MACOMER STAGE OLIMPIADI MATEMATICA

TEORIA DEI NUMERI

Note Title 30/01/2012

SCRITTURA IN BASI DIVERSE

2006.11 ~~0~~ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 (A B C D E F G H I)

$$[3\,3]_{19} = 3\cdot 19 + 3 = [60]_{10}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}[a\,b]_{19} = [a\,b]_{10} \\ \text{oppure} \\ [a\,b]_{19} = [b\,a]_{10}\end{array}}$$

$$19a + \cancel{b} = 10a + \cancel{b} \qquad 9a = 0 \qquad a = 0$$

vietato

$$19a + b = 10b + a \qquad 18a = 9b \qquad \boxed{2a = b}$$

$$[1\,2]_{19} = [2\,1]_{10}$$
$$[2\,4]_{19} = [4\,2]_{10}$$
$$[3\,6]_{19} = [6\,3]_{10}$$
$$[4\,8]_{19} = [8\,4]_{10}$$

2007.3

base 2	base 8
0	0
1	1
10	2
11	3
100	4
101	5
110	6
111	7
1000	10
1001	11
1010	12
1011	13
⋮	⋮
1111	17
10000	20
⋮	⋮
111111	77
1000000	100

$$[a_n \dots a_2 a_1 a_0]_8 = [x_n y_n z_n\, x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1} \dots z_1 x_0 y_0 z_0]_2$$

($3n+2$, $3n+1$, $3n$, … 4 3 2 1 0)

$$[a\,b]_8 = 8a + b$$

$$[a\,b\,c]_8 = 64a + 8b + c = 8^2\cdot a + 8^1\cdot b + 8^0\cdot c$$

$$8^0\cdot a_0 + 8^1\cdot a_1 + 8^2\cdot a_2 + \dots + 8^n\cdot a_n$$

$$\underbrace{2^0\cdot z_0 + 2^1\cdot y_0 + 2^2\cdot x_0}_{} + \underbrace{2^3\cdot z_1 + 2^4\cdot y_1 + 2^5\cdot x_1}_{} + \dots + \underbrace{2^{3n+2}\, x_n}_{}$$

$$2^0 z_0 + 2^1 y_0 + 2^2 x_0 + 8\left(2^0 z_1 + 2^1 y_1 + 2^2 x_1\right) + 8^2\left(\qquad\right) + \dots$$

$$a_0 = z_0 + 2y_0 + 4x_0$$

$$a_1 = z_1 + 2y_1 + 4x_1$$

$$\dots\dots$$

I II III IV V VI VII

3. La rappresentazione in base 2 di un numero a è 1|110|000|100|111|010|101|110|100|001. Qual è la settima cifra da sinistra della rappresentazione di a in base 8?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6.

5

2009.9 $\quad n = [a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0]_2 =$

$2n = [a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0]_3 =$

$[1\ 0]_2 = 2 \qquad [1\ 0]_3 = 3$

$[1\ 1]_2 = 3 \qquad [1\ 1]_3 = 4$

1 0 0	4	9
1 0 1	5	10
1 1 0	6	12
1 1 1	7	13

equazione con 4 cifre

$$2\,[abcd]_2 = [abcd]_3 = d + 3c + 9b + 27a$$

$$2(d + 2c + 4b + 8a) \overset{!}{=}$$

$$2d + 4c + 8b + 16a = d + 3c + 9b + 27a$$

$$d + c = b + 11a$$

con 5 cifre

$$2d + 4c + 8b + 16a + 32z = d + 3c + 9b + 27a + 81z$$

$$d + c = b + 11a + 49z + 179y + \dots$$

CRITERI DI DIVISIBILITÀ IN BASE 10

2: ultima cifra

3: $371 = 3 \cdot 123 + 2$ $\qquad$ sommo le cifre

$11 = 3 \cdot 3 + 2$

$2 = 3 \cdot 0 + 2$

9: $789 = 9 \cdot 87 + 6$

$24 = 9 \cdot 2 + 6$

$6 = 9 \cdot 0 + 6$

4: ultime due cifre

$71482|\underline{52} = 71482 \cdot 100 + 52 = (71482 \cdot 25) \cdot 4 + 13 \cdot 4$ $\quad$ ok

8: ultime tre cifre (infatti $1000 = 8 \cdot 125$)

16: ultime 4 cifre (infatti $10000 = 16 \cdot 625$)

...

5: ultima cifra 0 o 5

25: ultime due cifre 00, 25, 50 o 75

6 : guardo 2 e 3

7 : ??? conviene dividere davvero $\boxed{1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13}$

11 : sommo le cifre a segni alterni : quella delle unità con il '+'

$7148252 = 11 \cdot \text{mostro} + 1$

$2+2+4+7-(5+8+1) = 15-14 = 1$

2008.7 $[abcde]_{10}$ multiplo di 11 se $\underbrace{a+c+e}-(\underbrace{b+d})$ multiplo di 11

$\overbrace{1,2}^{6},4,7,9$ scelgo a,c,e ; b,d

$\underbrace{1,2,4,7,9}_{17}$ $a+c+e = m$ $b+d=n$

vorrei $m=n$ $m+n = a+b+c+d+e = 23$

non è possibile $m=n$

$$\begin{cases} m = 11+n \\ m+n = 23 \end{cases} \qquad \begin{cases} m+n = 23 \\ m-n = 11 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{23+11}{2} = m = 17 \\ \frac{23-11}{2} = n = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 22+n \\ m+n = 23 \end{cases} \qquad \begin{cases} m+n = 23 \\ m-n = 22 \end{cases} \qquad \frac{23+22}{2} = 22,5$$

NO

m	n	m	n	m

2 , 4 1 , 7 , 9 viene sempre un multiplo di 11

$2 \times 3 \times 2 = 12$

NUMERI PRIMI

2010.8 4,6 7,1

$$\frac{s}{k} = \frac{v_1+v_2+\ldots+v_k}{k} = 7,1 = \frac{71}{10} \qquad \frac{s}{k} = \frac{71}{10} \iff 10s = 71k$$

71 è primo

i. è un numero ≥ 2 divisibile solo per 1 e per se stesso

ii. è un numero ≥ 2 che se divide ab, divide a oppure b

$a = 27$ $b = 40$ $ab = 1080$

$n = 12$ 12 divide 1080 ma non divide né 27 né 40

$1080 = 27 \cdot 40 = \boxed{9 \cdot 3} \cdot \boxed{4 \cdot 10}$ invece un primo non si spezza

$71k = 10s \quad \Leftrightarrow \quad 10s$ è multiplo di 71 $=$ 71 divide $10s$

allora 71 divide 10 o divide s, quindi 71 divide s $=$ s è multiplo di 71

$s = 71a$

$71k = 10 \cdot 71a \quad \Leftrightarrow \quad k = 10a$ $\qquad$ k è multiplo di 10.

$k \geq 10$

$$\frac{s_1}{k_1} = 4{,}6 = \frac{46}{10} = \frac{23}{5} \qquad \ldots\ k_1 \text{ è multiplo di } 5 \qquad k_1 \geq 5$$

$$\frac{4+4+5+5+5}{5} = 4{,}6 \qquad \frac{7+7+\ldots+7+8}{10} = 7{,}1$$

$1\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ 4\ \boxed{5}\ 6\ \boxed{7}\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ \boxed{15\ 16\ 17\ 18\ 19\ 20\ 21\ \ldots}\ \ldots$

2009.13 $\qquad \dfrac{n!}{(n-6)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdot \cancel{\ldots} \cdot \cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1}{(n-6)(n-7)(n-8)\cdot \ldots \cdot \cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$

$3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$

$2! = 2\cdot 1 = 2$

$1! = 1$

$0! = 1$

$\dfrac{7!}{1!} = 5040 = 2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7 = (2^2\cdot 3)^2\cdot 5\cdot 7 \qquad \boxed{k = 12}$

$\dfrac{8!}{2!} = 20160 = 2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7 = (2^3\cdot 3)^2\cdot 5\cdot 7 \qquad k = 24$

$\dfrac{9!}{3!} = 60480 = 2^6\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7 = (2^3\cdot 3)^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \qquad k = 24$

$\dfrac{10!}{4!} = 151200 = 2^5\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7 = (2^2\cdot 3\cdot 5)^2\cdot 2\cdot 3\cdot 7 \qquad k = 60$

la potenza di 2 che divide $\dfrac{n!}{(n-6)!}$ è sempre almeno 2^4 (esattamente tre pari di cui uno almeno multiplo di 4)

la potenza di 3 che divide $\dfrac{n!}{(n-6)!}$ è sempre almeno 3^2

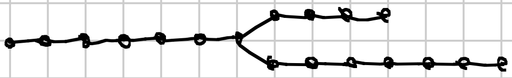
$(\ldots)$

$2^4\cdot 3^2 \ldots = (2^2\cdot 3)^2 \cdot \ldots$

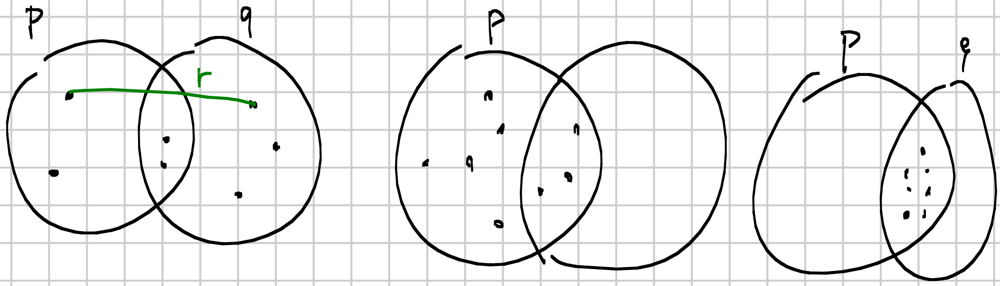
Il massimo è 12

2010.11 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

2 3 4 6 4 3 2 12 2 3 4 6 4



Alla 15^a estratta il prodotto sarà multiplo di 12



→ 2 5 10
→ 2 3 2 12
→ 2 3 6
→ 3 5 15

5 11 71

2 3 5

$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$

2008.17 b)

a	b	c	d	e	f	a
2	4	2	4	2	4	2

controesempio

ab bc cd de ef fa

a) $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ $\quad \alpha_i \geq 0$ $\quad \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ insieme di tutti i primi che compaiono in $a, \ldots, g$

$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$ $\quad \beta \geq 0$

$c =$ $\quad \gamma$

$\ldots$ $\quad \delta$, η, ε, $\xi \geq 0$

$g = p_1^{\xi_1} p_2^{\xi_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\xi_k}$

$ab = p_1^{\alpha_1+\beta_1} p_2^{\alpha_2+\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k+\beta_k} = \square^3$ allora $\boxed{\alpha_1+\beta_1 = 3h_1}$ $\quad \alpha_2+\beta_2 = 3h_2 \ldots$

α_1 è multiplo di 3 → β_1 è multiplo di 3

α_1 dà resto 1 nella divisione per 3 → β_1 dà resto 2

α_1 dà resto 2 nella divisione per 3 → β_1 dà resto 1

$bc = p_1^{\beta_1+\gamma_1} \cdot \ldots = \square^3$ allora $\boxed{\beta_1+\gamma_1 = 3t_1}$

Ciclicamente

$\alpha_1 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow \beta_1 \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow \gamma_1 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow \ldots$

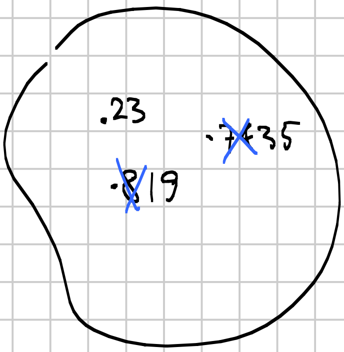
$\ldots \Rightarrow \xi_1 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow \alpha_1 \equiv 2 \pmod 3$ assurdo

$\alpha_1 \equiv 2 \pmod 3$ analogamente assurdo

quindi $\alpha_1 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow \beta_1 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow \dots$

Tutti gli esponenti di tutti i primi sono multipli di 3 $\Rightarrow a, b, \dots, g = \square$

2009.7



no: 77, 177, 277, ...
23, 123, 223, ...

Tutti i numeri dovranno avere ultime due cifre distinte

ovvero

Tutti i numeri dovranno avere resti distinti nella divisione per 100

Posso ridurmi a considerare solo i numeri tra 1 e 100

$$\left.\begin{array}{ccc} 23 & \longleftrightarrow & 77 \\ 19 & \longleftrightarrow & 81 \\ 35 & \longleftrightarrow & 65 \\ 1 & \longleftrightarrow & 99 \\ & \cdots\cdots & \\ 49 & \longleftrightarrow & 51 \\ 50 & & \\ 100 & & \end{array}\right\} 51$$

5 primi   3 secondi

$5 \times 3 = 15$

n elementi

$\{1, 2, 3, ----, n\}$

sì sì sì sì
NO NO NO NO

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ---- \cdot 2 = 2^n$

1973   5315   6206

4822

1 caso

Prima > Ultima

9 cifre

$\frac{9 \cdot 8}{2} = 36 \cdot 10 \cdot 10$

3600

2 caso   Prima = Ultima

$9 \cdot \frac{10 \cdot 9}{2} = 9 \cdot 45 = 405$

$3600 + 405 = 4005$

Tutti i casi

$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 9 = 8100$

Palindromi

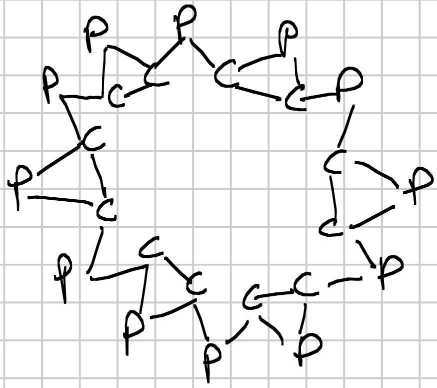
$9 \cdot 10 = 90$

$8100 - 90 = 8010$ numeri non palindromi

Diversi da se stessi letti al contrario

4005 coppie

In ogni coppia uno è maggiore dell'altro



$\underset{2}{P} = \underset{3}{C}$

$\frac{2P+3C}{2} = 30$

$\frac{5P}{2} = 30$

$P = 12$

$C = 12$

24

$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \quad \alpha > 0$

$d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k} \quad 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$

β_1	β_2	β_k
0	0	0
1	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
α_1	α_2	α_k
α_1+1	α_2+1	α_k+1

$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k+1)$

$12 = 2^2 \cdot 3 \qquad 1, 2, 3, 4, 6, 12$

$$\left.\begin{matrix} 2^0 \\ 2^1 \\ 2^2 \end{matrix}\right\} \times \left\{\begin{matrix} 3^0 \\ 3^1 \end{matrix}\right. = 6$$

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdot \ldots \cdot(\alpha_k+1) = 6$$

$$2^a \cdot 3^b \cdot \cancel{p^c} \ldots$$

$$\underbrace{(a+1)}_{\geq 2}\underbrace{(b+1)}_{\geq 2}\cdot \underbrace{\cancel{(c+1)}}_{\geq 2} = 6 = 2 \cdot 3$$

$a+1 \quad b+1$

$b+1 \quad a+1$

$$2 \cdot 3^2 = 18$$

$$2^2 \cdot 3 = 12$$

vogliamo

$$\underset{\text{dispari}}{(\alpha_1+1)}\underset{\text{dispari}}{(\alpha_2+1)}\cdot \ldots \cdot\underset{\text{dispari}}{(\alpha_k+1)} = \text{dispari}$$

α_1 pari $\quad \alpha_2$ pari $\; \ldots \; \alpha_k$ pari

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} =$$
$$= \left(p_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \cdot p_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\frac{\alpha_k}{2}}\right)^2$$

OFF

Numero dispari di cambi

lampadina n

Si cambia al passo k, se k divide n

$$97 \cdot 97 = 9409$$

$$(100-a)^2 = \underset{100^2}{10000} - 2\cdot a\cdot 100 + a^2$$

$a=3$ $+9$

$$10000 - 600 + 9$$

STAGE

$$5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5!$$

MATEMATICA

$$\frac{10!}{\underset{A}{3!}\,\underset{T}{2!}\,\underset{M}{2!}}$$

10 concorrenti

$$10\cdot 9\cdot 8$$

n palline diverse $\rightarrow$ k

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} =$$

$$= \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} =$$

estraggo

coefficiente binomiale

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,\underbrace{(n-(n-k))}_{k}!} = \binom{n}{n-k} \leftarrow \text{rimangono}$$

$$\binom{8}{3} - 4\cdot 6 = 56 - 24 = 32$$

$$\frac{8\cdot 7\cdot 6}{6} = 56 \qquad \binom{4}{3}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$k=0$, $k=1$, $k=2$, $k=3$

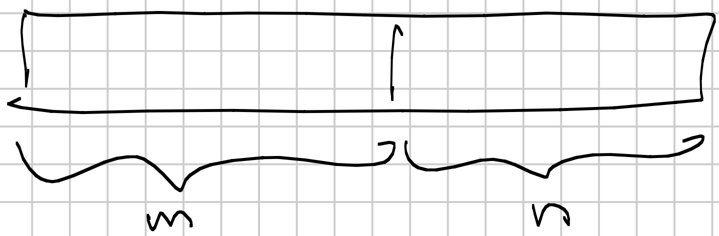
$$\begin{array}{l|ccccccccc}
n=0 & & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & \\
n=1 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \boxed{\binom{4}{2}} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
n=5 & 1 & & 4 & & \boxed{6} & & 4 & & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & 0 & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & \boxed{10} & & & & & \\
 & & & \binom{5}{2} & & & & &
\end{array}$$

$\binom{n}{k}$

$$\binom{90}{6} = \binom{6}{6}\binom{84}{0} + \binom{6}{5}\binom{84}{1} + \dots + \binom{6}{1}\binom{84}{5} + \binom{6}{0}\binom{84}{6}$$

$$\boxed{\binom{m+n}{k} = \sum_{i=1}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}}$$



$$(x+y)^n = \underbrace{(\boxed{x}+y)(\boxed{x}+y)(x+\boxed{y}) \cdots (\boxed{x}+y)}_{n} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

Binomio di Newton

$$(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y) =$$

$$1x^5 + \binom{5}{4}x^4y + \binom{5}{3}x^3y^2 + \binom{5}{2}x^2y^3 + \binom{5}{1}xy^4 + \binom{5}{0}y^5$$

$$(mx+n)^{2000} = \dots + \binom{2000}{2}(mx)^2 n^{1998} +$$

$$+ \binom{2000}{3}(mx)^3 n^{1997} + \dots$$

$$\binom{2000}{2} m^2 n^{1998} = \binom{2000}{3} m^3 n^{1997}$$

$$\cancel{m^2}\, \cancel{n^{1998}}\, \frac{2\cancel{000}\cdot 1\cancel{999}\cdot \cancel{1998!}}{\cancel{2}\quad \cancel{1998!}} = \frac{2\cancel{000}\cdot 1\cancel{999}\cdot 1998}{3\cdot \cancel{2\cdot 1}} m^{\cancel{3}} \cancel{n^{1997}}$$

$$n = \frac{1998}{3} m = 666m$$

m divide m   m divide n

m divide $MCD(m,n) = 1$

$m = 1$ $n = 666$

$$(x+y)^n = \underbrace{(\boxed{x}+y)(\boxed{x}+y)(x+\boxed{y}) \cdots (\boxed{x}+y)}_{n} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

$x=1 \qquad y=1$

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \underbrace{1^i \, 1^{n-i}}_{1}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$\binom{n}{0}$ → Numero SOTTI Di 0 elementi

$\binom{n}{1}$ → Numero SOTTI DI 1 elemento

Tutti i sottoinsiemi sono 2^n

$$0 = (-1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i (1)^{n-i}$$

$$+\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \qquad + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

$$1 - 5 + 10 - 10 + 5 - 1 = 0$$

$$1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1 = 0$$

$$32 - 32 = 0$$

7 possibili cioccolatini

In quanti modi ne scelgo 4

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$$

$$a_1, \; a_2 + 1, \; a_3 + 2, \; a_4 + 3$$

$$1 \leq a_1 < a_2 + 1 < a_3 + 2 < a_4 + 3 \leq 7 + 3 = 10$$

$$\binom{10}{4} = \binom{7+3}{4} = \binom{7+4-1}{4}$$

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k$$

$$a_1 < a_2 + 1 < a_3 + 2 < \ldots < a_k + k - 1$$

$$\binom{n+k-1}{k}$$

$$a + b + c + d + e = 2012$$

positivi (>0)

non negativi (≥ 0)

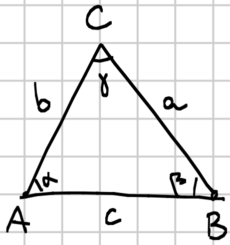
$b + a + c + d + e$ è diversa

$a \neq b$

$$\underbrace{0\,0\,0\,0\,0 \; \ldots \; 0\,0}_{2012}$$

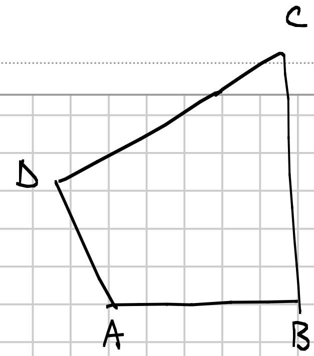
MACOMER STAGE OLIMPIADI MATEMATICA

GEOMETRIA



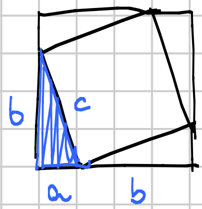
notaz standard

$$\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ = \pi$$

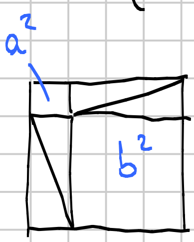


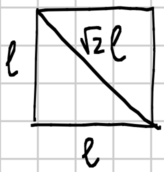
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360 = 2\pi$$

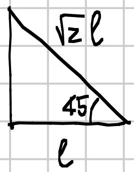
Thm di Pitagora

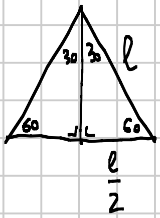


$$c^2 = (a+b)^2 - 4\frac{ab}{2} = a^2+b^2+2ab-2ab = a^2+b^2$$



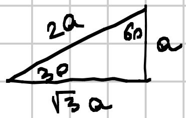




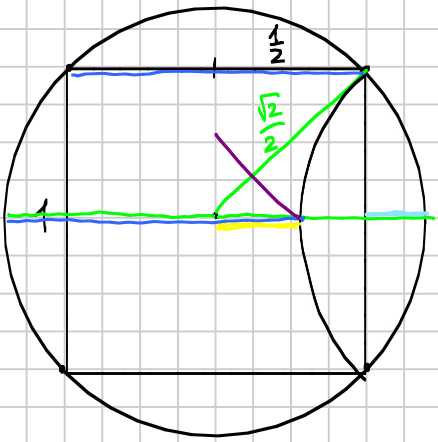


$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = l^2\frac{3}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}l \qquad \text{Area} = l\,h\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$$



2009.5



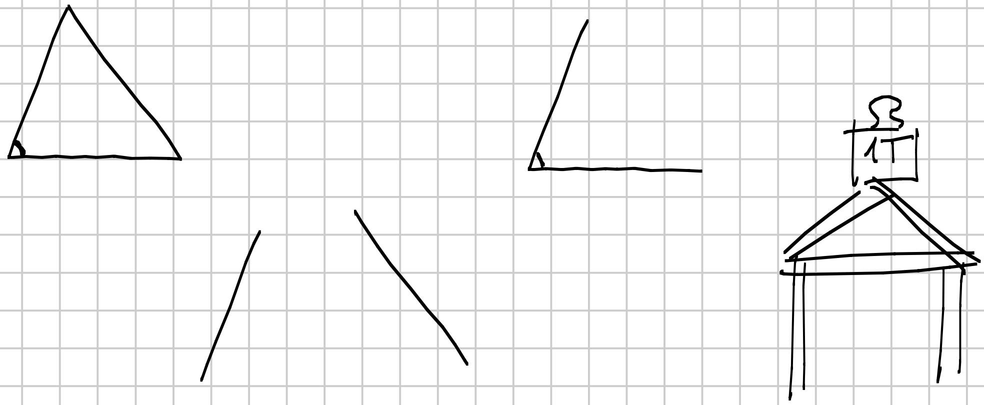
$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

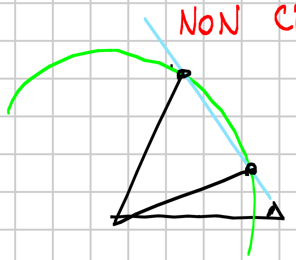
$$(\sqrt{2}-1)^2 = 2+1-2\sqrt{2}$$

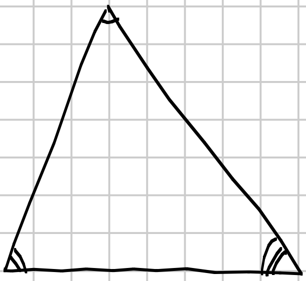
$$= 3-2\sqrt{2}$$

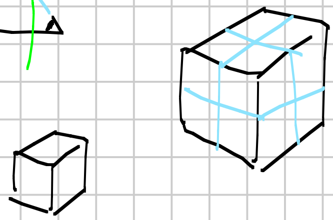
Congruenze e similitudini



NON CRITERIO



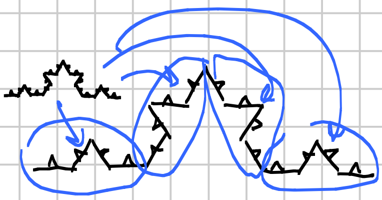




dim2 zoom × 3 area × 9 = 3^2

dim3 zoom × 3 volume × 27 = 3^3

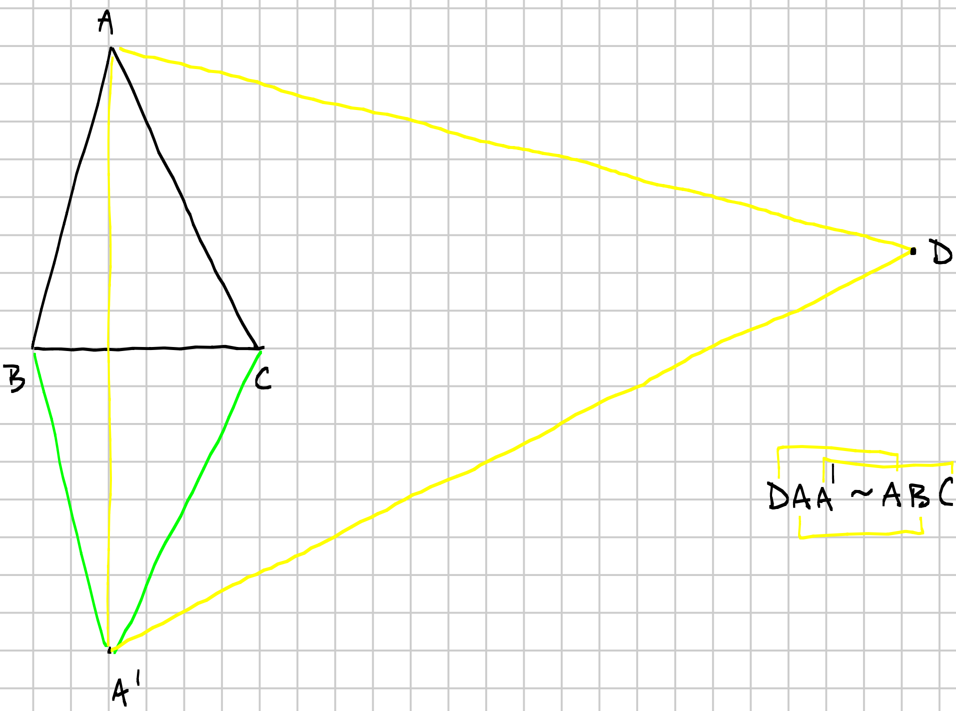
dim α zoom × 3 ? × 4 = 3^α



Curve di (von) Koch

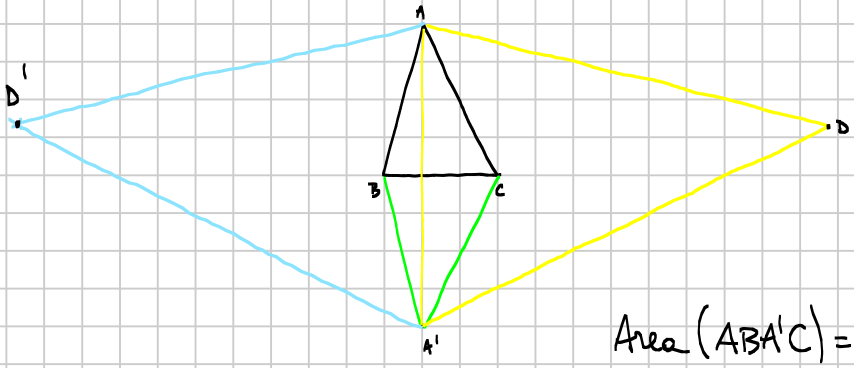
dimensione $\log_3 4$

2006.8



DAA' ~ ABC

$$\text{Area}(ABA'C) \cdot \text{Area}(ADA'D') = 16$$



$$\text{Area}(ABA'C) = \frac{AA' \cdot BC}{2}$$

$$\text{Area}(ADA'D) = \frac{AA' \cdot DD'}{2}$$

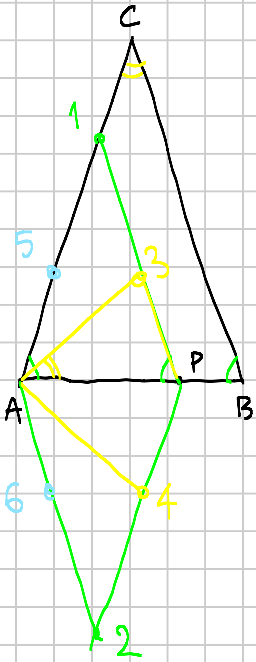
$$AA' \cdot AA' \cdot BC \cdot DD' = 16 \cdot 4 = 64$$

$$ABC \sim AA'D$$

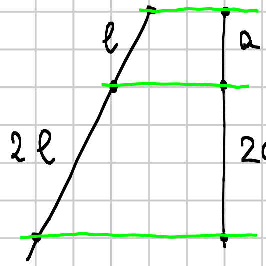
$$BC : AA' = \frac{AA'}{2} : \frac{DD'}{2} \qquad AA' \cdot \frac{AA'}{\cancel{2}} = BC \cdot \frac{DD'}{\cancel{2}}$$

$$AA' \cdot AA' \cdot AA' \cdot AA' = 64 \iff AA' = \sqrt[4]{64} = \sqrt{\sqrt{64}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

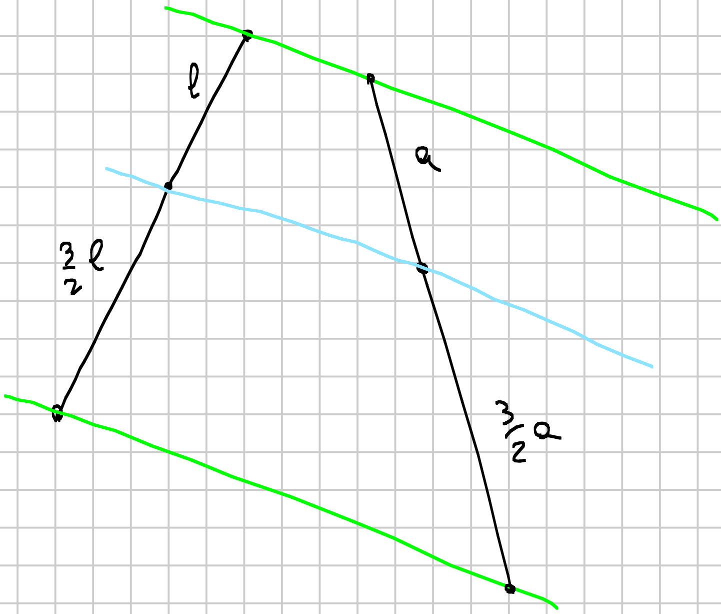
2007.1

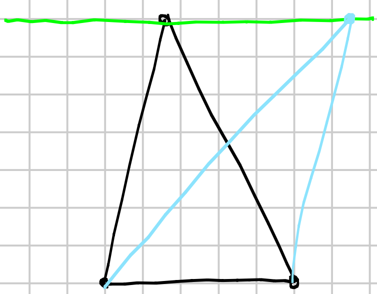


Thm di Talete

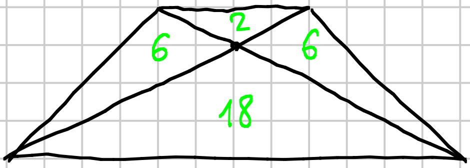


al posto di '2'
qualunque reale positivo
va bene





2008.3

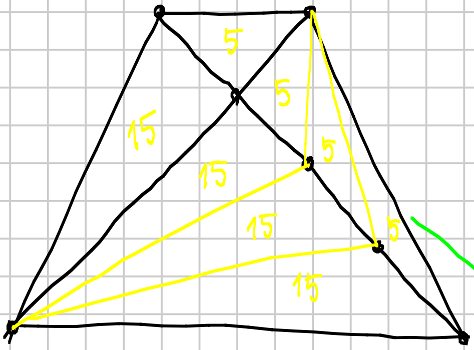


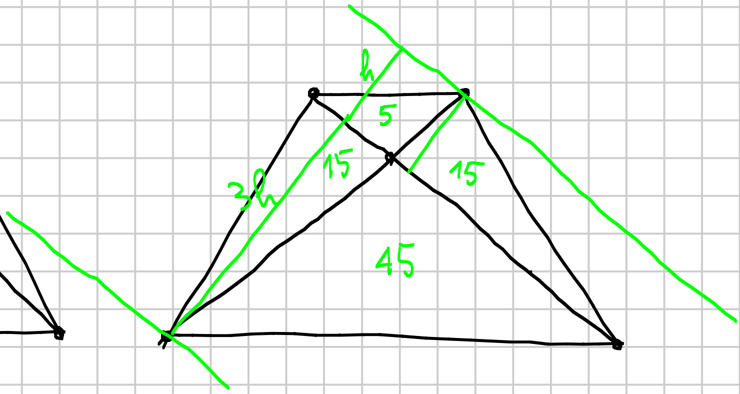
$6\square = 15\ cm^2$

$2\square = 5\ cm^2$

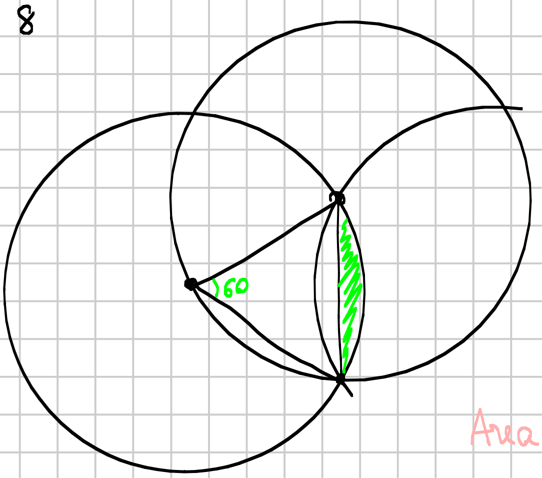
$\square = 2{,}5\ cm^2$

$32\square = 80\ cm^2$





2008. 8

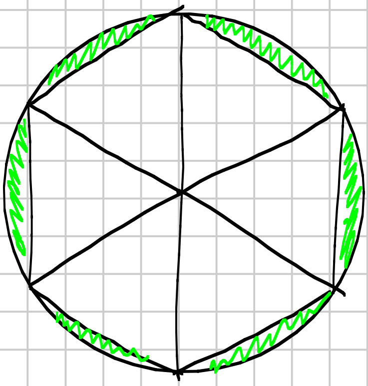


area triangolo equil.

Area mezzo foglia $= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

area "fetta di torta"

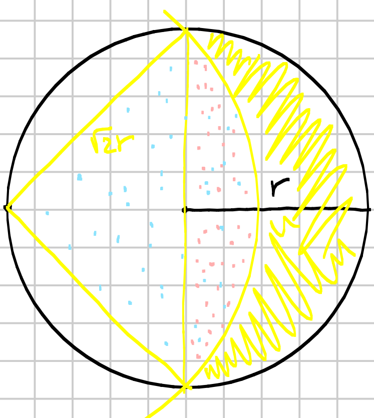
Area rosa cercata $= \pi - 6\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{6}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$



Area rosa cercata = area esagono inscritto

$= 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$

2007.8

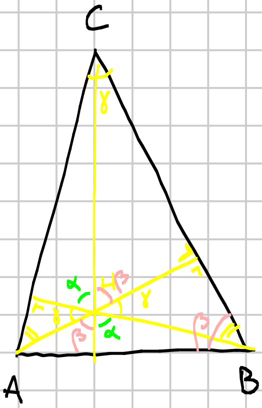


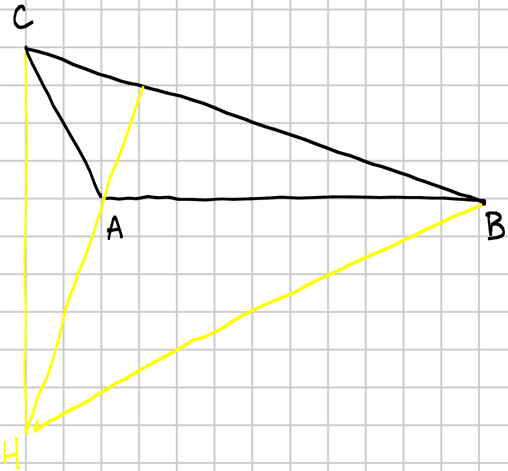
$\frac{\pi(\sqrt{2}r)^2}{4} = \frac{\pi}{2}r^2$ Area fetta da $\frac{1}{4}$ del cerchio grande

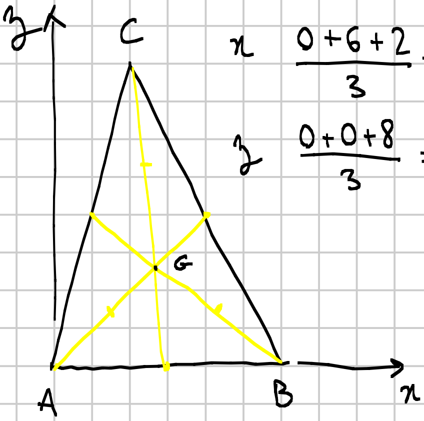
$\frac{\pi}{2}r^2 - \frac{2r \cdot r}{2} = \frac{\pi}{2}r^2 - r^2$ Area mezza foglia

$\frac{\pi}{2}r^2 - \left(\frac{\pi}{2}r^2 - r^2\right) = r^2$ risposta

PUNTI NOTEVOLI TRIANGOLI

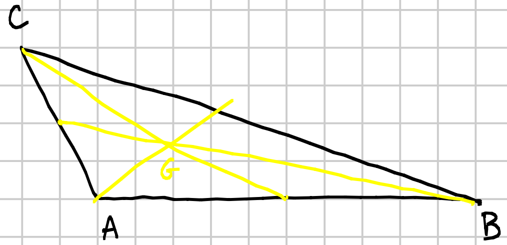




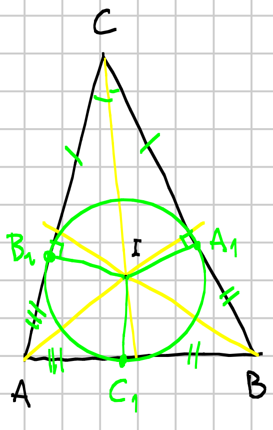


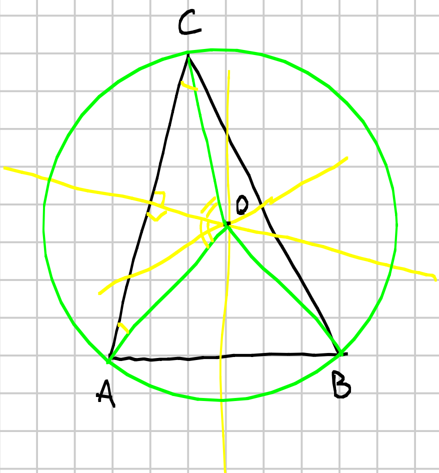
$x \quad \frac{0+6+2}{3} = \frac{8}{3} = 2,\bar{6}$

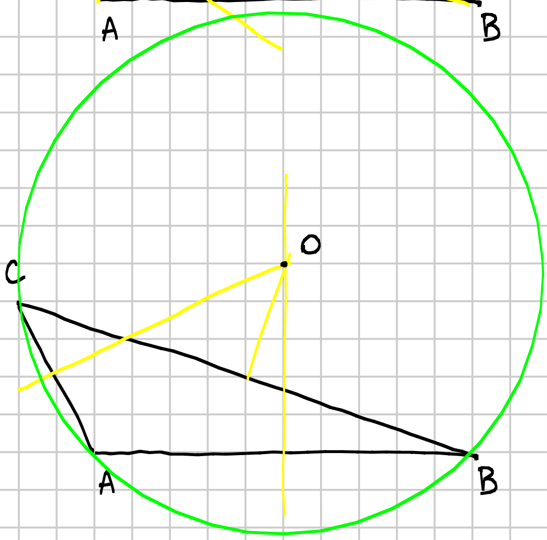
$y \quad \frac{0+0+8}{3} = \frac{8}{3}$



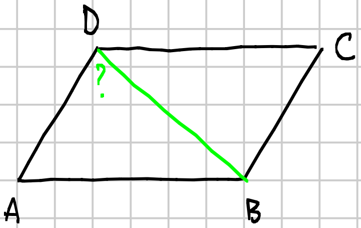
ABG , BCG , CAG hanno area uguale





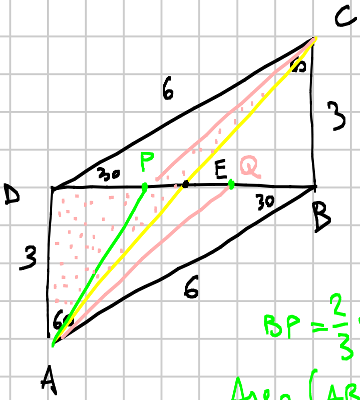


2006. 13



Area complessiva ABCD

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2 = 9\sqrt{3} = A$



$BP = \frac{2}{3} BD$

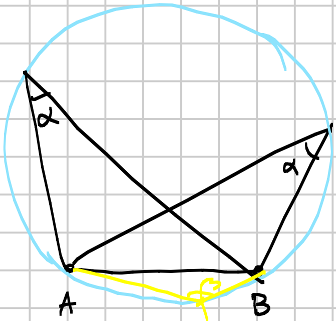
$\text{Area}(ABP) = \frac{2}{3}\,\text{Area}(ABD)$

$= \frac{1}{3} A$

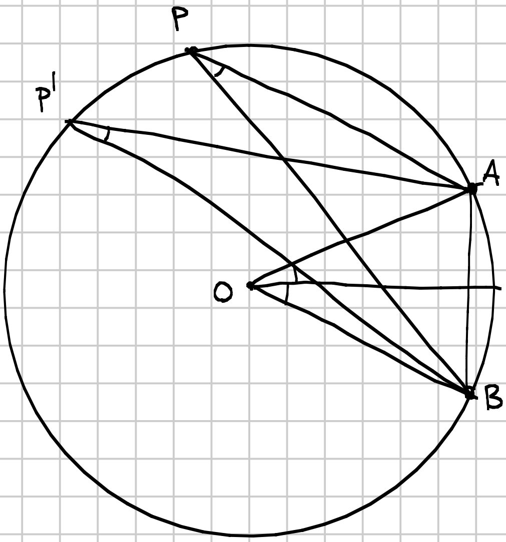
$\text{Area}(ACPD) = \text{Area}(AQD) = \frac{1}{3} A$

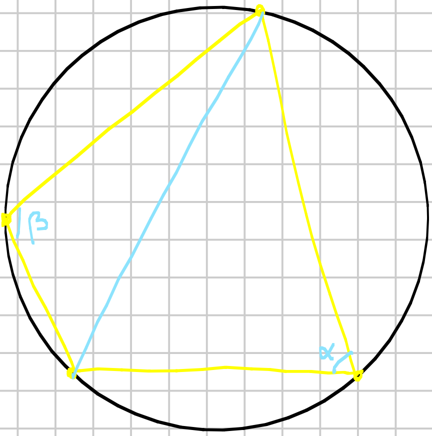
$\text{Risposta} = \text{Area}(ABP)\,\text{Area}(ACPD) = \frac{A}{3} \cdot \frac{A}{3} = A^2 \cdot \frac{1}{9} = 9 \cdot 3 = 27$

CIRCONFERENZE E ANGOLI



$\alpha + \beta = 180$

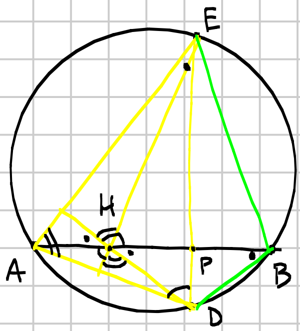




Quadrilatero ciclico = inscrittibile in una circonferenza = somma angoli opposti è 180°.

2008

16. ESERCIZIO DIMOSTRATIVO
Sia AB una corda di una circonferenza e P un punto interno ad AB tale che $AP = 2PB$. Sia DE la corda passante per P e perpendicolare ad AB. Dimostrare che il punto medio Q di AP è l'ortocentro di ADE.



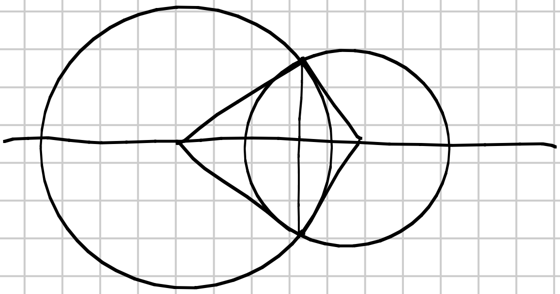
Voglio dimostrare che H, definito come ortocentro di ADE sta sul punto medio di AP.

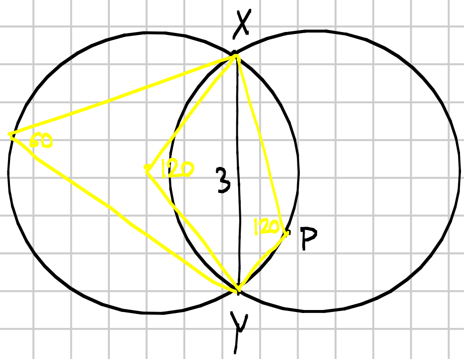
$PDB = PDH \Rightarrow BP = PH$ ma $PH + HA = PA = 2BP$

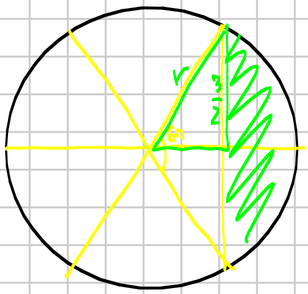
$BP + HA = 2BP \Rightarrow HA = BP = PH$

2006

7. Due circonferenze con lo stesso raggio si intersecano in X e Y. Sia P un punto su un arco XY di una circonferenza interno all'altra. Sapendo che il segmento XY è lungo 3 e che l'angolo $X\widehat{P}Y$ misura 120°, qual è l'area dell'intersezione tra i due cerchi?
(A) $2(\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3})$ **(B)** $3(\pi - \sqrt{3})$ **(C)** $\frac{1}{2}(3\pi - \sqrt{3})$ **(D)** $2(\pi - \frac{2}{3}\sqrt{3})$ **(E)** $2(\pi - \frac{3}{4}\sqrt{3})$.







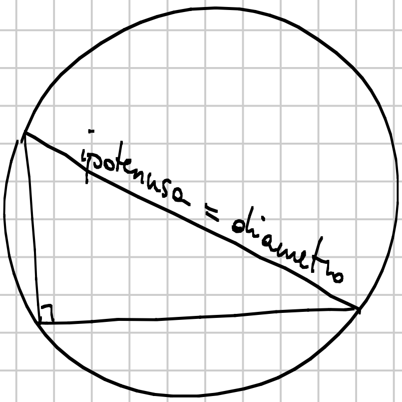
$\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} r \qquad r = \sqrt{3}$

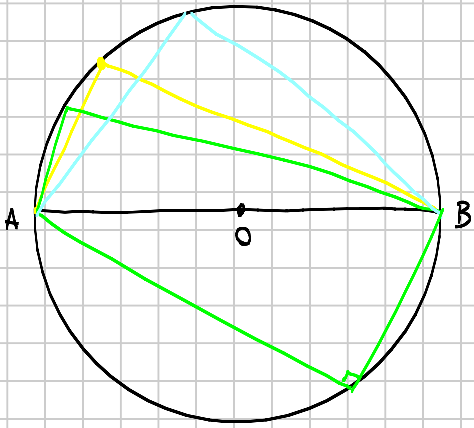
mezza foglia ha area : $r^2\pi \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$= 3 \cdot \pi \cdot \frac{1}{3} - \frac{3}{4}\sqrt{3} = \pi - \frac{3}{4}\sqrt{3}$

Risposta : $2 \cdot \left(\pi - \frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$

TRIANGOLO RETTANGOLO INSCRITTO





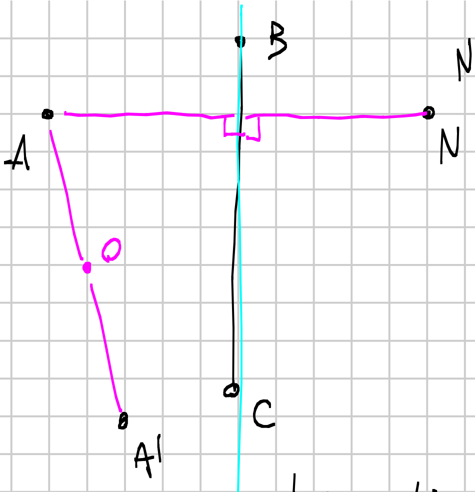
centro circ
=
punto medio AB

2009

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**
È dato un triangolo ABC, rettangolo in A e con AC cateto maggiore; sia M il punto medio di BC, N il simmetrico di A rispetto a BC, O l'intersezione fra la perpendicolare ad MN passante per N e la retta contenente BC.
a) Dimostrare che l'angolo OMN è il doppio dell'angolo ACB.
b) Dimostrare che il rapporto fra le aree di MNO e ABC vale un quarto del rapporto fra le lunghezze di BC e HM, dove H è il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa di ABC.

a) $O\hat{M}N = 2\,A\hat{C}B$

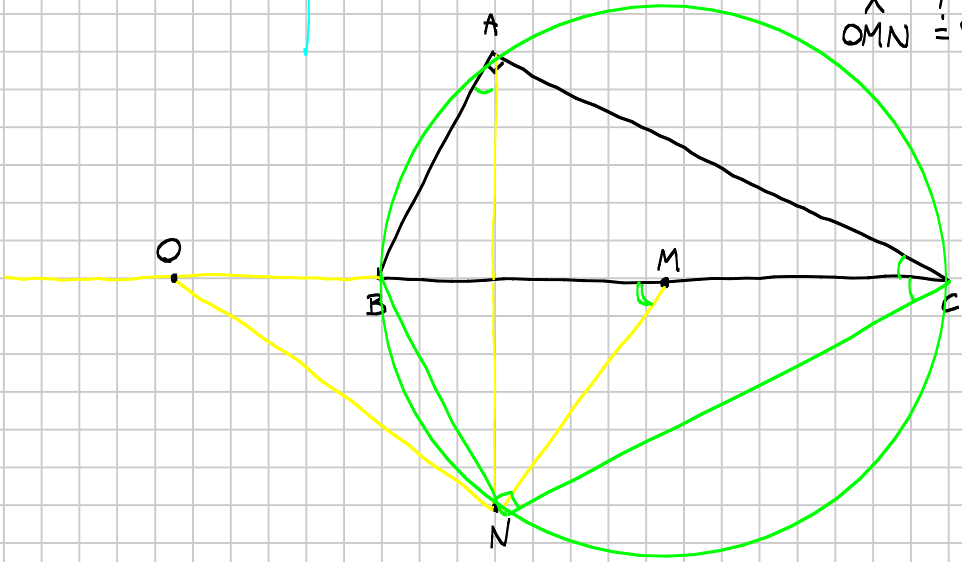
b) $\frac{\text{Area}(MNO)}{\text{Area}(ABC)} = \frac{1}{4}\,\frac{BC}{HM}$



N simmetrico di A rispetto a BC
(simmetria assiale)

A' simmetrico di A rispetto ad O (simmetria centrale)

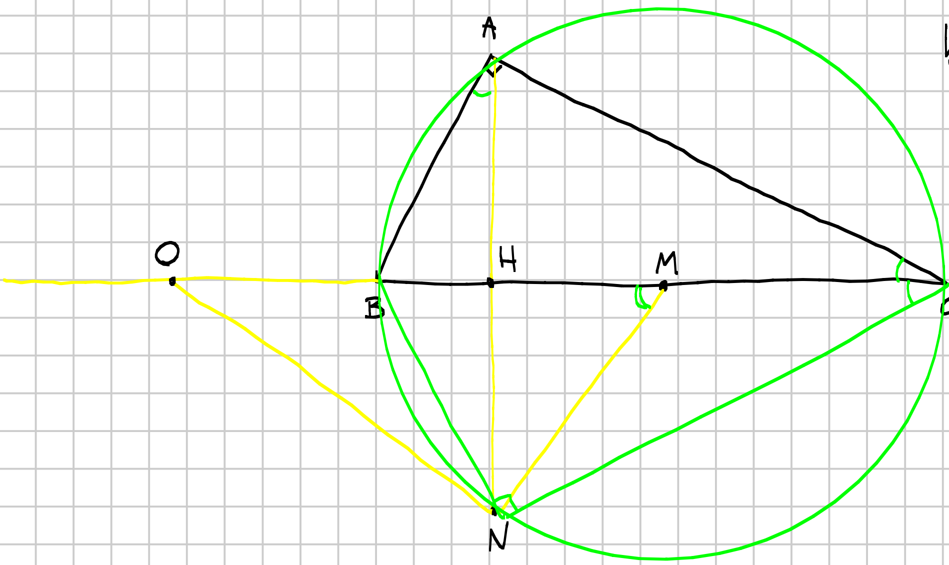
$\widehat{OMN} \stackrel{?}{=} 2\widehat{ACB}$



a) I triangoli ABC e NBC sono congruenti, rettangoli e hanno l'ipotenusa in comune, quindi BC è il diametro della circ. circoscritta ad entrambi

a) I triangoli ABC e NBC sono congruenti, quindi $\widehat{BNC} = 90°$, perciò ABNC è ciclico

$\widehat{OMN} = 2\widehat{BCN} = \widehat{BCA}$



b) $\frac{\text{Area}(MNO)}{\text{Area}(ABC)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{4}\frac{BC}{HM}$

$\frac{\text{Area}(MNO)}{\text{Area}(ABC)} = \frac{MO \cdot \cancel{HN}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{BC \cdot \cancel{AH}}$

$\frac{MO}{BC} \stackrel{?}{=} \frac{1}{4}\frac{BC}{HM}$

$OMN \sim HMN$

$MO : MN = MN : HM$

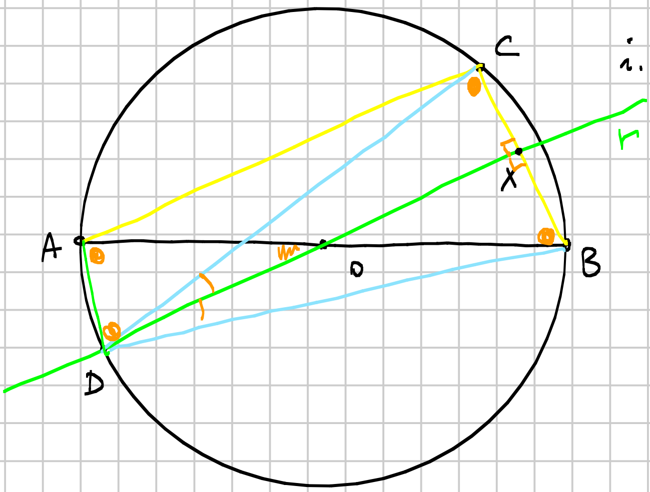
$\frac{MO}{MN} = \frac{MN}{HM}$ $\qquad \frac{MO \cdot 2}{BC} = \frac{BC}{2 \cdot HM}$ $\qquad$ finito

2007 18. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

È data una circonferenza di diametro AB e centro O. Sia C un punto sulla circonferenza (diverso da A e da B), e si tracci la retta r parallela ad AC per O. Sia D l'intersezione di r con la circonferenza dalla parte opposta di C rispetto ad AB.

i) Dimostrare che DO è bisettrice di $C\widehat{D}B$.

ii) Dimostrare che il triangolo CDB è simile al triangolo AOD.



i. $BX = XC$ per Talete, visto che

$AO = OB$

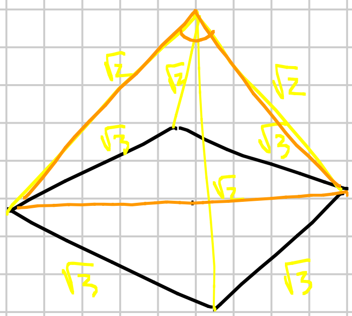
$C\hat{X}D = 90 = B\hat{X}D$ perché $CB \perp CA // r$

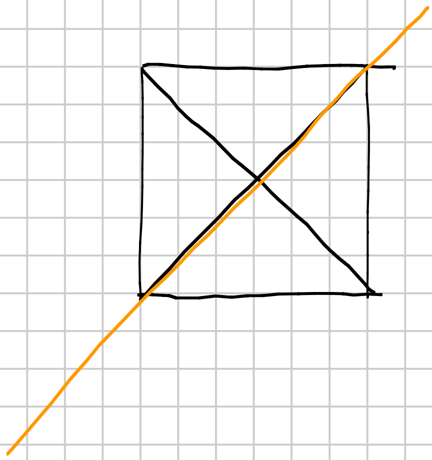
$BX = XC$; DX in comune ; quindi

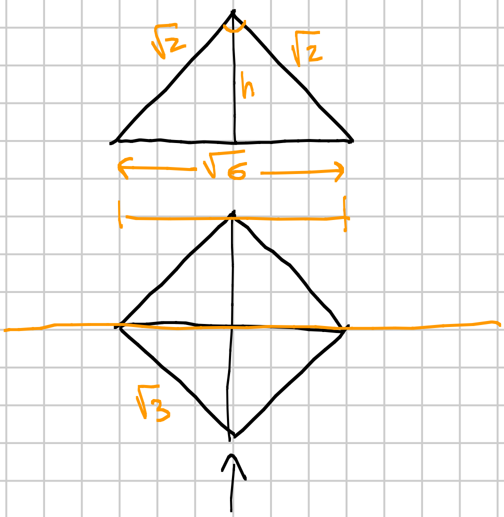
$D\overset{\Delta}{B}X = D\overset{\Delta}{C}X$

$C\hat{D}O = O\hat{D}B$

2006 14. Una piramide a base quadrata ha il lato di base lungo $\sqrt{3}$ e tutti gli spigoli delle facce laterali sono lunghi $\sqrt{2}$. Quanti gradi misura l'angolo fra due spigoli non appartenenti alla stessa faccia laterale?

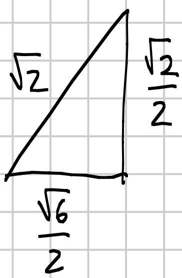


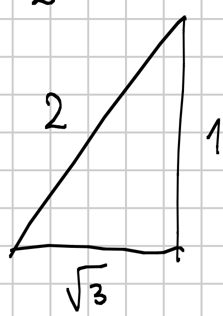


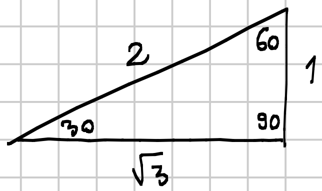


$h^2 = 2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = 2 - \frac{6}{4} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

$h = \frac{\sqrt{2}}{2}$





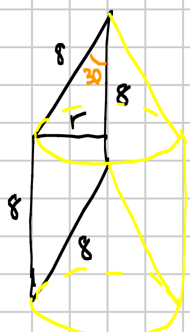


Risposta è 120°

2009

2. Il perimetro di un rombo è 32 cm e ciascuno dei due angoli acuti misura 30°. Quanto vale il volume del solido ottenuto facendo ruotare il rombo intorno a un suo lato?
(A) $128\sqrt{3}\pi$ **(B)** 128π **(C)** $64(\sqrt{3}-1)\pi$ **(D)** 64π **(E)** $32\sqrt{3}\pi$.

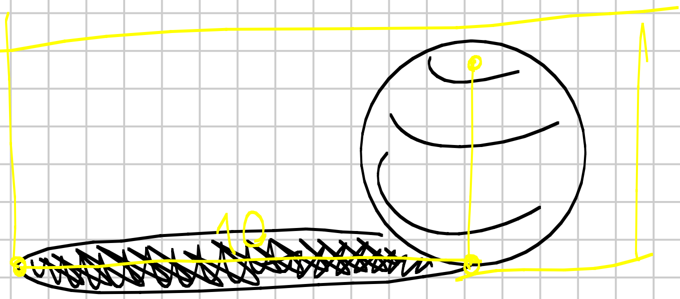
$r = 4$



$$\pi r^2 \cdot h = \pi 4^2 \cdot 8 = \pi \cdot 2^4 \cdot 2^3 = 128\pi$$

2008

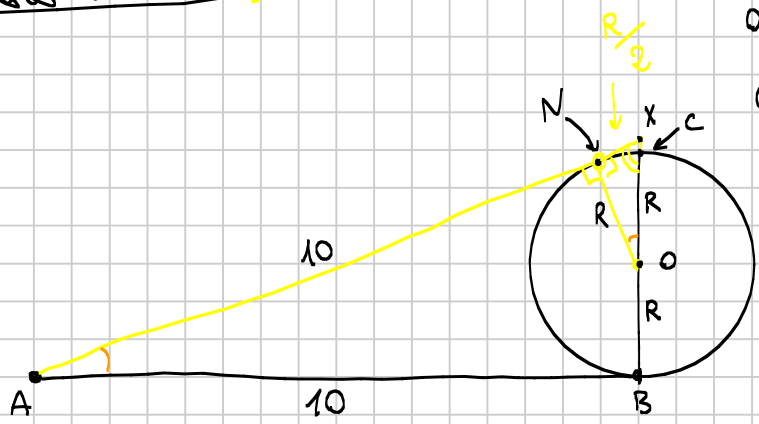
12. In un giorno di sole una sfera è posata su un terreno orizzontale. In un certo istante l'ombra della sfera raggiunge la distanza di 10 metri dal punto in cui la sfera tocca il terreno. Nello stesso istante un'asta di lunghezza 1 metro posta verticalmente al terreno getta un'ombra lunga 2 metri. Qual è il raggio della sfera in metri?
(A) $\frac{5}{2}$ **(B)** $9-4\sqrt{5}$ **(C)** $10\sqrt{5}-20$ **(D)** $8\sqrt{10}-23$ **(E)** $6-\sqrt{15}$.

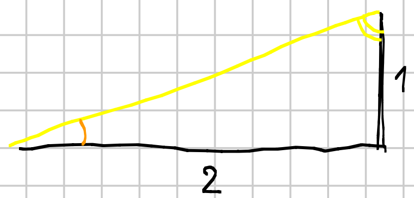


ipotenusa triangolino

$$OX^2 = R^2 + \frac{R^2}{4} = R^2\,\frac{5}{4}$$

$$OX = \frac{\sqrt{5}}{2} R$$

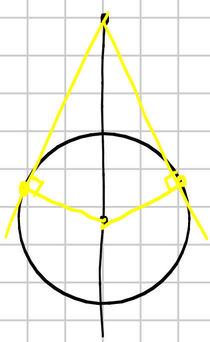




$$BX = BO + OX = R + \frac{\sqrt{5}}{2} R = R\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + 1\right)$$
$$\overset{!}{=} 5$$

$$5 = R\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + 1\right) = R\,\frac{\sqrt{5}+2}{2}$$

$$\sqrt{5} - 2 = \frac{1}{\sqrt{5}+2}$$

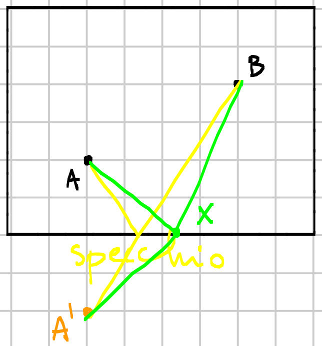


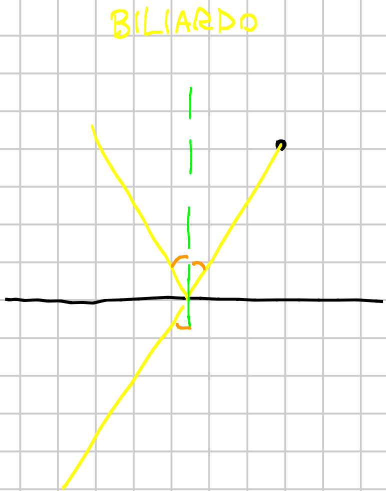
$$R = \frac{10}{\sqrt{5}+2} \cdot \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2} = \frac{10\sqrt{5}-20}{5-4} = 10\sqrt{5}-20$$

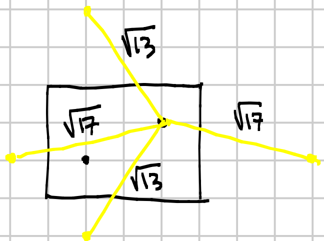
2009

8. Il minuscolo, ma preziosissimo, Diamante Dodecaedrico si trova a 2 metri dalla parete sud e 3 metri dalla parete ovest di una stanza rettangolare le cui pareti nord e sud sono lunghe 4 metri e quelle est e ovest sono lunghe 3 metri. Un ladro si cala dal soffitto all'interno della stanza e tocca il pavimento a un metro dalla parete sud e a un metro dalla parete ovest. Si accorge però che deve immediatamente disattivare il sistema di allarme, tagliando almeno in un punto un filo che corre ad altezza da terra costante lungo le quattro pareti perimetrali della stanza. Quanti metri è lungo il percorso più breve che deve compiere per raggiungere prima un punto qualsiasi di una delle pareti, e poi il Diamante Dodecaedrico?

(A) $3+\sqrt{2}$ **(B)** $2+\sqrt{5}$ **(C)** $\sqrt{17}$ **(D)** $\sqrt{13}$ **(E)** $2\sqrt{2}$.







2006

9. Quanti simboli di radice quadrata, come minimo, devono comparire nell'espressione $\sqrt{\cdots\sqrt{\sqrt{123.456.789}}}$ affinché il risultato sia minore di 2?
(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 7 **(D)** 8 **(E)** 9.

$\sqrt{2} < 2$ $\quad$ 2 $\quad$ 1 $\quad$ 2^1 $\quad$ $2^{10} = 1024 \approx 1000$

$\sqrt{3} < 3$ $\quad$ $2^{20} \approx 1000^2$

$\sqrt{\sqrt{4}} = \sqrt{2} < 2$ $\quad$ 4 $\quad$ 2 $\quad$ 2^2 $\quad$ $2^{30} \approx 1000^3$

$\sqrt{\sqrt{7}} < \sqrt{3} < 2$ $\quad$ $2^{40} \approx 1000^4$

$\sqrt{\sqrt{8}} < \sqrt{3} < 2$

$\sqrt{\sqrt{15}} < \sqrt{4} < 2$

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{16}}} = \sqrt{\sqrt{4}} = \sqrt{2} < 2$ $\quad$ 16 $\quad$ 3 $\quad$ 2^4

$\sqrt{\sqrt{64}} = \sqrt{8}$

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{16}}} = \sqrt{\sqrt{4}} = \sqrt{2} < 2$ $\quad$ 256 $\quad$ 4 $\quad$ 2^8

5 $\quad$ 2^{16} $\quad$ 65536

$123'456'789 = n$

6 $\quad$ $2^{32} \approx$ 4 miliardi

$2^{16} < n < 2^{32}$

$2^8 < \sqrt{n} < 2^{16}$

$2^4 < \sqrt{\sqrt{n}} < 2^8$

$2^2 < \sqrt{\sqrt{\sqrt{n}}} < 2^4$

$2 < \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{n}}}} < 2^2$

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{n}}}}} < 2$

4 non bastano $\quad$ 5 bastano

2009

1. Quanti interi n sono tali che $\sqrt{n}$ differisce da $\sqrt{101}$ per meno di 1?
(A) 19 **(B)** 21 **(C)** 40 **(D)** 41 **(E)** 42.

$\sqrt{101} \approx 10$ quindi $\sqrt{n}$ va da circa 9 a circa 11

quindi n va da circa 81 a circa 121

$n = 121$ $\quad$ $\sqrt{n} = 11$ $\quad$ $\sqrt{n} - \sqrt{101} < \sqrt{n} - \sqrt{100} = 11 - 10 = 1$

$n = 122$? $\quad$ $\sqrt{122} - \sqrt{101} < \sqrt{122} - \sqrt{100} = \sqrt{122} - 10 > 11 - 10 = 1$ $\quad$ NO

$\sqrt{122} - \sqrt{101} \overset{?}{<} 1$

$$\begin{array}{r} 122\times \\ 101= \\ \hline 122 \\ 122 \\ \hline 12322 \end{array}$$

$$(\sqrt{122}-\sqrt{101})^2 = \overbrace{122+101}^{223} - 2\sqrt{101\cdot 122} \overset{?}{<} 1$$

$$223-1 \overset{?}{<} 2\sqrt{101\cdot 122}$$

$$\begin{array}{r} 111 \\ 111 \\ \hline 111 \\ 111 \\ 111 \\ \hline 12321 \end{array}$$

$$111 \overset{?}{<} \sqrt{101\cdot 122}$$

$$12321 = 111^2 \overset{?}{<} 101\cdot 122 = 12322$$ vera!

oppure

$$\sqrt{122} \overset{?}{<} \sqrt{101}+1$$

$$122 \overset{?}{<} 101+1+2\sqrt{101}$$

$$10 \overset{?}{<} \sqrt{101}$$ sì

oppure $(\sqrt{122}-\sqrt{101})(\sqrt{122}+\sqrt{101}) \overset{?}{<} \sqrt{122}+\sqrt{101}$

$$\boxed{(a-b)(a+b) = a^2-b^2}$$

$$21 = 122-101 = 11+10 \overset{!}{<} \sqrt{122}+\sqrt{101}$$

$n=123$ NO

$$\sqrt{123} \overset{?}{<} \sqrt{101}+1 \qquad 123 \overset{?}{<} 101+1+2\sqrt{101} \qquad 21 \overset{!}{<} 2\sqrt{101}$$

$$441 \overset{?}{<} 404$$ NO

$n=81$ NO

$$\sqrt{101}-\sqrt{81} > 10-9 = 1$$

$n=82$ sì

$$\sqrt{101}-\sqrt{82} \overset{?}{<} 1 \qquad \sqrt{101} \overset{?}{<} \sqrt{82}+1 \qquad 101 < 82+1+2\sqrt{82}$$

$$9 < \sqrt{82}$$ sì

Quindi gli n che vanno bene sono quelli che vanno da 82 a 122

Sono 41

2008

15. ESERCIZIO DIMOSTRATIVO

Si determinino tutte le coppie $(x,\ y)$ di numeri reali che verificano l'equazione

$$\frac{4}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\,.$$

$$0 = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{4}{x+y} = \frac{y(x+y)+x(x+y)-4xy}{xy(x+y)} = \frac{x^2+y^2+2xy-4xy}{xy(x+y)}$$

$$\Downarrow$$

$$0 = \frac{x^2+y^2-2xy}{xy(x+y)} = \frac{(x-y)^2}{xy(x+y)}$$

$$\Downarrow$$

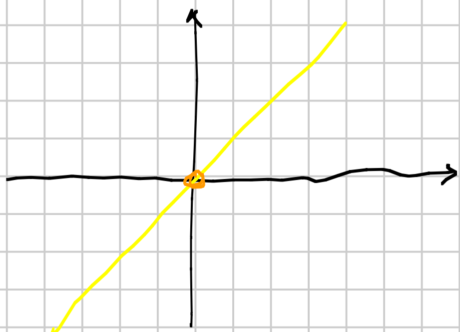
$$(x-y)^2 = 0 \qquad \text{ma } x,\ y,\ x+y \neq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x-y=0$$

$$\Updownarrow$$

$$x=y$$



Sono tutte quelle per cui

$$x = y \neq 0$$

Alla fine verifico se tutte le soluz. trovate soddisfano l'eq. iniziale

$$\frac{2}{x} = \frac{4}{x+x} = \frac{1}{x}+\frac{1}{x} = \frac{2}{x} \quad \text{vera se } x \neq 0$$

2008

5. Siano $a_0, a_1, a_2, \ldots$ numeri interi tali che $a_0 = 19, a_1 = 25$, e per ogni $n \geq 0$ valga $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$.
Qual è il più piccolo $i > 0$ per cui a_i è multiplo di 19?
(A) 19 **(B)** 25 **(C)** 38 **(D)** 44 **(E)** 50.

$a_0 = 19$

$a_1 = 25$

$a_2 = 2 \cdot a_1 - a_0 = 50 - 19 = 31$

$a_3 = 2 \cdot 31 - 25 = 62 - 25 = 37$

$a_4 = \ldots = 43$

$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$

$n = 0 \quad a_2 = 2a_1 - a_0$

$n = 1 \quad a_3 = 2a_2 - a_1$

Noto che aumenta sempre di 6

$a_n = 19 + 6 \cdot n$ è multiplo di 19 quando $6n$ è multiplo di 19
quindi 19 divide $6n$, siccome è primo, divide 6 o divide n
quindi 19 divide n

a_n è multiplo di 19 quando n è multiplo di 19.

Come dimostro che $a_{n+1} = a_n + 6$?

1) Induzione

Voglio dimostrare che per ogni n, $a_{n+1} = a_n + 6 \quad : \mathcal{P}_n$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

Voglio dimostrare che sono vere $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots$ (tutte)

a) BASE DELL'INDUZIONE (verifico il primo caso o i primi casi)

$\mathcal{P}_0$ è vera ?

$\mathcal{P}_0 : a_1 = a_0 + 6 \qquad a_1 = 25 \quad a_0 = 19$ è vera.

$\mathcal{P}_1 : a_2 = a_1 + 6 \qquad a_2 = 2a_1 - a_0 = \ldots = 31 \quad a_1 = 25$ è vera.

b) PASSO INDUTTIVO

Dimostro che $\mathcal{P}_n$ è vera usando solo che $\mathcal{P}_{n-1}$ è vera

$\mathcal{P}_n : a_{n+1} \overset{?}{=} a_n + 6 \qquad \mathcal{P}_{n-1} : a_n \overset{!}{=} a_{n-1} + 6 \iff a_{n-1} = a_n - 6$

$$a_{n+1} := 2a_n - a_{n-1} = 2a_n - (a_n - 6) = a_n + 6$$ $\mathcal{P}_n$ è vera!

2) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$

$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$ gli incrementi sono tutti uguali perciò a_n è una progressione aritmetica

$6 = a_1 - a_0 = a_{n+1} - a_n \quad \forall n$

Quindi cresce di 6

3) Dico che $a_n = 19 + 6n$. Verifico infatti che questa successione soddisfa tutte le richieste:

i. $a_0 = 19$ ✓

ii. $a_1 = 25$ ✓

iii. $a_{n+2} \overset{?}{=} 2a_{n+1} - a_n$ ✓

$$19 + 6(n+2) \overset{?}{=} 2(19 + 6(n+1)) - (19 + 6n)$$

$$31 + 6n = 19 + 12 + 6n \overset{!}{=} 38 + 12n + 12 - 19 - 6n = 31 + 6n$$

SCOMPOSIZIONI NOTEVOLI

$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ $\qquad x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$ $\qquad x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$

$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ $\qquad x^3 + 1 = (x-1)(x^2 - x + 1)$

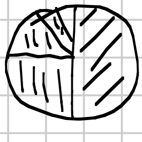
$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1})$ $\qquad \boxed{x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)}$

solo n dispari: $x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})$ $\qquad x^n + 1 = (x+1)(x^{n-1} - x^{n-2} + - \dots - x + 1)$

$$\boxed{1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}}$$

Se sostituisco al posto di x un numero $-1 < x < 1$ e n è molto grande, allora $x^n \approx 0$ e $1 + x + \dots + x^{n-1} \approx \frac{1}{1-x}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$



$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n} \underset{x=\frac{1}{2}}{=} 1+x+x^2+\dots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \underset{x=\frac{1}{2}}{=} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{(-2)\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right)}{(-2)\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= 2-\frac{1}{2^{n+1}}\cdot 2 = 2-\frac{1}{2^n}$$

2009

14. Sia x la più piccola delle due soluzioni dell'equazione $x^2-4x+2=0$. Quali sono le prime tre cifre dopo la virgola nella scrittura (in base 10) del numero

$$x+x^2+x^3+\cdots+x^{2009}?$$

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO "FOR DUMMIES"

$$\underbrace{x^2-4x}+2=0 \qquad (x-2)^2=x^2-4x+4$$

$$x^2-4x+2+2=2$$

$$(x-2)^2=2$$

$$x-2=\pm\sqrt{2}$$

$$x=2\pm\sqrt{2}$$ due soluzioni

$$x^2+7x-3=0$$

$$\left(x+\frac{7}{2}\right)^2=x^2+7x+\frac{49}{4}$$

$$x^2+7x-3+3+\frac{49}{4}=3+\frac{49}{4}=\frac{61}{4}$$

$$\left(x+\frac{7}{2}\right)^2=\frac{61}{4} \qquad x+\frac{7}{2}=\pm\sqrt{\frac{61}{4}}=\frac{\pm\sqrt{61}}{2} \qquad x=-\frac{7}{2}\pm\frac{\sqrt{61}}{2}$$ due soluzioni

---

$$1+x+x^2+\dots+x^{2009}-1 \qquad x=2-\sqrt{2}\approx 2-1{,}414=0{,}586$$

$$x\left(1+x+x^2+\dots+x^{2008}\right)=x\,\frac{x^{2009}-1}{x-1}\approx x\cdot\frac{0-1}{x-1}=\frac{x}{1-x}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

$$\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\frac{2\sqrt{2}+2-\sqrt{2}\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2-1}=2\sqrt{2}+2-2-\sqrt{2}=\sqrt{2}\approx 1{,}414$$

2010

7. Qual è la seconda cifra (partendo da sinistra) del numero $(10^{16}+1)(10^8+1)(10^4+1)(10^2+1)(10+1)$?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4.

$$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{(x-1)(x+1)}_{x^2-1}(x^2+1)}_{x^4-1}(x^4+1)}_{}(x^8+1)}_{x^8-1}\,(x^{16}+1) = x^{32}-1$$

$x^{16}-1$

$9 \cdot \text{mostro} = 10000000 \ldots 00000 - 1 = \underbrace{99999 \ldots 9}_{32 \text{ cifre}}$

$\text{mostro} = \underbrace{1111 \ldots 1}_{32 \text{ cifre}}$

2005

15. Quante sono le coppie ordinate (x, y) di interi positivi x e y che soddisfano la relazione $xy + 5(x + y) = 2005$?

$xy + 5x + 5y + 25 = (x+5)(y+5)$

$xy + 5x + 5y + 25 = 2005 + 25$

$(x+5)(y+5) = 2030 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29$

$x, y \geq 1 \qquad x+5, y+5 \geq 6$

~~1~~	~~2030~~		
~~2~~	~~1015~~		
~~5~~	~~406~~		
7	290	$x = 2$	$y = 285$
29	70		
10	203		
14	145		
58	35		
35	58		
145	14		
203	10		
70	29		
290	7	$x = 285$	$y = 2$
~~406~~	~~5~~		
~~1015~~	~~2~~		
~~2030~~	~~1~~		

dieci soluzioni

$m, n \in \mathbb{N}$

$m + n \geq mn \qquad mn - m - n \leq 0$

$(m-1)(n-1) \leq 1$

$m = 1$ n qualsiasi
$n = 1$ m "
$m = n = 2$
$m = 0$ n qualsiasi
$n = 0$ m "

ALTRE FORMULE UTILI

$(x-a)(x-b) = x^2 - \underset{\text{somma}}{(a+b)}x + \underset{\text{prodotto}}{ab}$

★ Ci sono due numeri α, β $\qquad \alpha + \beta = 6 \qquad \alpha\beta = -216$

$(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = \underbrace{x^2 - 6x - 216}_{} = 0$

$= 0$ solo se $x = \alpha$ o $x = \beta$

$(x-3)^2 = 9 + 216 = 225 = 15^2$

$x - 3 = \pm 15 \qquad x = 3 \pm 15 = \begin{cases} 18 & \beta \\ -12 & \alpha \end{cases}$

$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \ldots (x-\alpha_n) = x^n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)x^{n-1} + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n)x^{n-2}$
$- (\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots)x^{n-3} + \ldots \pm (\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1} + \ldots)x \mp \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$

Quelle sopra sono le relazioni fra radici e coefficienti

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ $\qquad$ $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

$(x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1
\end{array}
$$

$$(x+1)^n = x^n + n x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} + \binom{n}{3} x^{n-3} + \dots + \underset{\overset{\shortparallel}{n}}{\binom{n}{n-1}} x + \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\binom{n}{n}}$$

$$\underset{\binom{n}{0}}{1} \quad \underset{\binom{n}{1}}{n} \quad \binom{n}{2} \binom{n}{3}$$

Formula del binomio di Newton

2007

5. Sia $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Sapendo che la somma di due delle radici del polinomio vale zero, quale fra le seguenti relazioni tra i coefficienti di $P(x)$ è sempre vera?
(A) $abc = 0$ **(B)** $c = ab$ **(C)** $c = a + b$ **(D)** $b^2 = ac$
(E) nessuna delle risposte precedenti è corretta.

radici α, β, γ $\qquad$ $\alpha + \beta = 0$ $\qquad$ $\beta = -\alpha$

$\alpha, -\alpha, \gamma$

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x-\alpha)(x+\alpha)(x-\gamma) = (x^2-\alpha^2)(x-\gamma) =$$

$$= x^3 - \gamma x^2 - \alpha^2 x + \alpha^2 \gamma$$

$\alpha+\beta+\gamma = \gamma$ $\qquad$ $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -\alpha^2 + 0$ $\qquad$ $-\alpha\beta\gamma$

$c = \alpha^2 \gamma = ab$

2005

4. Quanti sono i polinomi $p(x)$ di secondo grado, a coefficienti interi e con 2 radici intere, tali che $p(8) = 1$? (Nota: ricordiamo che i numeri interi possono essere positivi, negativi o nulli)
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** un numero finito maggiore di 3 **(E)** infiniti.

$p(x) = ax^2 + bx + c$ $\qquad$ α, β radici intere

$p(8) = a 8^2 + b 8 + c$

$$p(x) = a(x-\alpha)(x-\beta) = a\left[x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\right] = ax^2 + bx + c$$

$1 = p(8) = a(8-\alpha)(8-\beta)$ $\qquad$ $a, 8-\alpha, 8-\beta = \pm 1$

a	$8-\alpha$	$8-\beta$				
1	1	1	$\alpha=7$	$\beta=7$	$a=1$	$(x-7)^2 = x^2 - 14x + 49$
1	-1	-1	$\alpha=9$	$\beta=9$	$a=1$	$(x-9)^2 = x^2 - 18x + 81$
-1	1	-1	$\alpha=7$	$\beta=9$	$a=-1$	$-(x-7)(x-9) = -x^2 + 16x - 63$
-1	-1	1	$\alpha=9$	$\beta=7$	$a=-1$	$-(x-9)(x-7) = -x^2 + 16x - 63$

tre

2008

10. Indicando con x_1, x_2, x_3 e x_4 le soluzioni dell'equazione $x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x + 1 = 0$, quanto vale

a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$?

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) 4 (E) 7.

$2 \quad \frac{1}{2} \quad -3 \quad -\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{x_1x_2x_3} + \frac{1}{x_1x_2x_4} + \frac{1}{x_1x_3x_4} + \frac{1}{x_2x_3x_4} = ?$

$\frac{1}{2} \quad 2 \quad -\frac{1}{3} \quad -3$

$1 \quad -1 \quad \pi \quad \frac{1}{\pi}$

$1 \quad -1 \quad \frac{1}{\pi} \quad \pi$

- Polinomi simmetrici

$p(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x + 1$ $\qquad x = \frac{1}{z}$

$= \frac{1}{z^4} - 2\frac{1}{z^3} - 7\frac{1}{z^2} - 2\frac{1}{z} + 1$

$p\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^4}\left\{1 - 2z - 7z^2 - 2z^3 + z^4\right\} = \frac{p(z)}{z^4}$

α radice di p allora $p\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{p(\alpha)}{\alpha^4} = 0$ allora $\frac{1}{\alpha}$ è radice

$\Downarrow$ $\alpha \neq 0$

- Relazioni coefficienti - radici

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ le radici

somma delle radici

$p(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4) = x^4 - (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)x^3$

$+ (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4)x^2 - (\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4)x$

$+ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$

prodotto radici

a) $\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \frac{1}{\alpha_4} = \frac{\overbrace{\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{2}}{\underbrace{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}_{1}} = 2$

b) $\frac{1}{x_1x_2x_3} + \frac{1}{x_1x_2x_4} + \frac{1}{x_1x_3x_4} + \frac{1}{x_2x_3x_4} = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{x_1x_2x_3x_4} = \frac{2}{1} = 2$

c) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = ?$

2007

13. Sia $p(x) = x^{20} + a_{19}x^{19} + a_{18}x^{18} + \ldots + a_1x + a_0$ un polinomio, con gli a_i interi. Sappiamo che, per tutti gli interi k compresi tra 1 e 20, $p(k) = 2k$. Quali sono le ultime 3 cifre di $p(21)$?

$p(x) = ax + b$ grado 1 coeff. 2 (retta) per 2 punti ne passa sempre una sola

$p(x) = ax^2 + bx + c$ grado 2 coeff. 3 (parabola) per 3 punti ne passa sempre una sola

....

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ grado n coeff $n+1$

per $n+1$ punti ne passa uno solo.

$p(x)$ assegnato $\quad q(x) := p(x) - 2x = x^{20} + a_{19}x^{19} + \ldots + a_2 x^2 + (a_1 - 2)x + a_0$

$q(k) = p(k) - 2k = 2k - 2k = 0 \quad k = 1, 2, \ldots, 20$

q ha radici $1, 2, \ldots, 20$

$q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-20)\cdot a \quad$ ma $a = 1$

$p(21) = q(21) + 2\cdot 21 = (21-1)(21-2)\cdot\ldots\cdot(21-19)\cdot(21-20) + 42$

$= 20\cdot 19\cdot 18\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 + 42 = 20! + 42 = \ldots.. 0042$

2009

12. Francesco vuole scrivere il polinomio $x^{16} + x$ come prodotto di più polinomi a coefficienti interi, ognuno di grado almeno 1. Quanti fattori potrà ottenere al massimo?
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5.

$$x^{16} + x = x(x^{15} + 1)$$

? ?

$$x^{15} + 1 = (x^5 + 1)(x^{10} - x^5 + 1) = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x^{10} - x^5 + 1)$$

$$x^{15} + 1 = (x^3 + 1)(x^{12} - x^9 + x^6 - x^3 + 1) = (x+1)(x^2 - x + 1)(x^{12} - x^9 + x^6 - x^3 + 1)$$

$$(x^{10} - x^5 + 1) : (x^2 - x + 1) = x^8 + x^7 - x^5 - x^4 - x^3 + x + 1$$

$x^{10} - x^9 + x^8$

$x^9 - x^8 + x^7$

$-x^7 + x^6 - x^5$

$-x^6 + x^5 - x^4$

$-x^5 + x^4 - x^3$

$x^3 - x^2 + x$

$$x^{16}+1 = x(x+1)(x^2-x+1)(x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$$

SULLA FATTORIZZAZIONE DEI POLINOMI

$$\begin{aligned}
p(x) &= x^7-2x^4+4x^3-8 = x^4(x^3-2)+4(x^3-2)\\
&= (x^3-2)(x^4+4)\\
&= (x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})(x^4+4)\\
&= \underbrace{(x-\sqrt[3]{2})}_{1}\underbrace{(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})}_{2}\underbrace{(x^2-2x+2)}_{2}\underbrace{(x^2+2x+2)}_{2}
\end{aligned}$$

Qualunque polinomio a coeffic. reali si fattorizza in polinomi a coeff. reali di grado 1 o 2

$\mathbb{Z}$ coeff. interi $\qquad (x^3-2)(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$

$\qquad \| \qquad\qquad\qquad \|$

$\mathbb{Q}$ coeff. razionali

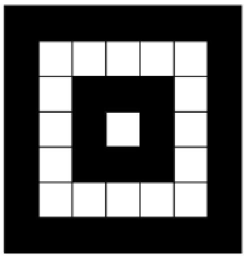
$\mathbb{R}$ coeff. reali $\qquad (x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$

$\mathbb{C}$ coeff. reali $\qquad (x-\sqrt[3]{2})(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)(x-\varepsilon)(x-\eta)$

Lemma di Gauss: un polinomio a coeff. interi si fattorizza allo stesso modo in polinomi a coeff. interi o razionali

2008

2. Il *So-poko* è un nuovo gioco enigmistico che si gioca su una tabella quadrata di lato 203 caselle. Le caselle sono colorate di bianco e di nero a cornici concentriche alternate; la cornice più esterna è nera, mentre la casella centrale è bianca (vedi a fianco un esempio 7×7). Qual è la differenza tra il numero di caselle nere e il numero di caselle bianche presenti nello schema?
(A) 103 **(B)** 203 **(C)** 207 **(D)** 303 **(E)** 407.



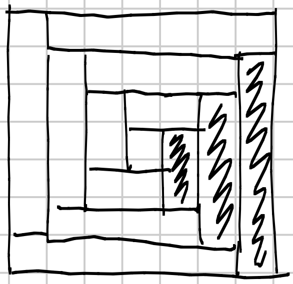
$$\blacksquare : \overbrace{8+24+40+56+72+\ldots+808}^{51} =$$

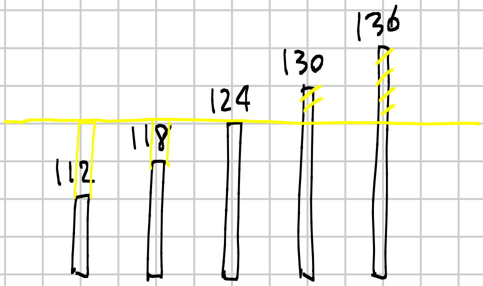
$$\square : \underbrace{\underset{7}{1}+\underset{8}{16}+\underset{8}{32}+\underset{8}{48}+64+\ldots+\underset{8}{800}}_{51} = 8\cdot 51 - 1 = 407$$

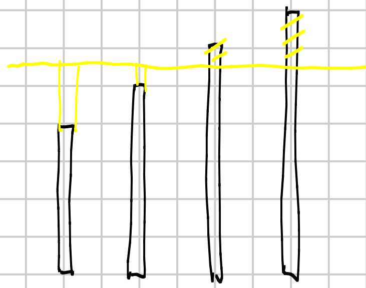
$$\blacksquare : 3,\ 7,\ 11,\ \ldots,\ 203$$

$$\square : \underbrace{1,\ 5,\ 9,\ \ldots,\ 201}_{51}$$

$$\underbrace{112+118+124+130+136}_{5} = \overset{\frac{136+112}{2}}{\overset{\shortparallel}{124}} \cdot 5 = \frac{(\text{maggiore}+\text{minore})}{2} \cdot \text{quanti sono}$$







$$\underbrace{8+\ldots+808}_{51} = \frac{808+8}{2} \cdot 51 = 408 \cdot 51 = 20808 \qquad \text{caselle } ■$$

$$1+\underbrace{0+\ldots+800}_{51} = 1+400\cdot 51 = 20401 \qquad \text{caselle } □$$

■ SERIE ARITMETICA

$$1+2+\ldots+n = \frac{1+n}{2}\cdot n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \binom{n+1}{2}$$

2006

6. Si consideri il piano tassellato con triangoli equilateri, e sia F_0 uno qualsiasi di essi. Si costruisce una sequenza di figure sempre più grandi in questo modo: F_1 è il poligono che si ottiene aggiungendo ad F_0 la cornice formata da tutti i triangoli della tassellazione che toccano F_0 (per un lato o per un vertice), F_2 è il poligono che si ottiene aggiungendo ad F_1 la cornice formata dai triangoli che toccano F_1, e analogamente si costruiscono i successivi sino ad F_{10}. Da quanti triangoli della tassellazione è composto quest'ultimo poligono?
(A) 541 **(B)** 661 **(C)** 691 **(D)** 721 **(E)** 841.

$1+12+24+36$

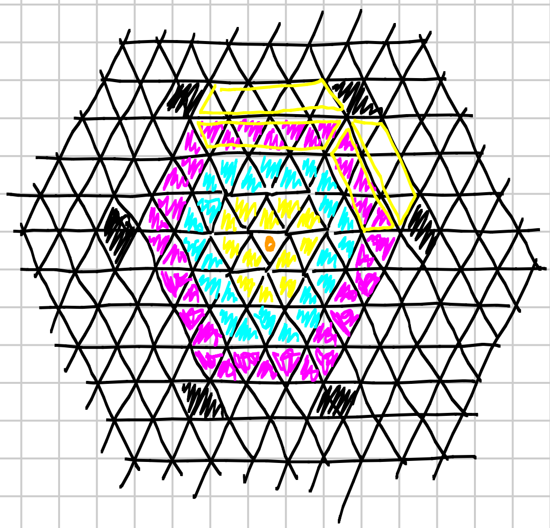
$F_0 = 1 \quad F_1 = 1+12 \quad F_2 = 1+12+24$

$F_3 = 1+12+24+36$

$$F_{10} = 1+\underbrace{12+24+\ldots+120}$$

$$1+\frac{120+12}{2}\cdot 10$$

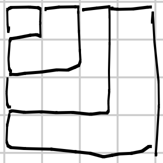
$$= 661$$



2007

6. Dall'insieme $\{1, 2, \dots, 100\}$ scegliamo 50 numeri distinti, la cui somma è 3000. Come minimo, quanti numeri pari abbiamo scelto?
(A) 2 ~~(B) 3~~ (C) 4 ~~(D) 5~~ (E) 6.

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{1+3}_{4}+5}_{9}+7}_{16}+9}_{25}+\dots+(2n-1) = n^2$$



$$\underbrace{1+3+\dots+99}_{\frac{1+99}{2}\cdot 50 = 50^2} = 50^2 = 2500$$

$\cancel{1} \longrightarrow$	100	+99
$\cancel{3} \longrightarrow$	98	+95
$\cancel{5} \longrightarrow$	96	+91
$\cancel{7} \longrightarrow$	94	+87
$\cancel{9} \longrightarrow$	92	+83
$\cancel{11} \longrightarrow$	$\cancel{90}$ 56	+79

$\frac{99+79}{2}\cdot 6 = 534$ 34 di troppo

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{1+4}_{5}+9}_{14}+16}_{30}+25}_{55}+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1+8+27+64+\dots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

2007

4. Uno studente universitario ha superato un certo numero di esami, riportando la media di 23. Dopo aver superato un altro esame, la sua media scende a 22,25. Sapendo che il voto di ciascun esame è un numero intero compreso fra 18 e 30 inclusi, che voto ha riportato lo studente all'ultimo esame?
(A) 18 0 (B) 19 1 (C) 20 2 (D) 21 0 (E) 22. 1

$\frac{S}{n} = 23$ $\qquad \frac{S+x}{n+1} = 22{,}25$ $\qquad n+1 = 4, 8, 12 \dots$

$n = 3, 7, 11, \dots$

$S = 23n$ $\qquad S+x = 22{,}25\,(n+1)$ $\qquad S = 69, 161, 252 \dots$

$S+x = 22{,}25\cdot(n+1) = 89, 178, 267, \dots$

20, 17, 15, ...

$S = 23n$

$23n + x = \frac{89}{4}(n+1)$

$92n + 4x = 89n + 89$

$\boxed{3n + 4x = 89}$

$-n + 0 \equiv 1$ $\qquad$ resti modulo 4 $\qquad n \equiv 3 \pmod 4$

$n \equiv -1 \equiv 3$

$0 + x \equiv 2$ resti modulo 3 $x \equiv 2 \pmod 3$