EGMO Camp - TdN

Note Title 1/22/2018

N2. $(x,y,z) \in \mathbb{N}^3$ $\quad x^4+x^2=7^z y^2$

Oss 1. $7 \mid RHS \Rightarrow 7 \mid LHS$

$$x^2(x^2+1)=7^z y^2$$

$$7 \mid x^2 \quad \vee \quad 7 \mid x^2+1$$

Oss 2. $7 \nmid x^2+1$

$$x^2 \equiv 0,1,2,4 \pmod 7 \Rightarrow$$

$$x^2+1 \equiv 1,2,3,5 \pmod 7$$

$$7 \mid x^2 \Rightarrow 7 \mid x$$

$$x=7^c \cdot k \quad ; \quad 7^{2c}k^2(x^2+1)=7^z y^2$$

$$z=2c' \quad ; \quad x^2(x^2+1)=\square \Rightarrow x^2+1=\square$$

$$x^2+1=a^2 \quad a^2-x^2=1 \iff x=0$$

$$7^z y^2=0 \Rightarrow y=0 \quad z \text{ generico}$$

Dunque le soluzioni sono $(0,0,z)$ con $z \in \mathbb{N}$

N3. $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tali che $2017^a=b^6-32b+1$

Soluzione 1 (mod 2)

$$1 \equiv b+1 \pmod 2 \qquad b \equiv 0 \pmod 2$$

$b = 2\beta \quad ; \quad 2017^a = 64\beta^6 - 64\beta + 1$

$64\beta(\beta^5 - 1) = 2017^a - 1 = (2017-1)(1 + \cdots + 2017^{a-1})$

$\overset{2}{\cancel{64}}\, \beta(\beta^5 - 1) = \overset{63}{\cancel{2016}}(1 + \cdots + 2017^{a-1})$

$2 \mid LHS \Rightarrow 2 \mid RHS \qquad 2 \mid 1 + \cdots + 2017^{a-1} \iff$

$a \equiv 0 \pmod 2 \qquad a = 2\alpha$

$2017^{2\alpha} = b^6 - 32b + 1 = \square$

$(b^3-1)^2 < b^6 - 32b + 1 < b^6$

$b > \frac{1}{32} > 0$

$b^6 - 2b^3 + 1 < b^6 - 32b + 1$

$-b^3 < -16b \qquad b^2 > 16 \qquad b > 4$

$b = 0, 1, 2, 3, 4 \qquad b \equiv 0 \pmod 2$

$b = 0, 2, 4$

$b=0)$ $\quad 2017^a = 1 \qquad a = 0 \qquad (0,0)$

$b=2)$ $\quad 2017^a = 64 - 64 + 1 \qquad 2017^a = 1 \qquad a = 0 \qquad (0,2)$

$b=4)$ $\quad (b^3-1)^2 = 2017^{2\alpha} \qquad b^3 - 1 = 2017^\alpha$

$b = 4 \qquad 63 = 2017^\alpha$ impossibile

Soluzione 2 $\pmod 5$

$RHS = b^5 \cdot b - 30 \cdot b - 2 \cdot b + 1 \xrightarrow{\pmod 5} b^2 - 2b + 1 = \square \Rightarrow$

$\Rightarrow$ LHS deve essere un quadrato

N1

$$f(n) = \sum_{i=0}^{2016} n^i = \frac{n^{2017}-1}{n-1}$$

se $\exists$ $m \mid f(n)$ $\qquad p \mid m \mid f(n)$

$$p \mid n^{2017}-1 \Rightarrow \mathrm{ord}_p\, n \mid 2017$$

2017 primo $\Rightarrow \mathrm{ord}_p\, n = \begin{cases} 1 \\ 2017 \end{cases}$

$\mathrm{ord}_p\, n = 2017)$

$$\underset{\overset{\parallel}{2017}}{\mathrm{ord}_p\, n} \mid p-1 \Rightarrow 2017 \leq p-1$$

$$p \geq 2018$$

$\mathrm{ord}_p\, n = 1)$ $\qquad p \mid n-1$

$$f(n) = \sum_{i=0}^{2016} n^i$$

$$0 \equiv \sum 1^i \equiv 2017 \ (p)$$

$$\Downarrow$$

$$p = 2017$$

N4

$$x^2 - xy + 2y^2 = K(x+y) \quad *$$

fissiamo y, ho un'eq. di 2° grado in x

$$x^2 - x(y+K) + 2y^2 - Ky = 0$$

ha $0, 1, 2$ soluzioni

$\Updownarrow$

$\Delta = 0$

$$\Delta = (y+K)^2 - 4(2y^2 - Ky)$$
$$= K^2 + 6Ky - 7y^2$$
$$= (K-y)(K+7y)$$

se $y = K, -\frac{K}{7}$, allora ne ho 1 sola

se $7 | K$, $-\frac{K}{7} \in \mathbb{Z}$

y
$-K/7 \to 1$
$-2 \to 0, 2$
$-1 \to 0, 2$
0
1
2
$\vdots$
$K \to 1$

che risolvono $*$

le coppie (x, y) sono pari

OCCHIO: $(0, 0)$ NON È SOLUZIONE DELL'EQ. DI PARTENZA

se $7 \nmid K$

$\to 0, 2$

$\to 0, 2$

$K \to 1$

ci sono $2h+1$ soluzioni di $*$

a cui togliamo la $(0,0)$

PERCHÉ c'è un $*$ finito di soluzioni?

$\Delta = K^2 + 6Ky - 7y^2$

K fissato dal problema

se $\Delta < 0$, non ho soluzioni

che vale per $|y|$ abbastanza GRANDE