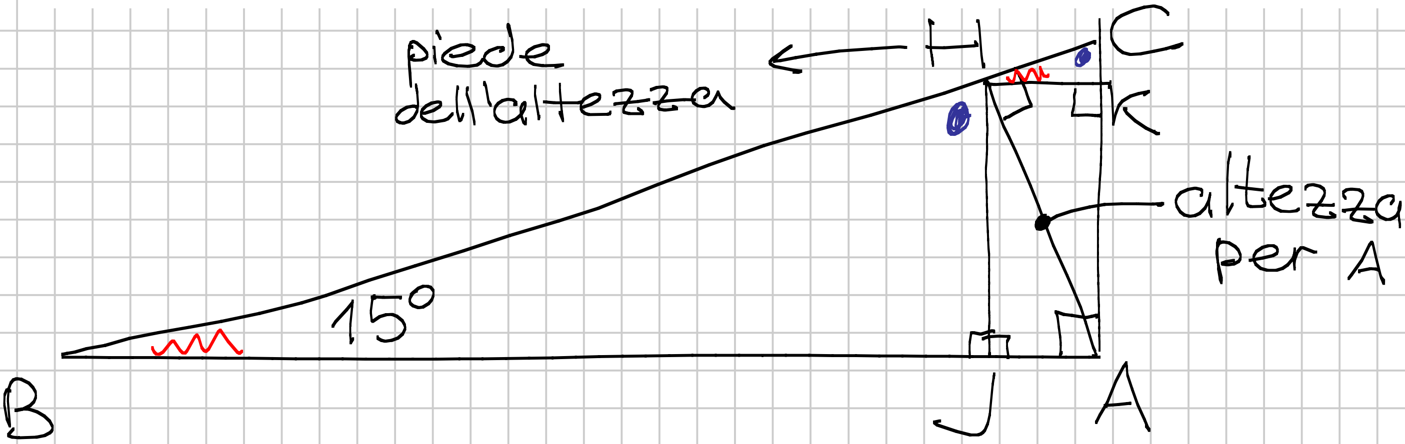
2 angoli

Rapporti tra i lati

2 lati e angolo compreso

2008

14. Sia ABC un triangolo rettangolo in A, con $A\hat{B}C = 15°$. Sia H il piede dell'altezza da A e siano J, K le proiezioni di H su AB e su AC. Sapendo che l'area di $AJHK$ è 45 cm^2, quanti cm^2 vale il prodotto $BJ \cdot CK$?



AJHK rettangolo

$\boxed{HJ \cdot HK \text{ la sua area}} = 45$

$J\hat{B}H = K\hat{H}C$

$BJH \sim HKC$

$\frac{BJ}{HK} = \frac{JH}{KC}$ $\qquad \underbrace{BJ \cdot KC}_{\text{richiesto}} = \boxed{JH \cdot HK} = 45$

$ABC \sim A'B'C'$

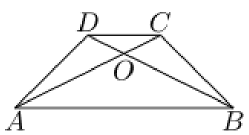
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = k$$

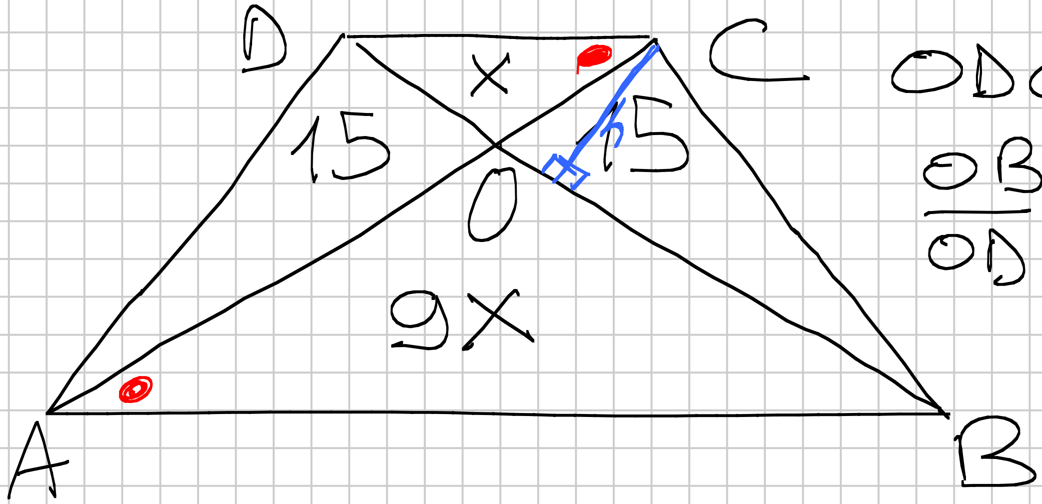
$$\frac{\text{Area}(ABC)}{\text{Area}(A'B'C')} = k^2$$

2008

3. In un trapezio isoscele $ABCD$ di base maggiore AB, le diagonali vengono divise dal loro punto di incontro O in parti proporzionali ai numeri 1 e 3. Sapendo che l'area del triangolo BOC è 15, quanto misura l'area dell'intero trapezio?

(A) 60 **(B)** 75 **(C)** 80 **(D)** 90 **(E)** 105.



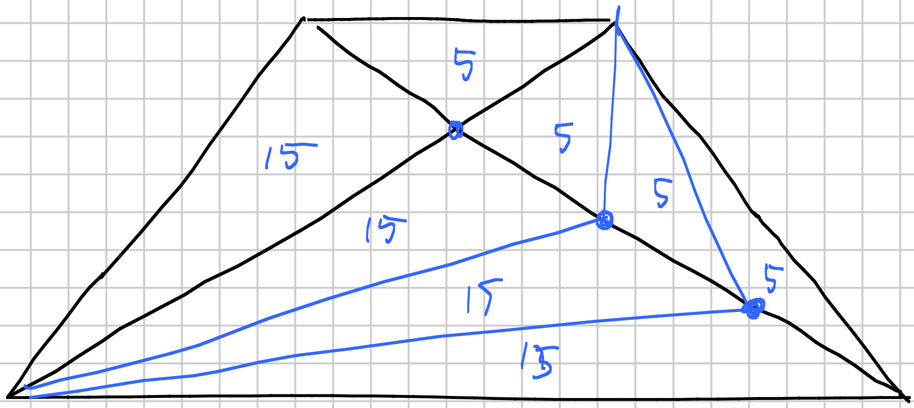


$ODC \sim OBA$

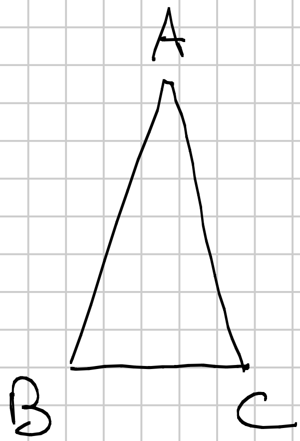
$$\frac{OB}{OD} = 3$$

$$x = \frac{OD \cdot h}{2} = \frac{1}{3} \underbrace{\frac{OB \cdot h}{2}}_{15} = 5$$

$$Area(ABCD) = 80$$



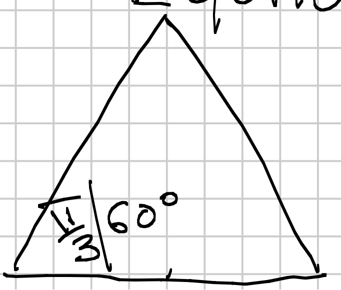
Triangolo isoscele



$$AB = AC$$

$$A\hat{B}C = A\hat{C}B$$

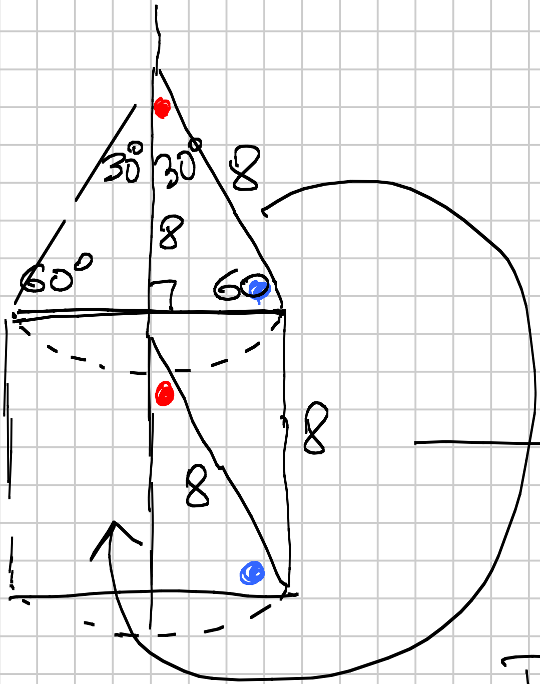
Equilatero <=> equiangolo

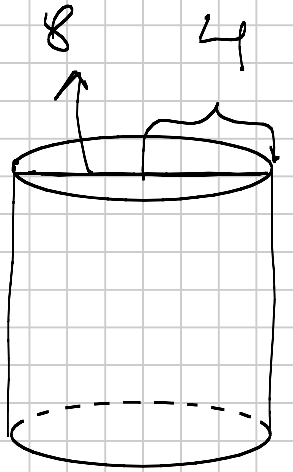


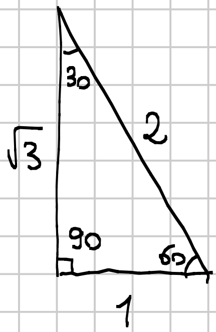
Rombo: quadrilatero equilatero

2009

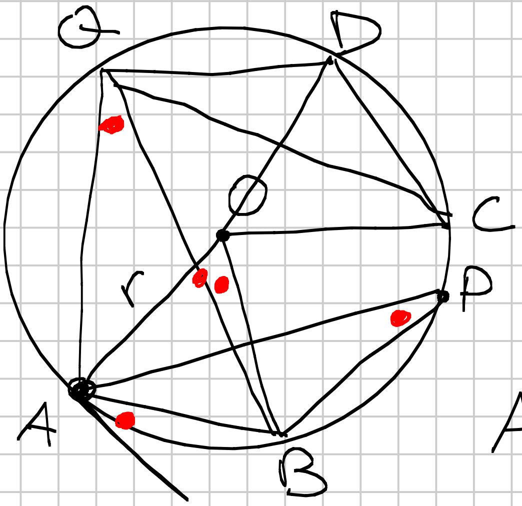
2. Il perimetro di un rombo è 32 cm e ciascuno dei due angoli acuti misura 30°. Quanto vale il volume del solido ottenuto facendo ruotare il rombo intorno a un suo lato?
(A) $128\sqrt{3}\pi$ **(B)** 128π **(C)** $64(\sqrt{3}-1)\pi$ **(D)** 64π **(E)** $32\sqrt{3}\pi$.







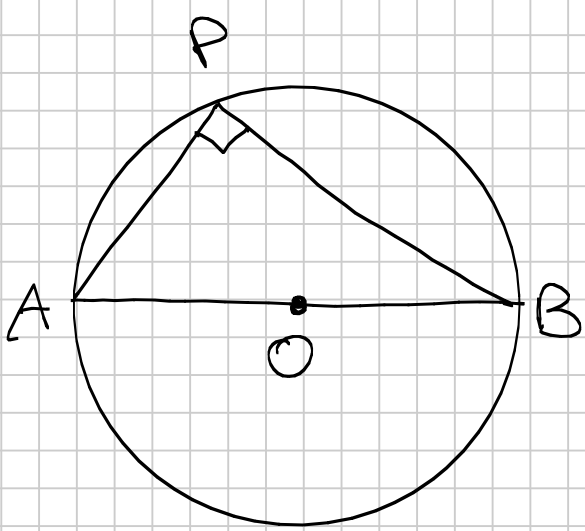
$$\pi \cdot 4^2 \cdot 8 = 128\pi$$

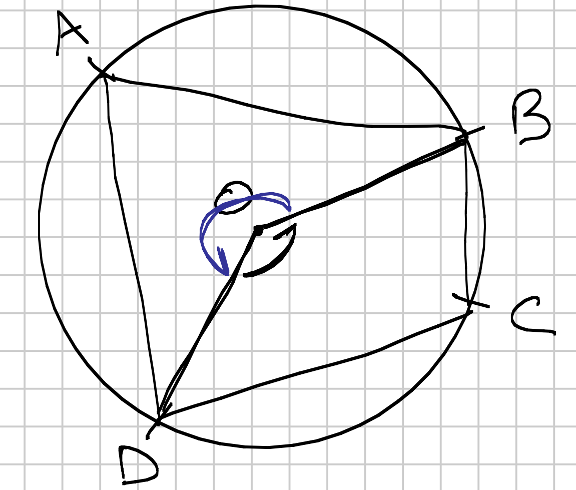


$$\left.\begin{aligned} \overset{\frown}{AB} &= \overset{\frown}{CD} \\ AB &= CD \\ A\hat{O}B &= C\hat{O}D \end{aligned}\right\}$$

$$A\hat{P}B = \frac{1}{2} A\hat{O}B$$

$$C\hat{Q}D = A\hat{Q}B$$





$$D\hat{O}B + B\hat{O}D = 2\pi$$

$$D\hat{A}B + B\hat{C}D = \pi$$

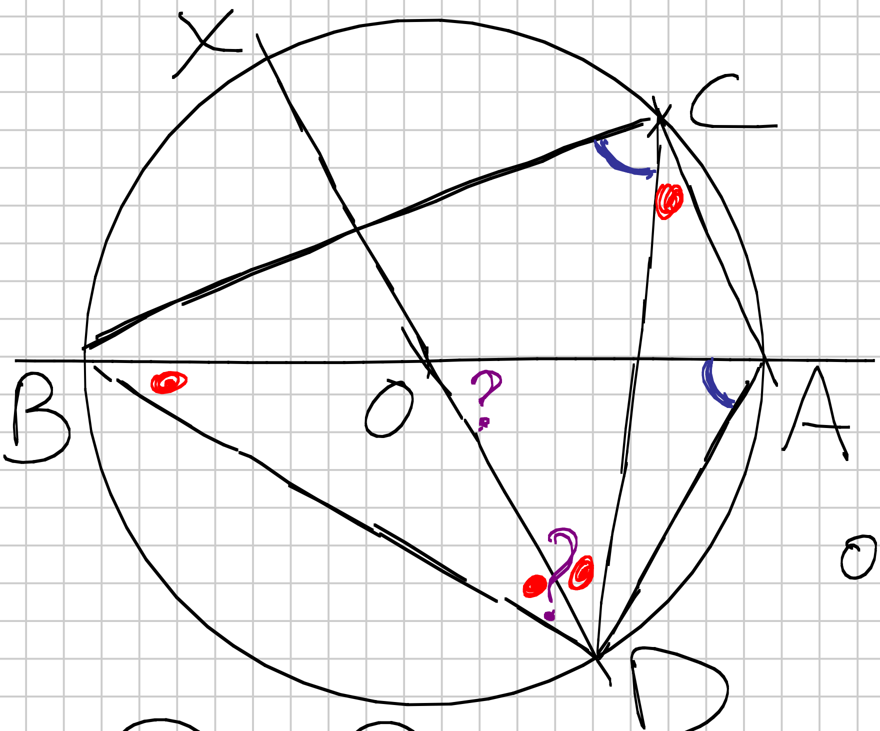
2007

18. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

È data una circonferenza di diametro AB e centro O. Sia C un punto sulla circonferenza (diverso da A e da B), e si tracci la retta r parallela ad AC per O. Sia D l'intersezione di r con la circonferenza dalla parte opposta di C rispetto ad AB.

i) Dimostrare che DO è bisettrice di $C\hat{D}B$.

ii) Dimostrare che il triangolo CDB è simile al triangolo AOD.



$$A\hat{C}D = C\hat{D}O$$

$$A\hat{C}D = A\hat{B}D$$

perché insistono su AD

$$O\hat{D}B = O\hat{B}D$$

$$A\hat{B}D$$

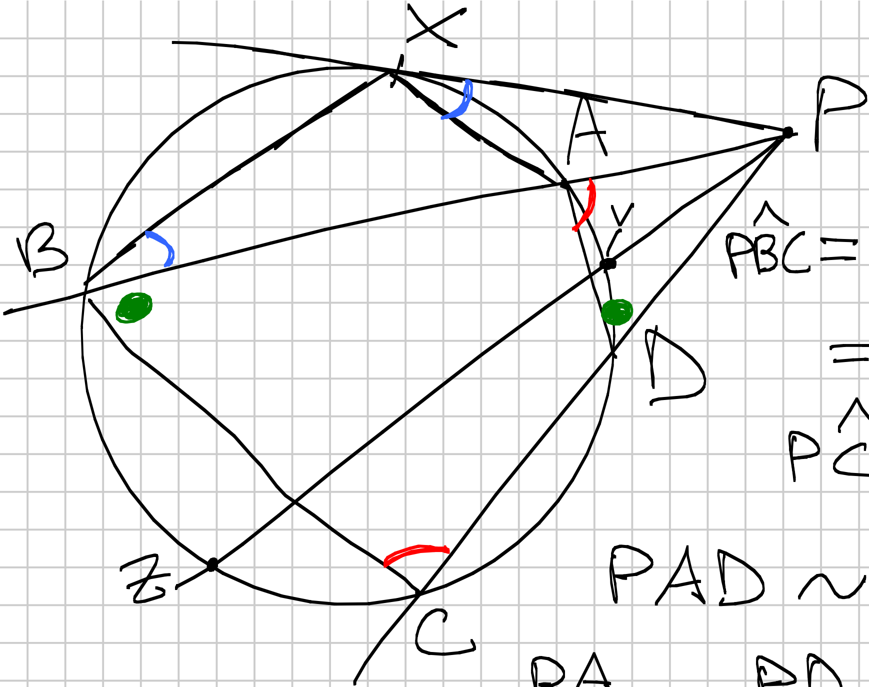
$\overset{\frown}{CX} = \overset{\frown}{AD}$ $\quad CX = AD$

$D\hat{A}B = D\hat{C}B$ insistono su DB

$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CX} = \overset{\frown}{XB}$ $\quad A\hat{O}D$

$\overset{\frown}{CB} = 2\overset{\frown}{AD}$ $\quad C\hat{O}B$

$C\hat{O}B = 2A\hat{O}D$ $\quad C\hat{D}B = \frac{1}{2}C\hat{O}B = A\hat{O}D$



$\hat{PBC} = \hat{ABC} = \pi - \hat{ADC} =$

$= \hat{PDA}$

$\hat{PCB} = \hat{PAD}$

$PAD \sim PCB$

$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$ $\quad PA \cdot PB = PD \cdot PC =$

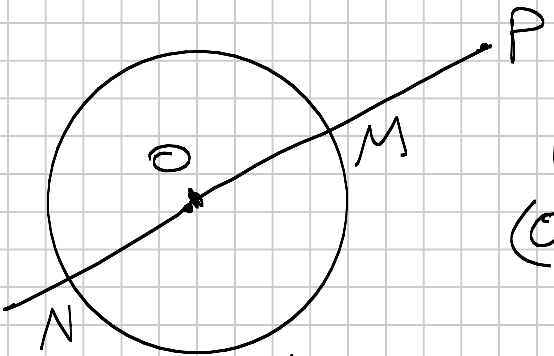
$\hat{PXA} = \hat{PBX}$ (insistono su AX) $= PX^2 =$

$= PY \cdot PZ$

$PXA \sim PBX$

$\frac{PX}{PB} = \frac{PA}{PX}$ $\quad PX^2 = PA \cdot PB$

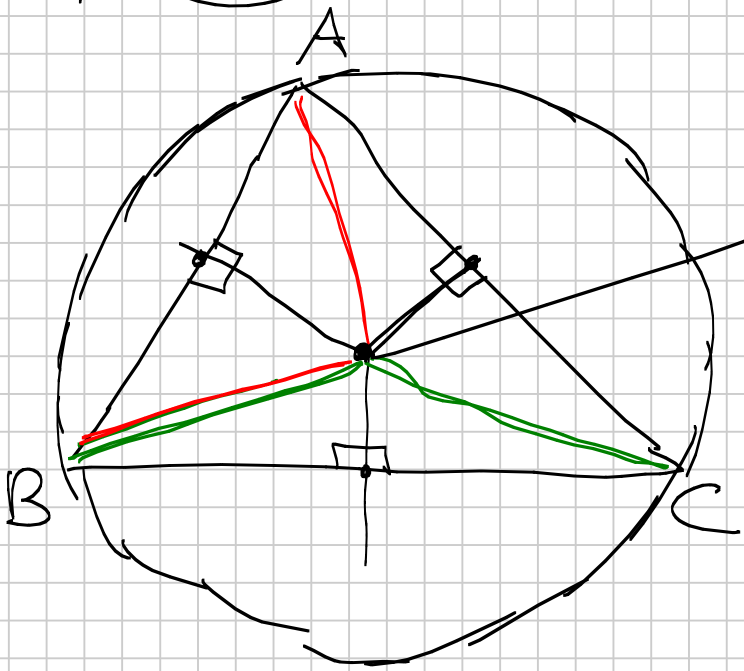
Teorema delle secanti



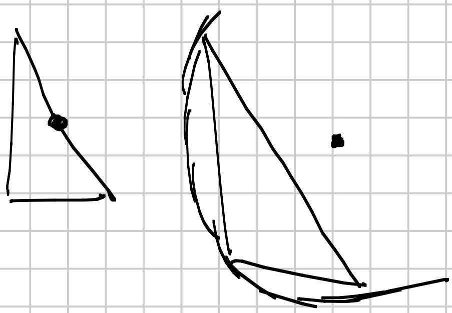
Teorema della tangente e della secante

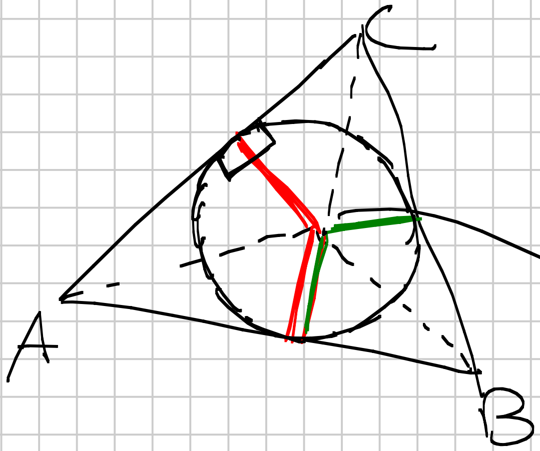
$PM \cdot PN$

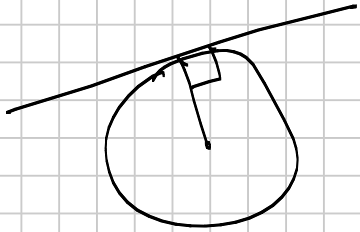
$(OP-r)(OP+r) = OP^2 - r^2$



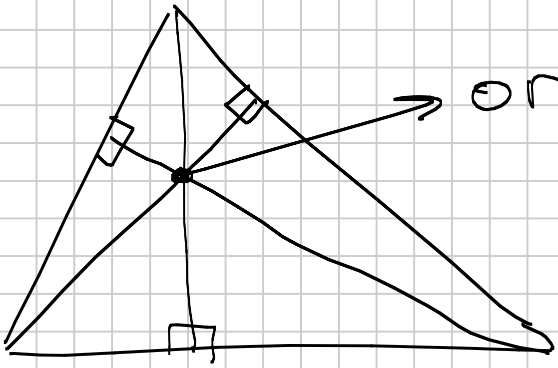
circocentro



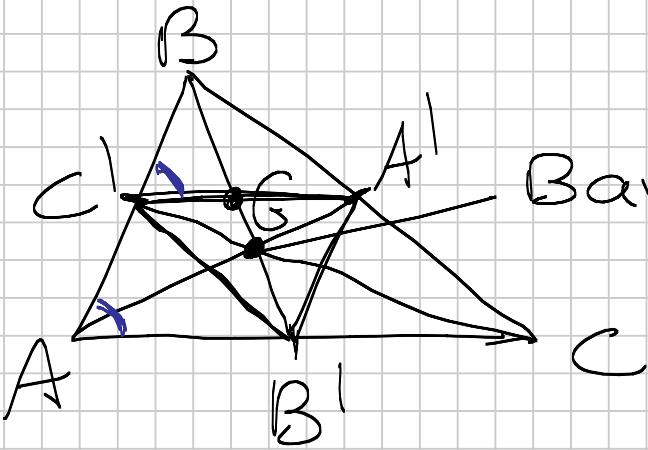




Incentro



ortocentro



Baricentro

$$\frac{BC'}{BA} = \frac{BA'}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$BC'A' \sim BAC$$

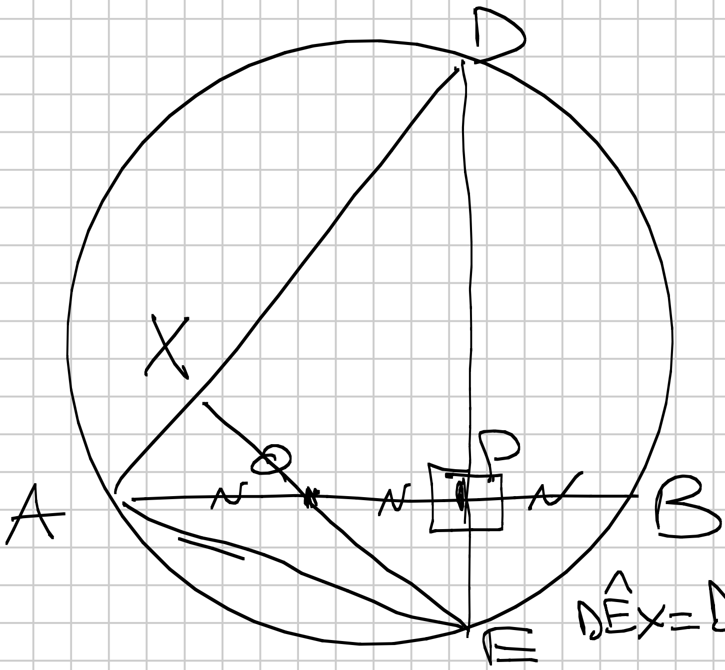
$B\hat{C}'A' = B\hat{A}C$ $\quad A'C' \parallel AC \quad A'B' \parallel AB$

$B'C' \parallel BC$

$$BG = 2GB'$$

2008

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**
Sia AB una corda di una circonferenza e P un punto interno ad AB tale che $AP = 2PB$. Sia DE la corda passante per P e perpendicolare ad AB. Dimostrare che il punto medio Q di AP è l'ortocentro di ADE.



$$\widehat{DEX} = \frac{\pi}{2} - \widehat{EDX}$$

$$X = EQ \cap AD$$

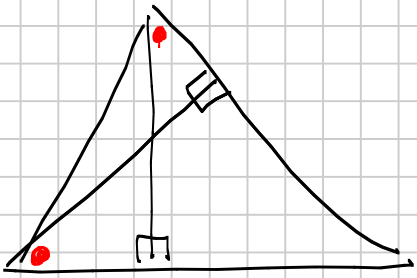
$$QP = PB$$

$$QPE = BPE = \frac{\pi}{2}$$

$$QPE \cong BPE$$

$$\widehat{DEX} = \widehat{DEQ} = \widehat{BED} = \widehat{BAD} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \widehat{PDA} = \frac{\pi}{2} - \widehat{EDX}$$



2006 11. I membri di una tribù hanno dieci dita alle mani e nove ai piedi e quindi contano indifferentemente in base 10 o 19. Nella loro cultura matematica, un numero intero positivo è detto "sacro" se in entrambe le basi si scrive con le stesse due cifre (comprese tra 1 e 9). Quanti sono i numeri sacri?

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
A	10
B	11
C	12
D	13
E	14
F	15
G	16
H	17
I	18
10	19
11	20
12	21
⋮	⋮
1I	37
20	38
⋮	
99	
⋮	
9I	
A0	
⋮	
II	
100	$361 = 19^2$

| 5 | 9 | 6 |

6 0

$$[ab]_{19} = 19a + b = [ab]_{10} = 10a + b$$

$$19a + \cancel{b} = 10a + \cancel{b}$$

$$9a = 0 \qquad a = 0$$

$$[0b]_{19} = [0b]_{10}$$

$$[ab]_{19} = 19a + b = 10b + a = [ba]_{10}$$

$$18a = 9b$$

$$2a = b$$

$a = 1 \quad b = 2 \qquad [12]_{19} = [21]_{10}$

$a = 2 \quad b = 4 \qquad [24]_{19} = [42]_{10}$

3

4

2007 3. La rappresentazione in base 2 di un numero a è 1|110|000|100|111|010|101|110|100|001. Qual è la settima cifra da sinistra della rappresentazione di a in base 8?

I II III IV V VI VII

5 6 4 1

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6.

base 10	8	2
0	0	000
1	1	001
2	2	010
3	3	011
4	4	100
5	5	101
6	6	110
7	7	111
8	10	1000
9	11	1001
10	12	1010
11	13	1011
12	14	1100
13	15	1101
14	16	1110
15	17	1111
16	20	10000
17	21	10001
18	22	10010
19	23	10011
⋮	⋮	⋮

128	64	32	16	8	4	2	1
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	1	0	1	0	1	1	0

D 6

D 6

$[a\,b\,c]_{19} \overset{?}{=} 19^2 a + 19 b + c$

$128+64+16+4+2 = [214]_{10}$

$= 13 \cdot 16 + 6$

CRITERI DI DIVISIBILITÀ E CONGRUENZA

$7 \equiv 1 \pmod 3$ $\qquad 7^2 \equiv 7 \cdot 7 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod 3$

$16 \equiv 13 \equiv 10 \equiv 7 \equiv 4 \equiv 1 \equiv -2 \equiv -5 \pmod 3$

somma, moltiplicazione si comportano bene con le congruenze

$24 + 17 = 41 \equiv 6 \pmod 7$

$3 + 3 = 6$

$\boxed{2^7 \overset{?}{\equiv} 2^2 \quad \text{NO} \quad \pmod 5}$

$12! \equiv \qquad \pmod{13}$

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \equiv 24 \equiv 11 \equiv -2$

$-2 \cdot 5 \equiv -10 \equiv 3$

$3 \cdot 6 \equiv 18 \equiv 5$

$5 \cdot 7 \equiv 35 \equiv -4$

$-4 \cdot 8 \equiv -32 \equiv 7$

$2^{70} + 3^{70}$ multiplo di 13

$= 4^{35} + 9^{35} \equiv 4^{35} + (-4)^{35}$

$= 4^{35} - 4^{35} \equiv 0 \pmod{13}$

$a - b = a + (-1) \cdot b$

$x \equiv 2 \pmod 4$ $\qquad x = 2 + 4k \qquad \frac{x}{2} = 1 + 2k$

$\frac{x}{2} \equiv 1 \pmod 2$

- divisibilità per 11 $\boxed{10 \equiv -1 \pmod{11}}$

$$\overbrace{3\,4\,0\,7\,1\,5\,9}^{16}_{13} \equiv +13 - 16 = -3 \pmod{11}$$

$$3407162 = 11 \cdot 309742$$

$$9 + 5\cdot 10 + 1\cdot 10^2 + 7\cdot 10^3 + 0\cdot 10^4 + 4\cdot 10^5 + 3\cdot 10^6 \equiv$$
$$\equiv 9 + 5(-1) + 1(-1)^2 + 7(-1)^3 + 0(-1)^4 + 4\cdot(-1)^5 + 3(-1)^6 \pmod{11}$$
$$= 9 - 5 + 1 - 7 + 0 - 4 + 3 = -3$$

- divisibilità per 9 $\quad 10 \equiv 1 \pmod 9$

basta sommare le cifre

$$374 \equiv 3+7+4 = 14 \equiv 1+4 = 5 \pmod 9$$

$$374 \equiv 5 \pmod 9 \Rightarrow 374 = 5 + 9\cdot c \Rightarrow 374 \equiv 5 \equiv 2 \pmod 3$$

(per 3 è uguale)

- divisibilità per 2, 4, 8, 16...

basta guardare le ultime 1, 2, 3, 4 ... cifre

$$726 = 26 + 7\cdot \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{100} \equiv 26 \equiv 2 \pmod 4$$

(per 5, 25, 125, ... uguale)

2008 7. In quanti modi si possono ordinare le cifre 1, 2, 4, 7 e 9 affinché formino un numero di cinque cifre divisibile per 11?

(A) ~~0~~ (B) ~~1~~ (C) ~~10~~ (D) 12 ? (E) 24. ?

$[a\,b\,\overset{?}{c}\,d\,e]_{10}$ $\qquad \underbrace{(\overset{1,7,9}{a+c+e})}_{\substack{m \\ \shortparallel \\ 17}} - \underbrace{(\overset{4,2}{b+d})}_{\substack{n \\ \shortparallel \\ 6}}$ $\qquad 17 - 6 = 11$

$\{1, 2, 4, 7, 9\}$

12 soluzioni trovate

Cerco altre eventuali scelte per m, n in modo tale che

$m-n$ sia multiplo di 11

$$\boxed{m+n = 23 = 1+2+4+7+9}$$

$$\cancel{\begin{cases} m+n = 23 \\ m-n = 0 \end{cases}} \qquad \boxed{\begin{cases} m+n = 23 \\ m-n = 11 \end{cases} \quad m = 17 \quad n = 6} \qquad \boxed{\begin{cases} m+n = 23 \\ m-n = -11 \end{cases} \quad 6 = \frac{23+(-11)}{2} = m \quad 17 = \frac{23-(-11)}{2} = n} \qquad \cancel{\begin{cases} m+n = 23 \\ m-n = 22 \end{cases}} \qquad \cancel{\begin{cases} m+n = 23 \\ m-n = -22 \end{cases}}$$

12 soluz.

$$a+b = 37 \qquad \frac{37+17}{2} = 27 \qquad 27+10 = 37$$

$$a-b = 17 \qquad \frac{37-17}{2} = 10 \qquad 27-10 = 17$$

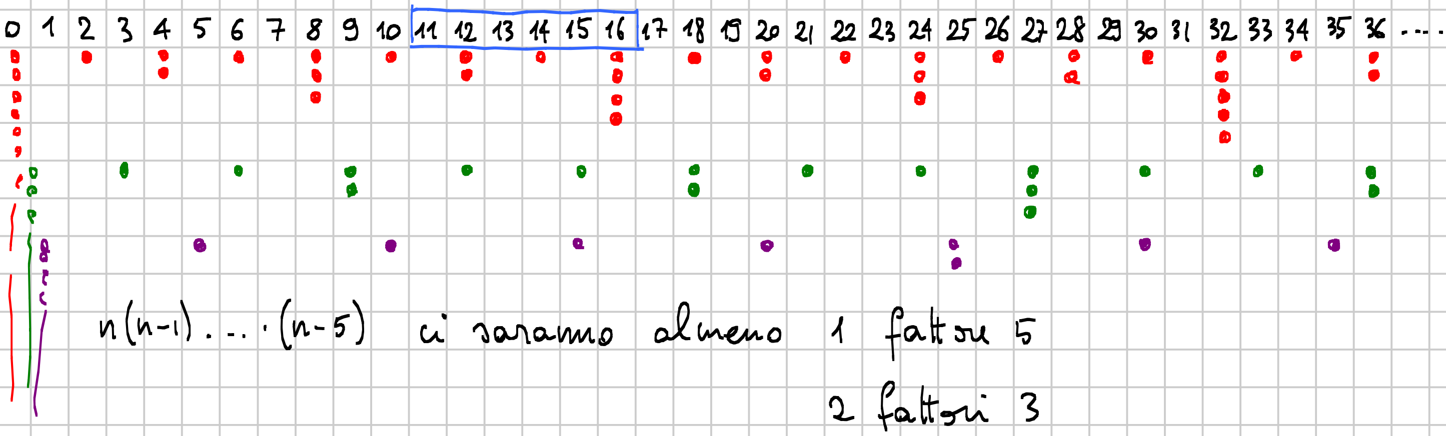
2009 13. Determinare il massimo intero positivo k tale che k^2 divida $\dfrac{n!}{(n-6)!}$ per ogni $n > 6$.

il prodotto di 6 numeri interi positivi consecutivi

$$n = 7 \qquad \frac{7!}{1!} = 7!$$

$$n = 8 = \frac{8!}{2!} = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3$$

$$n = 13 = \frac{13!}{7!} = 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8$$



$n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-5)$ ci saranno almeno 1 fattore 5

2 fattori 3

4 fattori 2

Il MCD di tutti i numeri del tipo $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-5)$ è $2^4\cdot 3^2\cdot 5$

$12 = 2^2\cdot 3$ è il più grande numero il cui quadrato divide $2^4\cdot 3^2\cdot 5$

2010

11. In una scatola ci sono venti palline numerate da 1 a 20. Ciascun numero è presente in una e una sola di queste palline. Quante palline diverse dobbiamo estrarre come minimo, per essere sicuri che il prodotto dei loro numeri sia un multiplo di 12?
(A) 7 **(B)** 11 **(C)** 12 **(D)** 15 **(E)** 18.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

7 inutili
7 senza fattori 3

15 bastano

7 inutili
3 senza fattori 2
1 con 1 solo fattore 2

12 bastano

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

2010

5. Per quanti interi relativi n si ha che $\frac{3n}{n+5}$ è intero e divisibile per 4?
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 8 **(E)** più di 8.

0 è divisibile per 4? si

$$\frac{3n}{n+5} = a = 4k$$

INTERI

$n = 0$ $\quad a = 0$ ✓

$n = 4$ $\quad a = \frac{12}{9}$ NO

$n = 8$ $\quad a = \frac{24}{13}$ NO

$n = -4$ $\quad a = -\frac{12}{1} = -12$ ✓

$$\frac{3n}{n+5} - 3 = \frac{3n - 3n - 15}{n+5}$$

$$\boxed{a = \frac{3n}{n+5} = 3 - \frac{15}{n+5}}$$

allora $\frac{15}{n+5}$ è intero

$n+5$ deve essere un divisore di $15 = 3 \cdot 5$

$112 = 2 \cdot 56 = 2^4 \cdot 7$ ha $5 \cdot 2$ divisori

$n+5$	n	a
1	−4 ✓	−12 ✓
3	−2	−2
5	0 ✓	0 ✓
15	10	2
−1	−6	18
−3	−8 ✓	8 ✓
−5	−10	6
−15	−20 ✓	4 ✓

4 soluzioni

2009

7. Determinare il più grande intero n con questa proprietà: esistono n interi positivi distinti $a_1, \dots a_n$ tali che, comunque se ne scelgano fra essi due distinti, né la loro somma né la loro differenza siano divisibili per 100.
(A) 49 **(B)** 50 **(C)** 51 **(D)** 99 **(E)** 100.

60 proibisce : 40, 140, 160, 260, 240, ...

72 " : 28, 128, 228, ..., 172, 272, ...

Preso ogni insieme tipo $\{72, 172, \dots, 28, 128, 228 \dots\}$

qualunque rappresentante di questo insieme vieta tutti gli altri

$\{1, 101, \dots, 99, 199, \dots\}$ lavoriamo modulo 100

$\{1, 99\}$
$\{2, 98\}$
....
$\{49, 51\}$
49 elementi

$\{50\}$ modulo 100 : $\{50, 150, 250, \dots\}$

$\{50\}$
$\{0\}$
2 elem

In totale 51 al massimo.

2008

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

a) Si hanno sette numeri interi positivi a, b, c, d, e, f, g tali che i prodotti ab, bc, cd, de, ef, fg, ga sono tutti cubi perfetti. Dimostrare che anche a, b, c, d, e, f, g sono cubi perfetti.

b) Si hanno sei numeri interi positivi a, b, c, d, e, f tali che i prodotti ab, bc, cd, de, ef, fa sono tutti cubi perfetti. È sempre vero che a, b, c, d, e, f sono tutti cubi perfetti?

Nota: si dice cubo perfetto un intero m tale che $m = n^3$ per qualche intero n.

b) Cerco un controesempio

$a = 6^2 \quad b = 36^4 \quad c = 6^2 \quad d = 36^4 \quad e = 6^2 \quad f = 36^4$

$ab = \square \quad bc = \square \quad ef = \square \quad af = \square$

a)
$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n} \qquad \alpha_i \geq 0$

$b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n} \qquad \beta_i \geq 0$

$c = p_1^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\gamma_n} \qquad \vdots$

...

$g = p_1^{\eta_1} \cdot p_2^{\eta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\eta_n} \qquad \eta_n \geq 0$

"divide"

Lavoro su p_1. $\quad ab = p_1^{\alpha_1+\beta_1} \cdot \text{roba} \qquad p_1^{\alpha_1+\beta_1} \mid ab$

$$p_1^{\alpha_1+\beta_1} \parallel ab = \square \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 + \beta_1 \equiv 0 \pmod 3$$

"divide esattamente"

$$p_1^{\beta_1+\gamma_1} \parallel bc = \square \quad \Rightarrow \quad \beta_1 + \gamma_1 \equiv 0 \pmod 3$$

$\dots\dots$

$$fg = \square \quad \Rightarrow \quad \zeta_1 + \eta_1 \equiv 0 \pmod 3$$

$$ga = \square \quad \Rightarrow \quad \eta_1 + \alpha_1 \equiv 0 \pmod 3$$

(mod 3)

α_1	β_1	γ_1	δ_1	ε_1	ζ_1	η_1	α_1	
0	0	0	0	0	0	0	0	UNICA POSSIBILITÀ!
1	2	1	2	1	2	1	2	ASSURDO
2	1	2	1	2	1	2	1	DOH!

$\alpha_1, \beta_1, \dots, \eta_1$ sono multipli di 3

Analogamente $\alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_3, \beta_3, \dots, \alpha_n, \beta_n \dots, \eta_n$ sono multipli di 3

Quindi $a, b, c, \dots g = \square$.

COME SI SOMMANO LE PROGRESSIONI ARITMETICHE

$$1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1 + 8 + 27 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}$$

minimo

massimo

$$\underbrace{12 + 19 + 26 + 33 + \dots + 82}_{11} = \frac{12 + 82}{2} \cdot 11$$

quanti addendi

caso particolare della somma dei dispari

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2n - 1 = \frac{1 + 2n - 1}{2} \cdot n = n^2$$