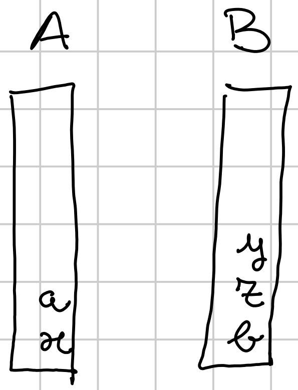
EGMO CAMP - COMBINATORIA

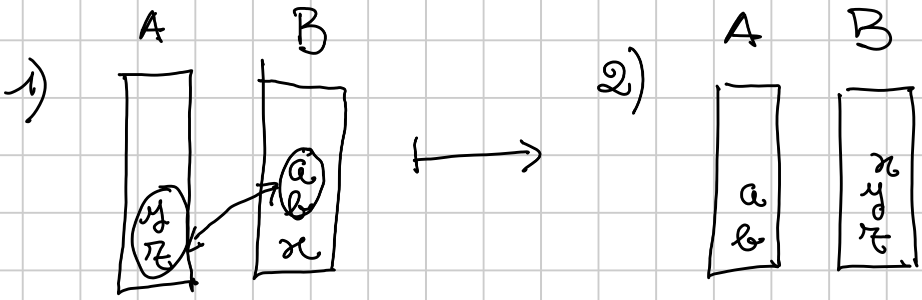
Note Title 1/21/2018

C1

OSS PRELIMINARE: se dimostro che posso scambiare una carta alla volta ho vinto.



Come mettiamo b in A al posto di x?



Questo algoritmo permette usando una sequenza finita di mosse di costruire ogni scatola una carta alla volta "disturbando" solo le scatole che contengono carte "sbagliate".
Questo ci permette di concludere perché costruiamo le scatole una per volta.

$\boxed{C2}$

$$\underbrace{a_1 \ a_2}\ \underbrace{\ldots \ a_n} \qquad \forall\, m \quad 1 \le m \le n$$

oss. 1 $\quad m=1 \to a_1$ o a_n è intero. $\rightsquigarrow$ senza perdita di generalità, a_1 intero.

oss. 2: $\quad n$ dispari $\quad \overbrace{1 \ \tfrac{1}{2} \ \tfrac{1}{2}}^{m \text{ dispari}} \ \underbrace{\ldots \ \ldots \ \tfrac{1}{2}}_{m \text{ pari}}$

Caso $n = 2k$

$$\underbrace{a_1}_{\text{intero}} \; a_2 \; \dots \; a_{k-1} \; a_k \quad a_{k+1} \; a_{k+2} \; \dots \; a_{2k}$$

- $m = n \rightarrow \sum_1^{2k} a_i$ intera
- $m = k \rightarrow \sum_1^{k} a_i \,,\; \sum_{k+1}^{2k} a_i$ intere
- $m = k-1 \rightarrow \sum_1^{k-1} a_i$ intera o $\sum_{k+2}^{2k}$ intera

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

a_k intero o a_{k+1} intero

$\Longrightarrow$ ci sono almeno 2 interi nella sequenza

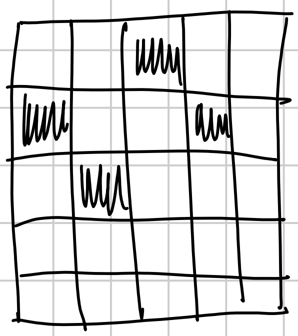
$n = 4a+2 \qquad (n \equiv 2 \pmod 4)$

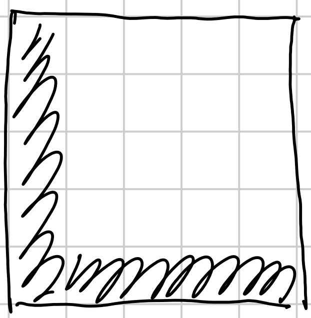
$$1 \;\; \tfrac{1}{2} \;\; \tfrac{1}{2} \; \cdots \; \tfrac{1}{2} \;\Big|\; 1 \;\; \tfrac{1}{2} \; \cdots \; \tfrac{1}{2}$$

$n = 4a$

$$1 \;\; \tfrac{1}{2} \; \cdots \; \tfrac{1}{2} \;\; 1 \;\Big|\; \tfrac{1}{2} \;\; \tfrac{1}{2} \; \cdots \; \tfrac{1}{2}$$

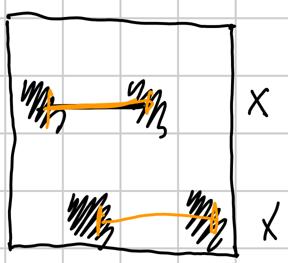
$\boxed{C3}$





oss. 1
$2n-1$ caselle nere
"a L" non ci sono parallelogrammi.

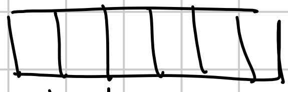
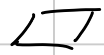
Se ho $(\geq)$ $2n$ caselle nere $\Rightarrow$ c'è un parallelogramma.



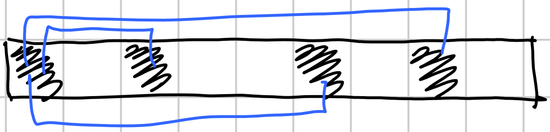
X

X

Caso + semplice: in ogni riga ho 2 caselle nere
Consideriamo i $\varnothing$ con due lati orizzontali

Le distanze possibili sono $n-1$ 
ma le righe sono n $\Rightarrow$ per pigeonhole c'è (almeno) una distanza ripetuta $\Rightarrow$ c'è un 

Sia a_i il n° di caselle nere della i-esima riga
Quante distanze distinte tra loro posso formare?



$a_i - 1$ (se $a_i \geq 2$)

se $a_i = 0$ oppure $a_i = 1$

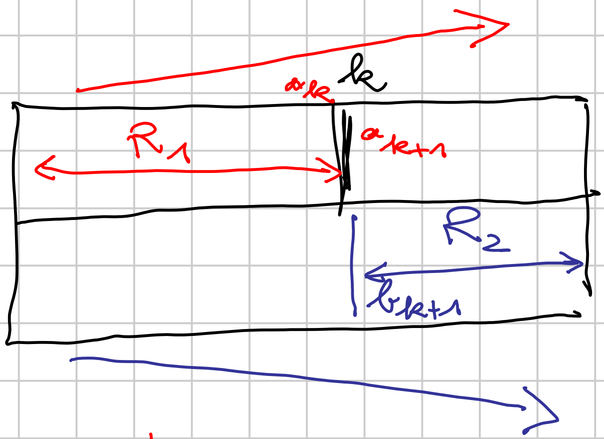
$\boxed{\#\text{ dist. distinte} \geq a_i - 1}$

totale di distanze distinte

$$\geq \sum_{i=1}^{n} (a_i - 1) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) - n = 2n - n = n$$

Poiché $n \geq n-1$ ho due distanze che si ripetono (e sono sicuramente su righe diverse).

C4



a_i l'i-esimo elemento della prima riga

$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_i \leq \dots \leq a_n$

b_j il j-esimo elemento della seconda riga

$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_j \geq \dots \geq b_n$

$$R_1 = \sum_{i=1}^{k} a_i$$

abbiamo scelto k in modo che $R_1 \leq \frac{n+1}{4}$

ma $\quad R_1 + a_{k+1} > \frac{n+1}{4}$

- $a_{k+1} \geq a_k$
- $R_1 + a_{k+1} > \frac{n+1}{4}$
- $R_1 \leq k \cdot a_k$

$$\underset{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k}{\underset{\parallel}{R_1}}$$

$$M = \max\left\{\frac{n+1}{4} - R_1 , a_k\right\}$$

$$M \leq a_{k+1} < 1$$

$$\boxed{b_{k+1} = 1 - a_{k+1} \leq 1 - M}$$

$$R_2 = \sum_{i=k+1}^{n} b_i$$

Voglio dimostrare che $\boxed{R_2 \leq \frac{n+1}{4}}$

Ma io so che $R_2 \leq (n-k)\, b_{k+1}$ perché

b_{k+1} è il termine più grande nella somma R_2

$\Rightarrow \quad R_2 \leq (n-k)(1-M)$ (per le condizioni su b_{k+1})

Spero che valga

$$(n-k)(1-M) \overset{?}{\leq} \frac{n+1}{4}$$

$$\bigstar \qquad M \overset{?}{\geq} 1 - \frac{n+1}{4(n-k)} \qquad n \neq k$$

Se $a_k \geq 1 - \frac{n+1}{4(n-k)} \Rightarrow M \geq 1 - \frac{n+1}{4(n-k)}$

$\Downarrow$

HO LA TESI IN QUESTO CASO :)

Se $a_k < 1 - \frac{n+1}{4(n-k)}$

$$R_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per sopra}}}{\leq} k \cdot a_k \leq k - \frac{k(n+1)}{4(n-k)} \qquad (1)$$

A questo punto

$$\frac{n+1}{4} - R_1 > \frac{n+1}{4} - k + \frac{k(n+1)}{4(n-k)}$$

$$M \geq \frac{n+1}{4} - R_1 > \frac{n(n+1)}{4(n-k)} - k \underset{\substack{\uparrow \\ \bigstar}}{\overset{?}{\geq}} 1 - \frac{n+1}{4(n-k)}$$

$$(n+1)^2 \overset{?}{\geq} 4(n-k)(k+1)$$

AM-GM

$$\Rightarrow \sqrt{(n-k)(k+1)} \leq \frac{n-\cancel{k}+\cancel{k}+1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

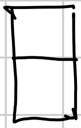
$\Rightarrow$ Allora $\bigstar$ é vera e da questo ho la tesi

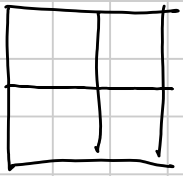
$n = k$ Ho preso $R_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i \le \frac{n+1}{4}$

$\Rightarrow R_2 = 0 \le \frac{n+1}{4}$

- $\frac{n+1}{4} \geq 1 > a_1$ se $n \geq 3$

Se $n \geq 3$ sicuramente $k \geq 1$

Se $n = 1$  uno dei due é $\le \frac{1}{2}$

se $n = 2$  se $a_1 > \frac{3}{4}$ $k = 0$

$a_2 \geq a_1 > \frac{3}{4}$

$\Rightarrow b_2 \le b_1 < \frac{1}{4}$

$b_1 + b_2 \le \frac{1}{2}$

QED