ARITMETICA

Titolo nota 20/01/2015

- Quanti divisori?

$12 \to \cancel{6\,2} \quad 12$

$350 \to 2 \cdot 5^2 \cdot 7$

$2^0 \cdot 5^1 \cdot 7^1$

2 3 2

$\to 12 \to 24$

$$\boxed{\frac{350}{n-4}} \text{ intero}$$

14

12	350	$n = 354$
1	1	$n = 5$
1	-1	$n = 3$
	-2	

$$\frac{n-1}{n+5} \text{ intero}$$

$$= \frac{n+5-6}{n+5} = 1 - \frac{6}{n+5}$$

1

$$\frac{2m-14}{m-1}$$ INTERO

$$= \frac{2(m-7)}{m-1} = \frac{2(m-1-6)}{m-1}$$

$$= \frac{2\cancel{(m-1)}}{\cancel{m-1}} - \frac{12}{m-1}$$ 7

$$\frac{m^2+6m+7}{m+5}$$ INTERO

$$\frac{m(m+5)+m+7}{m+5}$$

$$\frac{m\cancel{(m+5)}}{\cancel{m+5}} + \frac{m+7}{m+5}$$

$$m + \frac{\cancel{m+5}}{\cancel{m+5}} + \frac{2}{m+5}$$

$-3, -4, -6, -7$

(x,y) $$\frac{1}{x} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{y+1}{xy} = \frac{1}{2}$$

$$2(y+1) = xy$$

$$x = \boxed{2\,\frac{y+1}{y}}$$

INTERO

INTERO

$$= 2 + \frac{2}{y}$$

$y = 1,\ \cancel{-1},\ 2,\ -2$

$x = 4,\ \cancel{0},\ 3,\ 1$

QUANTE COPPIE (x,y) di interi SODDISFANO

$$xy+5(x+y)=2005$$

15. Quante sono le coppie ordinate $(x,\ y)$ di interi positivi x e y che soddisfano la relazione $xy+5(x+y)=2005$?

$$x(y+5)+5y=2005$$

$$x=\frac{2005-5y+25-25}{y+5}$$

$$=-5+\frac{2030}{y+5}$$

$$5\cdot 406=2030$$

$$2030=2\cdot 5\cdot 7\cdot 29$$

16 div. positivi

1, 2, 5

$y+5=1 \rightarrow y=-4$

13 coppie al MAX

$$X = -5 + \frac{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29}{y+5}$$

1, 2, 5

10 coppie

16

$$\boxed{\frac{2030}{\boxed{y+5}}} \to 1, 2, 5 \text{ NO}$$

$\to$ 1, 2, 5 NO

$$X^2 - y^2 = 2015$$

(x, y) positivi

$$\underbrace{(X+y)}_{>0}\underbrace{(X-y)}_{>0} = 2015$$

$$2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$$

8 div.

$$X - y = ?$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ X + y = 2015 \end{cases}$$

$x = 1008$, $y = 1007$

$$\begin{cases} x - y = 13 \\ x + y = 31 \cdot 5 \end{cases}$$

$$2x = 31 \cdot 5 + 13$$

$$y = x - 13$$

$$\begin{cases} x - y = 6 \\ x + y = 16 \end{cases}$$

$$(x-y)(x+y) = 5 \cdot 13 \cdot 31$$

$$\begin{cases} x - y = 2015 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\underset{x-y}{5} \qquad \underset{x+y}{13 \cdot 31}$$

4 coppie di sol.

$$x^2 - y^2 = 2014$$

$$x^2 - y^2 = 2016$$

$$2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$$

$$2016 = \underline{2^5 \cdot 3^2 \cdot 7}$$

$$\begin{cases} x - y = 2 \cdot \\ x + y = 2 \cdot \end{cases}$$

$$\boxed{2^3 \cdot 3^2 \cdot 7}$$

24 div

$\Downarrow$

12 coppie

12 coppie di sol.

(x, y)

$(-x, y)$ $(x, -y)$ $(-x, -y)$

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

$x \to -x$

$y \to y$

$$(-x)^2 - y^2 = (-x+y)(-x-y) =$$

$$= -(x-y)(-(x+y))$$

15. ESERCIZIO DIMOSTRATIVO

a) Qual è il minimo intero positivo c tale che esista almeno una coppia (a, b) di interi positivi distinti tali che $2c^2 = a^2 + b^2$?

b) Dimostrare che esistono infinite terne (a, b, c) di interi positivi distinti tali che $2c^2 = a^2 + b^2$.

$(a_0, b_0, c_0) \leftarrow$ Soluz.

$a^2 + b^2$ pari

- a, b pari $\quad a = 2h \quad b = 2k$

$$2c^2 = 4h^2 + 4k^2$$

$$c^2 = 2h^2 + 2k^2$$

$\Rightarrow$ c è pari $\quad c = 2\ell$

$(2h, 2k, 2\ell)$ sol.

(h, k, ℓ)

- a, b dispari

$a = 2h + 1 \quad b = 2k + 1$

$$2c^2 = (2h+1)^2 + (2k+1)^2$$

$$2c^2 = 4h^2 + 4h + 1 + 4k^2 + 4k + 1$$

$$c^2 = \boxed{2h^2 + 2h + 2k^2 + 2k} + 1$$

$c = 1 \qquad 2 = a^2 + b^2$

$c = 3 \qquad 18 = a^2 + b^2$

$c = 5 \qquad 50 = a^2 + b^2$

1 7 5

a, b sono o tutti pari
o " dispari

$a = x + y \qquad b = x - y$

$$2c^2 = (x+y)^2 + (x-y)^2$$

$$2c^2 = x^2 + \cancel{2xy} + y^2 + x^2 - \cancel{2xy} + y^2$$

$$c^2 = x^2 + y^2$$

$x = 4$
$y = 3$ $\quad c = 5$

3. Linee di difesa

La difesa è uno dei punti di forza dell'esercito romano. Per organizzare una linea di difesa il comandante della legione allinea i soldati in base alla loro esperienza sul campo. L'esperienza di ogni soldato viene quantificata con un intero tra 1 e 40. Giulio Cesare è un esperto nell'organizzare le linee di difesa ed usa una tecnica segreta che gli garantisce sicuro successo: una linea di difesa efficace è composta da soldati allineati in modo che la somma delle esperienze di due soldati tra loro vicini sia sempre multipla di 3. Nell'attaccare la Gallia, Giulio Cesare dispone di soldati con le seguenti esperienze: 4, 10, 11, 14, 16, 23, 32, 34. In quanti modi Giulio Cesare può organizzare una linea di difesa efficace che usi tutti gli 8 soldati a disposizione?

$3K+1$		$3K+2$	
4	10	11	14
16	34	23	32

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ modi

$4!$

1 2 1 2 1 2 1 2

2 1 2 1 2 1 2 1

$2 \cdot 4! \cdot 4!$

$\underline{1152}$

15. Invincibili coorti

Il centurione Gruppus Abelianus è stato incaricato di preparare una coorte di legionari per il prossimo attacco al villaggio dei Galli. Il suo compito è quello di disporre tutti i legionari in un rettangolo serrato, composto da file tutte uguali e di lunghezza minima possibile (ma maggiore di 1).

Dopo alcune ore di lavoro senza ottenere risultati, Abelianus si reca da Giulio Cesare e si lamenta: "Sommo Giulio Cesare, ho provato a disporre i soldati in fila per 2, per 3, per 4, per 5 e così via fino a disporli in fila per 10, ma in tutti i casi avanzava sempre un legionario. Come posso fare?" Giulio Cesare risponde senza indugio: "Centurione Abelianus, il numero di legionari da disporre in ogni fila dovrà sicuramente essere maggiore di 10, e Giulio Cesare è sicuro — Giulio Cesare parla di se stesso sempre in terza persona — che è possibile disporre i legionari in modo che non ne avanzi alcuno." Sapendo che i legionari in tutto sono più di 10000 ma meno di 11000, in quante file saranno disposti?

15. ESERCIZIO DIMOSTRATIVO

Dato un qualsiasi intero positivo n, chiamiamo *ciclostilato* di n il numero che si ottiene concatenando 2012 scritture di n (in base 10). Per esempio il ciclostilato di 314 è $314314314\ldots314$, dove le cifre "314" si ripetono 2012 volte.

(a) Determinare tutti gli interi positivi m tali che il ciclostilato di m sia multiplo di 9.

(b) Determinare tutti gli interi positivi m tali che il ciclostilato di m sia multiplo di 11.