NUORO STAGE OLIMPIADI MATEMATICA
TEORIA DEI NUMERI

Note Title 02/02/2012

2006

11. I membri di una tribù hanno dieci dita alle mani e nove ai piedi e quindi contano indifferentemente in base 10 o 19. Nella loro cultura matematica, un numero intero positivo è detto "sacro" se in entrambe le basi si scrive con le stesse due cifre (comprese tra 1 e 9). Quanti sono i numeri sacri?

0 1 2 . . . 9 "altre 9" A B C D E F G H I

0	0
1	1
2	2
⋮	⋮
9	9
A	10
B	11
⋮	
I	
10	
11	

$[10]_{19} = [19]_{10}$

$[ab]_{19} = 19a + b = a\cdot 19^1 + b \cdot 19^0$

$[abc] = a\cdot 19^2 + b\cdot 19^1 + c\cdot 19^0$

$19a + \cancel{b} = 10a + \cancel{b}$ $\quad a = 0$

$19a + b = 10b + a$

$18a = 9b \qquad 2a = b$

$[12]_{19} = [21]_{10}$

$[24]_{19} = 2\cdot 19 + 4 = [42]_{10}$

$0 \leq a, b \leq 9$

4 soluzioni

2007

3. La rappresentazione in base 2 di un numero a è 1|110|000|100|111|010|101|110|100|001. Qual è la settima cifra da sinistra della rappresentazione di a in base 8?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6.

0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	10	2
3	3	11	3
4	4	100	4
5	5	→ 101	5
6	6	110	6
7	7	111	7
8	10	1000	0
9	11	1001	1
10	12	1010	2
11	13	1011	3
12	14	1100	4
13	15	1101	5
14	16	1110	6
15	17	1111	7
16	20	10000	0
17	21	10001	1
18	22	10010	2
19	23	10011	3
20	24	10100	4

$\underbrace{0\,1\,1\,0}_{6}\ \underbrace{1\,1\,0\,1}_{D}$

CRITERI DI DIVISIBILITÀ E CONGRUENZA

$10 \equiv 1 \equiv 16 \equiv -2 \pmod 3$

$-2 \quad 1 \quad 4 \quad 7 \quad 10 \quad 13 \quad 16$

$2^{70} + 3^{70}$ è multiplo di 13?

$4^{35} \quad 9^{35}$

$9 \equiv -4 \pmod{13}$

$4^{35} + 9^{35} \equiv 4^{35} + (-4)^{35}$

$= 4^{35} - 4^{35} = 0 \pmod{13}$

- 2 ultima cifra
- 4 ultime due cifre

$7410891 \equiv 91 \equiv 3 \equiv -1 \pmod 4$

$\| $

$7410\!8 \cdot 100 + 91 \equiv 0 + 91$ (con $100 \equiv 0$)

- 8, 16, ... ultime tre, quattro ... cifre
- 3 si sommano le cifre
- 9 si sommano le cifre

$7410891 = 1 + 9 \cdot 10 + 8 \cdot 100 + 1 \cdot 10000 + 4 \cdot 100000 + 7 \cdot 1000000$

$\equiv 1 + 9 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 7 \cdot 1 = 30 \equiv 3 \pmod 9$

- 11 si sommano le cifre a segni alterni

$+-+-+-+$

$7410891 = 1 + 9 \cdot 10 + 8 \cdot 100 + 1 \cdot 10000 + 4 \cdot 100000 + 7 \cdot 1000000$

$\equiv 1 + 9 \cdot (-1) + 8 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 7 \cdot 1 = 4 \pmod{11}$

$1000 \equiv -1 \pmod{11}$
$1001 \equiv 0 \pmod{11}$
$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$

2008

7. In quanti modi si possono ordinare le cifre 1, 2, 4, 7 e 9 affinché formino un numero di cinque cifre divisibile per 11?
(A) 0 (B) 1 (C) 10 (D) 12 (E) 24.

$12749 \equiv 11 \equiv 0 \pmod{11}$

$+-+-+$

$\hookrightarrow 2 \cdot 3! = 12$ configurazioni simili $\{2,4\}$ $\{1,7,9\}$

$\{1,2,4,7,9\}$ due in posizione $-$ $\{a,b\}$ $a+b=m$

tre " " $+$ $\{c,d,e\}$ $c+d+e=p$

$m+p=23$ $p-m$ multiplo di 11

$p - m \overset{?}{=} 0 \Rightarrow p = m \Rightarrow 23$ pari NO

$p - m = 22 \Rightarrow$ somma pari NO

-22 NO

$p - m = 11 \quad p + m = 23$

$\quad d \qquad\qquad s$

$\frac{s+d}{2} = p \qquad \frac{s-d}{2} = m$

$p = \frac{s+d}{2} = \frac{23+11}{2} = 17 \qquad m = 6$

$p - m = -11 \quad p + m = 23 \qquad p = 6 \quad m = 17$

2009

13. Determinare il massimo intero positivo k tale che k^2 divide $\frac{n!}{(n-6)!}$ per ogni $n > 6$.

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$(n-6)! = (n-6)(n-7) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$\frac{n!}{(n-6)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$

prodotto di 6 numeri consecutivi qualsiasi

$2^4 \quad 3^2 \quad 5^1$

$\boxed{1 \; 2 \; 3 \; 4 \; 5 \; 6}$ 7 8 9 10 11 12 $\boxed{13 \; 14 \; 15 \; 16 \; 17 \; 18}$ 19 20 $\boxed{21 \; 22 \; 23 \; 24 \; 25 \; 26}$ 27 28 29 30 31 32 33

33! ha fattori due : $16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31$

Il MCD fra tutti i numeri del tipo $\frac{n!}{(n-6)!}$ è $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

$12^2 = (2^2 \cdot 3)^2$

2010

11. In una scatola ci sono venti palline numerate da 1 a 20. Ciascun numero è presente in una e una sola di queste palline. Quante palline diverse dobbiamo estrarre come minimo, per essere sicuri che il prodotto dei loro numeri sia un multiplo di 12?
(A) 7 **(B)** 11 **(C)** 12 **(D)** 15 **(E)** 18.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 $\qquad 12 = 2^2 \cdot 3$

due strategie della sfortuna : non pesco mai fattori 3 $\longrightarrow 15^a$

non pesco due fattori 2 $\longrightarrow 12^a$

2009

7. Determinare il più grande intero n con questa proprietà: esistono n interi positivi distinti $a_1, \dots a_n$ tali che, comunque se ne scelgano fra essi due distinti, né la loro somma né la loro differenza siano divisibili per 100.
(A) 49 **(B)** 50 **(C)** 51 **(D)** 99 **(E)** 100.

34 vieta: 66, 166, 266, ..., 134, 234, ...

768 vieta: 32, 132, ... 68, 168, ...

ogni riga rappresenta un gruppo di cui può essere presente al più un rappresentante

$$\left.\begin{array}{l}\text{gruppo di } 1 = \text{gruppo } 99 \\ \text{gruppo di } 2 = \text{gruppo } 98 \\ \dots \\ \text{gruppo di } 49 = \text{gruppo } 51\end{array}\right\} 49 \text{ gruppi}$$

gruppo di 50 = $\{50, 150, 250, \dots\}$ $+1$

gruppo di 100 = $\{100, 200, 300, \dots\}$ $+1$

51

Basta considerare i resti mod 100 : $\{0, 1, 2, \dots, 99\}$

50

2008

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**
a) Si hanno sette numeri interi positivi a, b, c, d, e, f, g tali che i prodotti ab, bc, cd, de, ef, fg, ga sono tutti cubi perfetti. Dimostrare che anche a, b, c, d, e, f, g sono cubi perfetti.
b) Si hanno sei numeri interi positivi a, b, c, d, e, f tali che i prodotti ab, bc, cd, de, ef, fa sono tutti cubi perfetti. È sempre vero che a, b, c, d, e, f sono tutti cubi perfetti?
Nota: si dice cubo perfetto un intero m tale che $m = n^3$ per qualche intero n.

b) Costruisco un controesempio : $a, b, \dots, f$ non $\square$ tali che $ab, bc, \dots ef, fa = \square$

$a = 3 \quad b = 9 \quad c = 3 \quad d = 9 \quad e = 3 \quad f = 9$

$ab = 3^3 \quad bc = 3^3 \quad cd = 3^3 \quad de = 3^3 \quad ef = 3^3 \quad fa = 3^3$

a) $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$ $\quad \alpha_i \geq 0$ $\quad \alpha \ \beta \ \gamma \ \delta \ \varepsilon \ \xi \ \eta$

$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n}$ $\quad \beta_i \geq 0$

...

$g = p_1^{\eta_1} p_2^{\eta_2} \dots p_n^{\eta_n}$ $\quad \eta_i \geq 0$

$a = \square$ vorrebbe dire α_i multipli di 3

p un primo della lista, ad esempio p_1

$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \eta$ i suoi esponenti nei numeri $a, b, c, \dots g$

$ab = \square$ $\quad$ p divide ab con esponente $\alpha+\beta$ $\leftarrow$ $p^{\alpha+\beta} \| ab$

"$p^{\alpha+\beta}$ divide ab" non è la stessa cosa $\quad$ $p^{\alpha+\beta} \mid ab$

$\square = ab = \dots \cdot p^{\alpha+\beta} \cdot \dots, \Rightarrow \alpha+\beta$ multiplo di 3

$\alpha+\beta \equiv 0 \pmod 3$

α assegnato $\quad \beta \equiv -\alpha \pmod 3$

$\square = bc = \dots \cdot p^{\beta+\gamma} \cdot \dots \Rightarrow \beta+\gamma$ multiplo di 3

β fissato $\quad \gamma \equiv -\beta \equiv \alpha \pmod 3$

α	β	γ	:	η	$\eta+\alpha$
0	0	0	:	0	0
1	2	1	:	1	2
2	1	2	:	2	1

procedo analogamente fino a fg che fissa η

Infine:

$\square = ga = \dots \cdot p^{\eta+\alpha} \cdot \dots \Rightarrow \eta+\alpha$ multiplo di 3

questo implica $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \eta \equiv 0 \pmod 3$

tutti multipli di 3

Questo vale per ogni primo p, quindi $a, b, \dots, g$ sono cubi

2010

5. Per quanti interi relativi n si ha che $\dfrac{3n}{n+5}$ è intero e divisibile per 4?

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) più di 8.

$$\frac{3n}{n+5} = k \text{ intero}$$

$$k = \frac{3n}{n+5} + 3 - 3 = 3 + \frac{3n - 3(n+5)}{n+5} = 3 - \frac{15}{n+5} = 3 - h$$

$\dfrac{15}{n+5} = h$ intero

divisori di 15

$15 = 3^1 \cdot 5^1$

divisori $\cdot 2 = 4$

$n+5$	h	k
1	15	-12
3	5	-2
5	3	0
15	1	2
-1	-15	18
-3	-5	8
-5	-3	6
-15	-1	4

NUORO STAGE OLIMPIADI MATEMATICA
ALGEBRA

Note Title 02/02/2012

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

2008

15. ESERCIZIO DIMOSTRATIVO
Si determinino tutte le coppie $(x,\ y)$ di numeri reali che verificano l'equazione

$$\frac{4}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\,.$$

$$\frac{4}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$\frac{4xy}{\cancel{xy(x+y)}} = \frac{y(x+y) + x(x+y)}{\cancel{xy(x+y)}}$$

$x, y \neq 0$

$$4xy = xy + y^2 + x^2 + xy$$

$$4xy = x^2 + y^2 + 2xy = (x+y)^2$$

$$x^2 + y^2 + \underbrace{2xy - 4xy}_{-2xy} = 0$$

$$(x-y)^2 = 0$$

$$x - y = 0 \qquad \boxed{x = y \neq 0}$$

$$(x+a)(y+b) = xy + xb + ay + ab$$

2005

15. Quante sono le coppie ordinate (x, y) di interi positivi x e y che soddisfano la relazione $xy + 5(x + y) = 2005$?

$$xy + 5x + 5y = 2005$$

$$(x+5)(y+5) = xy + 5x + 5y + 25$$

$$xy + 5x + 5y + 25 = 2030$$

$$2030 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29$$

$$(x+5)(y+5) = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29$$

>5	>5
1	2030
2	1015
5	406
7	290
⋮	⋮
406	
1015	
2030	1

10

16 divisori positivi

$1, 2, 5, \ldots, \boxed{406}, 1015, 2030$

$x = 2 \quad y = 285$

⋮

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$x^4 - y^4$$

⋮

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots \dots + x + 1)$$

2009

14. Sia x la più piccola delle due soluzioni dell'equazione $x^2 - 4x + 2 = 0$. Quali sono le prime tre cifre dopo la virgola nella scrittura (in base 10) del numero

$$x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2009}?$$