NUORO

FRANCESCO MORANDIN

TEORIA DEI NUMERI

Note Title

2006

11. I membri di una tribù hanno dieci dita alle mani e nove ai piedi e quindi contano indifferentemente in base 10 o 19. Nella loro cultura matematica, un numero intero positivo è detto "sacro" se in entrambe le basi si scrive con le stesse due cifre (comprese tra 1 e 9). Quanti sono i numeri sacri?

2007

3. La rappresentazione in base 2 di un numero a è 1110000100111010101110100001. Qual è la settima cifra da sinistra della rappresentazione di a in base 8?
(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6.

2009

9. Quanti interi positivi n hanno la proprietà che la loro rappresentazione in base 2 coincide con la rappresentazione in base 3 di $2n$?
(A) Nessuno **(B)**1 **(C)** 2 **(D)** più di 2, ma in numero finito **(E)** infiniti.

2008

7. In quanti modi si possono ordinare le cifre 1, 2, 4, 7 e 9 affinché formino un numero di cinque cifre divisibile per 11?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 10 **(D)** 12 **(E)** 24.

2009

13. Determinare il massimo intero positivo k tale che k^2 divide $\dfrac{n!}{(n-6)!}$ per ogni $n > 6$.

2010

8. Nella classe di Sergio, dopo la correzione dell'ultimo compito di matematica, al quale tutti gli alunni erano stati presenti, la media aritmetica delle insufficienze è risultata 4,6, mentre la media aritmetica delle sufficienze è risultata 7,1. Sapendo che il professore ha dato soltanto voti interi, quanti alunni ci sono al minimo nella classe di Sergio?
(A) 10 **(B)** 12 **(C)** 15 **(D)** 24 **(E)** 30.

2007

12. Consideriamo un qualsiasi insieme di 20 numeri interi consecutivi, tutti maggiori di 50. Quanti di essi al massimo possono essere numeri primi?
(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 7 **(E)** 8.

2007

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**
Un intero positivo si dice *triangolare* se si può scrivere nella forma $\dfrac{n(n+1)}{2}$ per qualche intero positivo n. Quante sono le coppie (a, b) di numeri triangolari tali che $b - a = 2007$? (Si ricorda che 223 è un numero primo).

2008

13. Determinare il più grande numero di due cifre tale che:
a) sia un numero primo;
b) scambiando di posto le due cifre resti un numero primo;
c) il prodotto delle due cifre sia un numero primo.

2010

11. In una scatola ci sono venti palline numerate da 1 a 20. Ciascun numero è presente in una e una sola di queste palline. Quante palline diverse dobbiamo estrarre come minimo, per essere sicuri che il prodotto dei loro numeri sia un multiplo di 12?
(A) 7 **(B)** 11 **(C)** 12 **(D)** 15 **(E)** 18.

2008

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

a) Si hanno sette numeri interi positivi a, b, c, d, e, f, g tali che i prodotti ab, bc, cd, de, ef, fg, ga sono tutti cubi perfetti. Dimostrare che anche a, b, c, d, e, f, g sono cubi perfetti.

b) Si hanno sei numeri interi positivi a, b, c, d, e, f tali che i prodotti ab, bc, cd, de, ef, fa sono tutti cubi perfetti. È sempre vero che a, b, c, d, e, f sono tutti cubi perfetti?

Nota: si dice cubo perfetto un intero m tale che $m = n^3$ per qualche intero n.

2010

10. Quattro interi positivi $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ sono tali che, dati due qualunque di essi, il loro massimo comun divisore è maggiore di 1, ma $\mathrm{mcd}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 1$. Qual è il minimo valore che può assumere a_4?

(A) 10 **(B)** 12 **(C)** 15 **(D)** 30 **(E)** 105.

2008

11. Vi sono 10000 lampadine numerate da 1 in poi, ciascuna delle quali viene accesa e spenta con un normale interruttore. All'inizio tutte le lampadine sono spente; poi si premono una volta tutti gli interruttori delle lampadine contrassegnate dai multipli di 1 (di conseguenza tutte le lampadine vengono accese), successivamente vengono premuti una volta gli interruttori di tutte quelle di posto pari (cioè multiplo di 2), poi quelle contrassegnate con i multipli di 3, successivamente si cambiano di stato quelle relative ai multipli di 4 e così via, sino ai multipli di 10000. Quale delle seguenti lampadine rimane accesa al termine delle operazioni?

(A) La numero 9405 **(B)** la numero 9406 **(C)** la numero 9407 **(D)** la numero 9408 **(E)** la numero 9409.

2009

6. Un'urna contiene N palline ($N > 3$) numerate da 1 a N. Se dall'urna vengono tolte due palline recanti numeri non multipli di 3 e una recante un multiplo di 3, la probabilità di ottenere un multiplo di 3 estraendo una singola pallina risulta minore di quanto era con l'urna completa. Cosa si può dedurre riguardo a N?

(A) N è certamente multiplo di 3
(B) N non è multiplo di 3
(C) N è certamente dispari
(D) N è certamente pari
(E) nessuna delle affermazioni precedenti può essere dedotta.

2009

7. Determinare il più grande intero n con questa proprietà: esistono n interi positivi distinti $a_1, \dots a_n$ tali che, comunque se ne scelgano fra essi due distinti, né la loro somma né la loro differenza siano divisibili per 100.

(A) 49 **(B)** 50 **(C)** 51 **(D)** 99 **(E)** 100.

2009

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

a) Qual è il minimo intero positivo c tale che esista almeno una coppia (a, b) di interi positivi distinti tali che $2c^2 = a^2 + b^2$?

b) Dimostrare che esistono infinite terne (a, b, c) di interi positivi distinti tali che $2c^2 = a^2 + b^2$.

2010

5. Per quanti interi relativi n si ha che $\dfrac{3n}{n+5}$ è intero e divisibile per 4?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 8 **(E)** più di 8.

NUORO

KIRILL KUZMIN

ALGEBRA & CO

Note Title

2006

9. Quanti simboli di radice quadrata, come minimo, devono comparire nell'espressione $\sqrt{\cdots\sqrt{\sqrt{123.456.789}}}$ affinché il risultato sia minore di 2?
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9.

2009

1. Quanti interi n sono tali che $\sqrt{n}$ differisce da $\sqrt{101}$ per meno di 1?
(A) 19 (B) 21 (C) 40 (D) 41 (E) 42.

2008

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**
Si determinino tutte le coppie $(x,\ y)$ di numeri reali che verificano l'equazione

$$\frac{4}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\ .$$

2008

5. Siano $a_0, a_1, a_2, \ldots$ numeri interi tali che $a_0 = 19, a_1 = 25$, e per ogni $n \geq 0$ valga $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$.
Qual è il più piccolo $i > 0$ per cui a_i è multiplo di 19?
(A) 19 (B) 25 (C) 38 (D) 44 (E) 50.

2009

14. Sia x la più piccola delle due soluzioni dell'equazione $x^2 - 4x + 2 = 0$. Quali sono le prime tre cifre dopo la virgola nella scrittura (in base 10) del numero

$$x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2009}?$$

2010

7. Qual è la seconda cifra (partendo da sinistra) del numero $(10^{16}+1)(10^8+1)(10^4+1)(10^2+1)(10+1)$?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4.

2005

15. Quante sono le coppie ordinate $(x,\ y)$ di interi positivi x e y che soddisfano la relazione $xy + 5(x+y) = 2005$?

2007

5. Sia $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Sapendo che la somma di due delle radici del polinomio vale zero, quale fra le seguenti relazioni tra i coefficienti di $P(x)$ è sempre vera?
(A) $abc = 0$ (B) $c = ab$ (C) $c = a + b$ (D) $b^2 = ac$
(E) nessuna delle risposte precedenti è corretta.

2005

4. Quanti sono i polinomi $p(x)$ di secondo grado, a coefficienti interi e con 2 radici intere, tali che $p(8) = 1$? (Nota: ricordiamo che i numeri interi possono essere positivi, negativi o nulli)
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) un numero finito maggiore di 3 (E) infiniti.

2008

10. Indicando con x_1, x_2, x_3 e x_4 le soluzioni dell'equazione $x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x + 1 = 0$, quanto vale $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} + \dfrac{1}{x_4}$?
(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) 4 (E) 7.

2007

13. Sia $p(x) = x^{20} + a_{19}x^{19} + a_{18}x^{18} + \ldots + a_1x + a_0$ un polinomio, con gli a_i interi. Sappiamo che, per tutti gli interi k compresi tra 1 e 20, $p(k) = 2k$. Quali sono le ultime 3 cifre di $p(21)$?

2010

12. Sia $p(x)$ un polinomio di grado 2010. Qual è il massimo grado che può avere il polinomio $p(x-1) - 3p(x) + 3p(x+1) - p(x+2)$?
(A) È sempre il polinomio nullo (B) 0 (C) 1 (D) 2007 (E) 2010

2009

12. Francesco vuole scrivere il polinomio $x^{16} + x$ come prodotto di più polinomi a coefficienti interi, ognuno di grado almeno 1. Quanti fattori potrài¿½ ottenere al massimo?
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5.

2005

7. Al variare del parametro reale a, qual è il numero massimo di soluzioni per l'equazione $||x-1|-4|+x=a$?
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** può averne infinite.

2007

2. Un mercante ha 6 barili di capacità 15, 16, 18, 19, 20 e 31 litri. Cinque di essi sono pieni di vino e solo uno di essi è pieno di birra. Il mercante tiene per sé il barile di birra e vende tutti i barili di vino a due persone diverse, senza frazionarne il contenuto. Se uno dei due acquirenti ha comprato una quantità di vino esattamente doppia di quella acquistata dall'altro, quanti litri contiene il barile di birra?
(A) 16 **(B)** 18 **(C)** 19 **(D)** 20 **(E)** 31.

2007

4. Uno studente universitario ha superato un certo numero di esami, riportando la media di 23. Dopo aver superato un altro esame, la sua media scende a 22,25. Sapendo che il voto di ciascun esame è un numero intero compreso fra 18 e 30 inclusi, che voto ha riportato lo studente all'ultimo esame?
(A) 18 **(B)** 19 **(C)** 20 **(D)** 21 **(E)** 22.

2010

1. 16 coni stradali sono messi in linea retta a distanza di 10 metri uno dall'altro. Si vuole dipingere sulla strada una linea continua che vada dal primo all'ultimo cono. Sapendo che per dipingere 100 metri di linea continua sono necessari 6 litri di vernice, quanti litri di vernice sono necessari per completare questo lavoro?
(A) 8,4 **(B)** 9 **(C)** 9,6 **(D)** 10 **(E)** nessuna delle precedenti.

2005

1. Edoardo è andato in vacanza nella città di Altanbulat. Il suo aereo, all'andata, è partito da Milano alle 13:00 ed è arrivato ad Altanbulat alle 9:00 del giorno dopo (ora locale). Il volo di ritorno invece è partito da Altanbulat alle 9:00 ed è atterrato alle 15:00 dello stesso giorno a Milano (di nuovo, tutte le ore indicate sono secondo il fuso orario locale). Supponendo che i due viaggi abbiano avuto la stessa durata reale, quant'è la differenza di fuso orario tra l'Italia e Altanbulat?
(A) Meno di tre ore
(B) più di tre ore, ma meno di sei
(C) più di sei ore, ma meno di nove
(D) più di nove ore
(E) non è possibile determinarla.

2006

6. Si consideri il piano tassellato con triangoli equilateri, e sia F_0 uno qualsiasi di essi. Si costruisce una sequenza di figure sempre più grandi in questo modo: F_1 è il poligono che si ottiene aggiungendo ad F_0 la cornice formata da tutti i triangoli della tassellazione che toccano F_0 (per un lato o per un vertice), F_2 è il poligono che si ottiene aggiungendo ad F_1 la cornice formata dai triangoli che toccano F_1, e analogamente si costruiscono i successivi sino ad F_{10}. Da quanti triangoli della tassellazione è composto quest'ultimo poligono?
(A) 541 **(B)** 661 **(C)** 691 **(D)** 721 **(E)** 841.

2007

6. Dall'insieme $\{1, 2, \ldots, 100\}$ scegliamo 50 numeri distinti, la cui somma è 3000. Come minimo, quanti numeri pari abbiamo scelto?
(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6.

2008

2. Il *So-poko* è un nuovo gioco enigmistico che si gioca su una tabella quadrata di lato 203 caselle. Le caselle sono colorate di bianco e di nero a cornici concentriche alternate; la cornice più esterna è nera, mentre la casella centrale è bianca (vedi a fianco un esempio 7×7). Qual è la differenza tra il numero di caselle nere e il numero di caselle bianche presenti nello schema?
(A) 103 **(B)** 203 **(C)** 207 **(D)** 303 **(E)** 407.