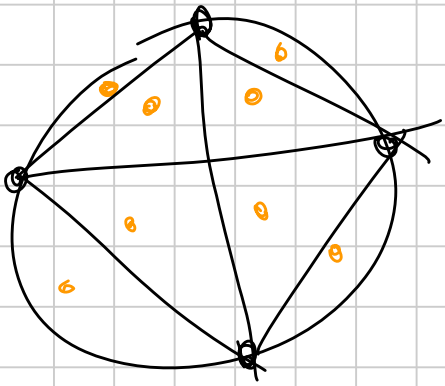
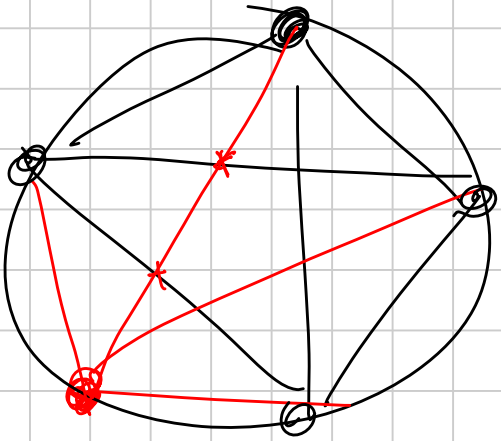
ALGEBRA

Titolo nota 14/02/2014

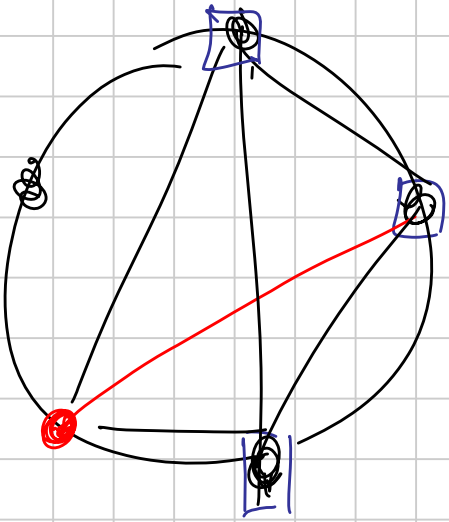


1	1	A_1
2	2	A_2
3	4	A_3
4	8	⋮
5	16	
6	31!!	

A_n



Ogni segmento nuovo aggiunge 1 regione + 1 per ogni punto di intersez. con i segmenti vecchi



Ogni modo di scegliere 3 punti vecchi determina 1 e 1 sola nuova intersezione

Se abbiamo n punti, ne aggiungiamo uno, aggiungiamo $n + \binom{n}{3}$ regioni

$$\boxed{A_{n+1} = A_n + n + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}} \Rightarrow$$

A_n polinomio di grado 4

Differenze finite: $p(x)$ di grado 3

ES x^3

$$\begin{array}{r} 36 \\ 6 \\ \hline 216 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 6 \\ \hline 6 \end{array}$$

1 8 27 64 125 216

7 19 37 61 91

12 18 24 30

$\boxed{6 \quad 6 \quad 6}$ 6 6

Teo: dato un polinomio di grado d, dopo d passi del procedimento sopra ottengo tutti numeri uguali

1 2 4 8 16 31 ... ...

1 2 4 8 15

1 2 4 7

1 2 3

1 1 1 ... 1

$p(x)\ a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 + a_0$

$$p(x+1) - p(x) = a_d\left[(x+1)^d - x^d\right] + a_{d-1}\left[(x+1)^{d-1} - x^d\right] + \dots$$

il pezzo di grado d sparisce

$p(x+1) - p(x)$ ha grado $d-1$

CLAIM: questa cosa funziona anche al contrario

Se $f(x+1) - f(x)$ è un polinomio di grado $d-1$, allora $f(x)$ è un polinomio di grado d

1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	31!!

$$\begin{cases} a+b+c+d+e = 1 \\ a\cdot 2^4 + b\cdot 2^3 + c\cdot 2^2 + d\cdot 2 + 1 = 2 \\ a\cdot 3^4 + b\cdot 3^3 + c\cdot 3^2 + d\cdot 3 + 1 = 4 \\ \vdots \end{cases}$$

$$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$p(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

a_i coefficienti — interi $\mathbb{Z}$, razionali $\mathbb{Q}$, reali $\mathbb{R}$

x "simbolo"

posso sostituire un numero a x

Grado: d max d tale che $a_d \neq 0$

$p(x)$ grado d

$q(x)$ grado e

$\Rightarrow$ $p(x)\,q(x)$ $d+e$

$p(x)+q(x)$ $\begin{cases} \max(d,e) & \text{se } d \neq e \\ \leq d & \text{se } d = e \end{cases}$

$2+x^2$

$2-x^3$

$a(x)$ $b(x)$ polinomio, posso scrivere

$$a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$$

grado di $r(x)$ < grado di $b(x)$
(oppure $r(x)=0$)

$$
\begin{array}{l|l}
X^{16} & +1 \quad X+1 \\ \hline
X^{16}+X^{15} & X^{15}+\dots \\ \hline
0 \quad \boxed{-X^{15}} & +1
\end{array}
$$

Se $a(x)$, $b(x)$ coefficienti razionali, $q(x)$ $r(x)$ pure
" " " " reali pure
" " " " interi no!

$$
\begin{array}{l|l}
X^2 & -1 \quad 2X+2 \\ \hline
 & \frac{1}{2}X
\end{array}
$$

$$\underbrace{X^2-1}_{a(x)} = \underbrace{\tfrac{1}{2}(x-1)}_{q(x)} \cdot \underbrace{(2x+2)}_{b(x)} + \underbrace{0}_{r(x)}$$

Però se $b(x)$ è monico [cioè $b(x)=1\cdot X^d+a_{d-1}X^{d-1}+\dots$]
allora $q(x)$, $r(x)$ sono interi

$p(x)$, $q(x)$ non hanno fattori comuni
Esistono $a(x)$, $b(x)$ polinomi t.c.

$a(x)\,p(x) + b(x)\,q(x) = 1$ Bézout

$\rightsquigarrow$ massimi comun divisori, fattorizzazione, ...

Anche per i polinomi vale fattorizzazione unica

$$(x-5)\,a(x) = p(x)\,q(x)$$

$$x-5 \mid p(x)\,q(x)$$

$\Rightarrow$ $x-5 \mid p(x)$ oppure $x-5 \mid q(x)$

(Per ogni polinomio di grado 1)

Ruffini $\quad p(a)=0 \iff p(x) = (x-a)\,s(x)$

$$p(x) = (x-a)\,q(x) + r(x)$$

grado=0
costante

$$p(a) = r(a)$$

---

polinomio monico di grado 21 tale che

$p(0)=0 \quad p(1)=2 \quad p(2)=4 \quad p(3)=6$

$p(20)=40$

...

Sapreste trovarlo?

$p(x)-2x$ è una cosa che si annulla per $x=0,1,2,3,\dots 20$

$$\underbrace{p(x)-2x}_{\text{grado } 21} = \underbrace{x(x-1)(x-2)\cdots(x-20)}_{\text{grado } 21}\cdot \underbrace{q(x)}_{\text{grado } 0}$$

deve essere costante!

$q(x)\equiv 1$ perché vogliamo $p(x)$ monico

$$p(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-20)+2x$$

Per quali valori ~~a, b~~ x interi l'espressione

$p = x^2+2x+1$ è un numero primo?

$$p = (x+1)^2$$

Per quali valori a, b

a^4+4b^4 è un numero primo?

$$\underbrace{a^4+4a^2b^2+4b^4}-4a^2b^2 =$$

$$= (a^2+2b^2)^2-4a^2b^2 = (a^2+2b^2-4ab)(a^2+2b^2+4ab)$$

(frammento di esercizio)

se volete primo, uno di questi oggetti fa 1

Qualche Fibonacci fa:

Per quali valori x, y interi si ha

$$x^3 + y^3 = 91 \quad ?$$

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 7 \cdot 13$$

$x+y$	x^2-xy+y^2	
1	$7\cdot 13$	✗
7	13	✗
13	7	✗
$7\cdot 13$	1	✗
-1	$-7\cdot 13$	
-7	-13	
-13	-7	
$-7\cdot 13$	-1	

$(6, -5)$

$(3, 4)$

$$\begin{cases} x+y = 1 \\ x^2 - xy + y^2 = 91 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = 1 \\ x^2 - xy + y^2 - (x+y)^2 = 91 - 1^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ -3xy=90 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=1 \\ xy=-30 \end{cases}$$

<u>Teo</u>: Le soluzioni di $\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$ sono le soluzioni dell'equazione di 2° grado

$$t^2-at+b=0$$

$$x^2-x+30=0 \quad \begin{cases} 6 \\ -5 \end{cases}$$

$$x^2-ax+b=(x-s)(x-t)=x^2-(s+t)x+st$$

Formule di Viète

Dato un polinomio x^2+ax+b, siano x_1, x_2 le sue radici, <u>allora</u>

$$a=-(x_1+x_2)$$
$$b=x_1x_2$$

Polinomio x^3+ax^2+bx+c

$$-a=x_1+x_2+x_3$$
$$b=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$$
$$-c=x_1x_2x_3$$

Per gradi più alti ... $x^k + a x^{k-1} + b x^{k-2} + \dots z$

$$-a = x_1 + x_2 + \dots + x_k$$

$$b = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_2 x_3 + \dots x_3 x_4 \dots x_{k-1} x_k$$

$$-c = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots$$

$$\pm z = x_1 x_2 x_3 \dots x_k$$

<u>Es</u>: dato il polinomio $x^3 + a x^2 + b x + c$, siano x_1, x_2, x_3 le sue soluzioni

sapreste costruire un polinomio che ha $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$ come soluzioni? $x^3 + d x^2 + e x + f$

$$-d = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1}{x_1 x_2 x_3} = \frac{b}{-c}$$

$$e = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_2} \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_3} \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1 x_2 x_3} = \frac{-a}{-c}$$

$$-f = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{x_3} = \frac{1}{x_1 x_2 x_3} = \frac{1}{-c}$$

$$x^3 + \frac{b}{c} x^2 + \frac{a}{c} x + \frac{1}{c}$$

$p(x) = x^2 + a x + b$, soluzioni x_1, x_2

vogliamo un polinomio che abbia per

soluzioni i quadrati: x_1^2, x_2^2

x^2+dx+e

$$d = x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_2 = (x_1+x_2)^2-2x_1x_2 = a^2-2b$$

$$e = x_1^2x_2^2 = (x_1x_2)^2 = b^2$$

$$x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 \\ x_1x_2x_3 \end{cases}$$

[in generale, funziona sempre – poly. simmetrici si scrivono come funzioni dei "polinomi simmetrici elementari"

$$S = 1+2+3+\dots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & & 2 & 1 \\ \hline n+1 & n+1 & n+1 & \dots & & n+1 & n+1 \end{array} \begin{array}{l} = S \\ = S \\ \\ \end{array}$$

$$2S = n(n+1) \qquad S = \frac{n(n+1)}{2}$$

$1^2+2^2+3^2+ \cdots +n^2$?

$$\begin{cases} 1^2 = 1 \\ 1^2+2^2 = 5 \\ 1+4+9 = 14 \\ 1+4+9+16 = 30 \\ 1+4+9+16+25 = 55 \\ \vdots \end{cases}$$

0 1 5 14 30 55 - - - -

quadrati

1 4 9 16 25 36 49

3 5 7 9 11 13

2 2 2 2 2

$\Rightarrow$ ci aspettiamo che sia un polinomio di grado 3

ax^3+bx^2+cx+d

$$\begin{cases} d=1 \\ a+b+c+d=5 \\ a2^3+b2^2+c2+d=14 \\ \vdots \end{cases}$$

1

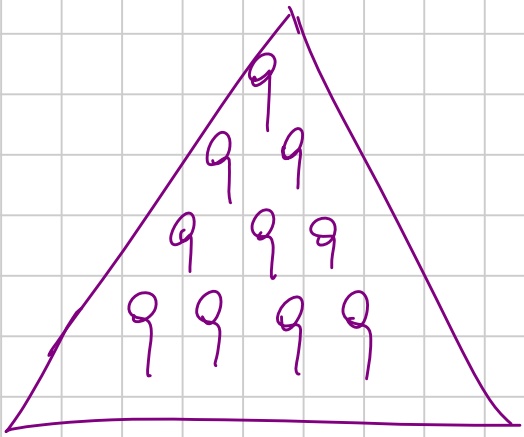
2 2

3 3 3

4 4 4 4

Somma numeri nel triangolo $= 1+2^2+3^2+4^2$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2\ 2 \\ 3\ 3\ 3 \\ 4\ 4\ 4\ 4 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 4 \\ 4\ 3 \\ 4\ 3\ 2 \\ 4\ 3\ 2\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 4 \\ 3\ 4 \\ 2\ 3\ 4 \\ 1\ 2\ 3\ 4 \end{array}$$



$$\begin{array}{c} 1 \\ 2\ 2 \\ 3\ 3\ 3 \\ \vdots \\ n\ n\ n\ n\ n \end{array} \qquad \begin{array}{c} n \\ n\ \ n-1 \\ n\ \ n-1\ \ n-2 \\ \vdots \\ n\ \ n-1\ \ \cdots\ \ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} n \\ n-1\ \ n \\ n-2\ \ n-1\ \ n \\ \vdots \\ 1\ \ 2\ \ \cdots\ \ n-1\ \ n \end{array}$$

S = somma dei primi n quadrati

Sommo numeri nello stesso posto nei tre triangoli

fanno tutte $2n+1$

$$\begin{array}{c} 2n+1 \\ \vdots \\ 2n+1 \qquad 2n+1 \end{array}$$

$$3S = \frac{n(n+1)}{2}(2n+1)$$

$$\boxed{S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Somme cubi, quarte potenze, ...

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3+\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=(1+2+\dots+n)^2$$

$$1+3+5+7+\dots\dots 2n+1$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & 5 & 7 & \dots & 2n+1 & \to S_{\text{dispari}} \\ 2n+1 & 2n-1 & 2n-3 & \dots & 3 & 1 & \to S_{\text{dispari}} \\ \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow & \\ 2n+2 & \dots & & & & 2n+2 & \end{array}$$

$$\frac{(2n+2)\cdot(2n+1)}{2}$$

$$a \quad a+d \quad a+2d \quad a+3d \quad \dots \quad a+kd$$

Se volete sommarli tutti, stesso trucco

$$\underbrace{\frac{a+(a+kd)}{2}}_{\text{media del primo e dell'ultimo}}\cdot\underbrace{(k+1)}_{\#\text{ termini da sommare}}$$

$$a \quad a\cdot q \quad a\cdot q^2 \quad \dots \quad a\cdot q^k$$

$$a + a\cdot q + \dots + a\cdot q^k = a\left(1+q+q^2+q^3 \dots + q^k\right) = a\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$(x^n - 1) = \left(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1\right)(x-1)$$

$$\boxed{\frac{x^n-1}{x-1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-2} + x^{n-1}}$$ identità

Disuguaglianze

1 euro 10 euro 100 euro

Prendete
1 di un tipo, 3 di un altro, 5 dell'ultimo

In generale,

a_1 a_2 a_3

b_1 b_2 b_3

la quantità

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

è <u>massima</u> quando a_1, a_2, a_3 e b_1, b_2, b_3 sono ordinati nello stesso modo

$$a_1 \le a_2 \le a_3$$
$$b_1 \le b_2 \le b_3$$

$1\cdot 1 + 3\cdot 10 + 5\cdot 100$

è <u>minima</u> quando sono ordinati in modo opposto

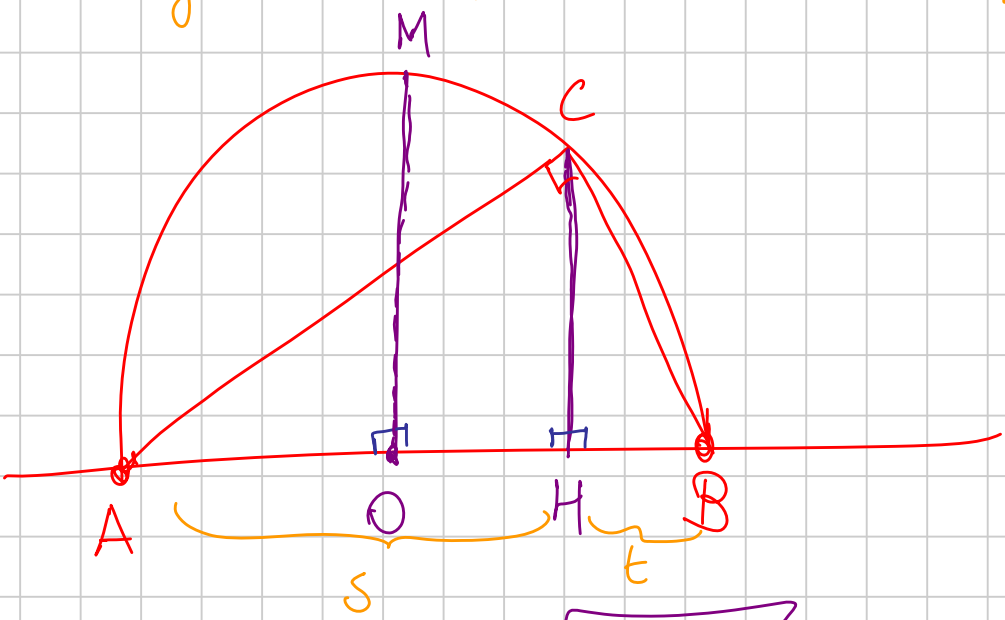
$x, y, z \geq 0$

$$\underbrace{x}_{a_1}\overbrace{y}^{b_1} + \underbrace{y}_{a_2}\overbrace{z}^{b_2} + \underbrace{z}_{a_3}\overbrace{x}^{b_3} \leq x^2+y^2+z^2$$

$$xy + yx \leq x^2+y^2$$

$$xy \leq \frac{x^2+y^2}{2} \qquad x^2 = s \quad y^2 = t$$

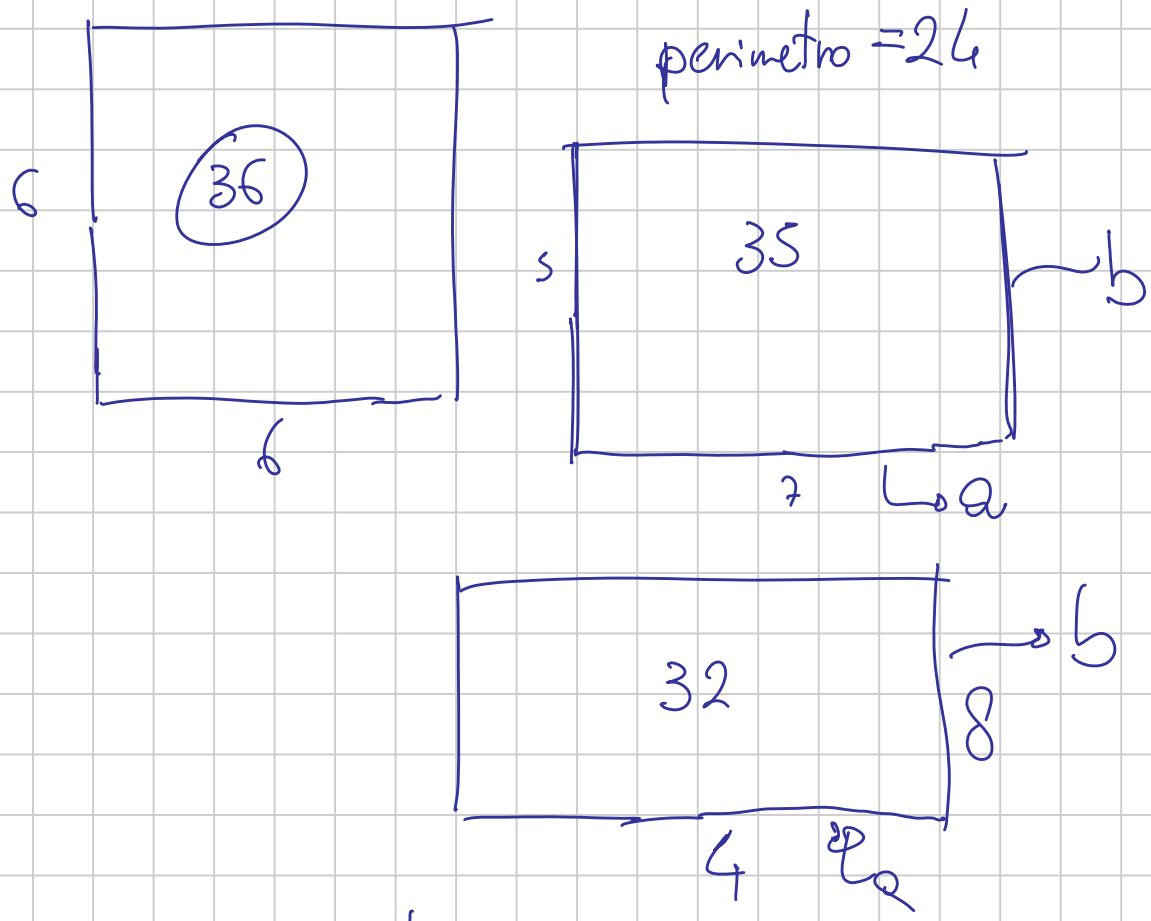
$$\boxed{\underbrace{\sqrt{st}}_{\text{media geometrica}} \leq \underbrace{\frac{s+t}{2}}_{\text{media aritmetica di } s,\, t}}$$



$CH^2 = AH \cdot HB \qquad CH = \sqrt{AH \cdot HB} \qquad OM = \frac{AH+HB}{2}$

$$(*) \quad \sqrt{st} \leq \frac{s+t}{2}$$

vale l'= se $s=t$



Tra tutti i rettangoli con perimetro fissato quello con area maggiore è il quadrato

$$(*) \quad ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

sempre $<$, tranne quando $a=b$

$\square$