EGMO Camp 2019

Stampato integrale delle sessioni

Autori vari

Indice

ALGEBRA BASIC

$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + \dots + 1)$

Note Title 02/11/2019

Complessi

$x + 3 = 0$ ⇝ negativi -3

$2x = 3$ ⇝ razionali $3/2$

$x^2 = 2$ ⇝ reali $\sqrt{2}$

$x^2 = -1$ ⇝ complessi $i^2 = -1$

$i + 1$, $2i$, $\pi i - \sqrt{3}$, ...

Def. L'insieme dei numeri complessi è

parte immaginaria

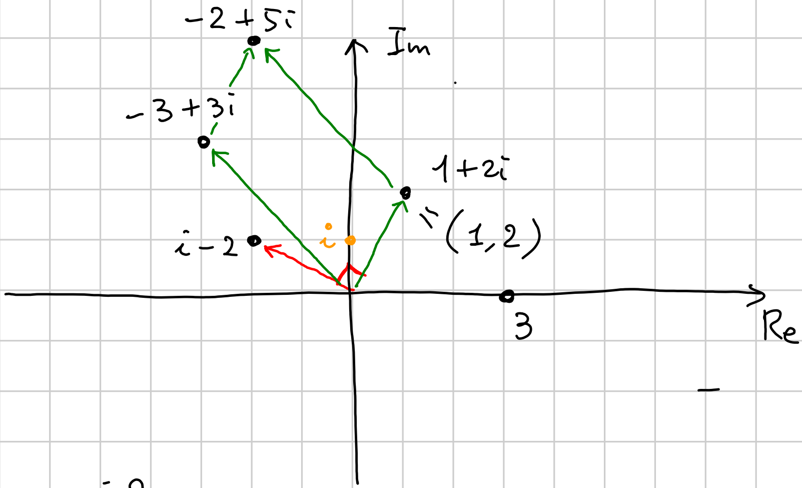
$$\mathbb{C} = \{ a + b i \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

parte reale

Oss
- $(2+3i) + (4-i) = (2+4) + i(3-1) = 6+2i$
- $(2+3i)(4-i) = 2 \cdot 4 + 2(-i) + 3i \cdot 4 + 3i \cdot (-i)$
$$= 8 + 10i + \underbrace{(-3)\, i^2}_{3}$$
$$= 11 + 10i$$
- $$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+d\sqrt{-1}} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} =$$
$$= \frac{(ac+bd) + i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$
$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\, i$$

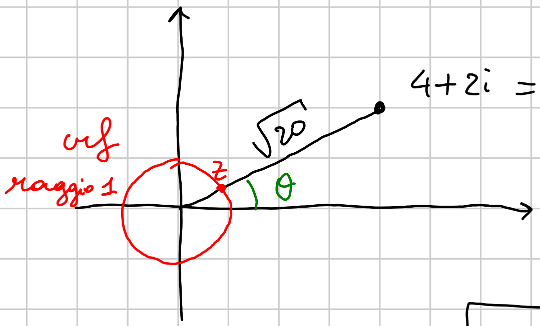
Piano complesso

$(1+2i)\cdot i = i - 2$



Formula magica (forma polare) $\quad e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$

$$e^a e^b = e^{a+b}$$ anche se a, b sono numeri $\in \mathbb{C}$



$$4+2i = \sqrt{20}\cdot\underbrace{\left(\frac{4}{\sqrt{20}} + \frac{2}{\sqrt{20}}i\right)}_{z} = \sqrt{20}\cdot e^{i\vartheta}$$

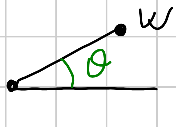
$$\operatorname{dist}(z,0) = \sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{20}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{20}}\right)^2} = \sqrt{\frac{16+4}{20}} = 1$$

$$z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\vartheta}$$

In generale: riesco a scrivere ogni $w \in \mathbb{C}$ come

$$w = |w|\cdot e^{i\vartheta}$$

dove, se $w = a+ib$, $\quad |w| = \sqrt{a^2+b^2}$ e ϑ e' l'angolo fra la congiungente



e l'asse x

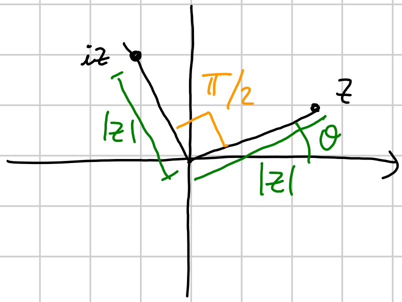
Esempio $\quad i = |i|\cdot e^{i\vartheta} = 1\cdot e^{i\pi/2}$

$$z = |z| \cdot e^{i\vartheta}$$

$$i \cdot z = |z| \cdot e^{i\vartheta} e^{i\pi/2} = |z|\, e^{i(\vartheta + \pi/2)}$$

= n° complesso con lo stesso modulo di z

e angolo $\vartheta + \pi/2$



Formule di addizione di seno/coseno

$$\cos(\alpha + \beta) = \,?$$

Oss Sui complessi c'è il CONIUGIO: se $z = a + bi$,

scrivo $\bar{z} = a - bi$. Buone proprietà:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \qquad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$a + bi = w$$
$$a - bi = \bar{w}$$
$$a = \frac{w + \bar{w}}{2}$$

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i \sin\vartheta$$

$$e^{i(2\pi - \vartheta)} = \cos\vartheta - i \sin\vartheta$$
$$\parallel$$
$$e^{-i\vartheta}$$

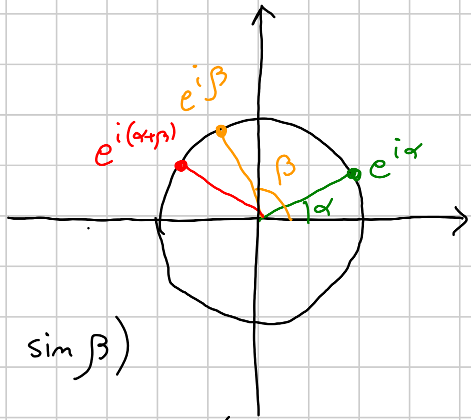
$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\vartheta &= \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} \\ \sin\vartheta &= \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i} \end{aligned}}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{e^{i(\alpha+\beta)} + e^{-i(\alpha+\beta)}}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} \qquad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$$

$$\cos\beta = \frac{e^{i\beta}+e^{-i\beta}}{2}$$



$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

$$\parallel$$

$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$$

$$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

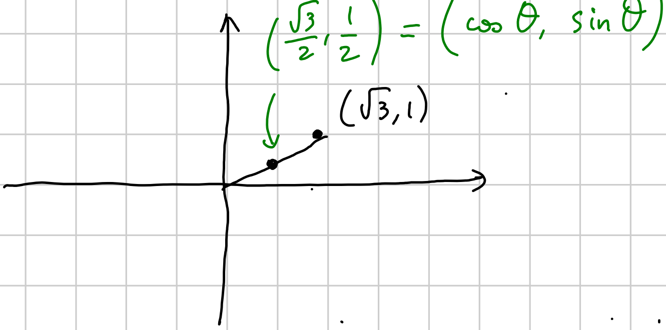
$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$

Esercizio Calcolare $(i+\sqrt{3})^{2020}$

$z = i+\sqrt{3}$ $\qquad$ $z = |z|\cdot e^{i\vartheta}$

$$|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2+1^2} = 2$$

$$z = 2\cdot\left(\frac{i+\sqrt{3}}{2}\right) = 2\cdot e^{i\vartheta} \qquad \vartheta = \frac{\pi}{6}$$



$$z = 2 \cdot e^{i\pi/6} \Rightarrow z^{2020} = 2^{2020} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{2020\pi}{6}\right)} = 2^{2020} e^{i \cdot \frac{2}{3}\pi}.$$

$$\frac{2020\pi}{6} = 2k\pi + r$$

$$\frac{2016\pi + 4\pi}{6} = 168 \cdot 2\pi + 2/3\,\pi$$

$$z = 2^{2020}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Oss $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

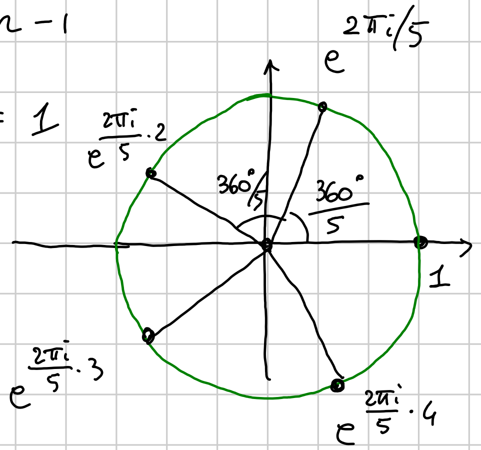
$z_1 = |z_1| \cdot e^{i\theta_1}$ $\quad z_2 = |z_2| \cdot e^{i\theta_2}$ $\quad z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

Radici dell'unità

Radice n-esima dell'unità: numero z t.c. $z^n = 1$

$$z = e^{i \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot k} \qquad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$z^n = \left(e^{\frac{2\pi i k}{n}}\right)^n = \left(e^{2\pi i}\right)^k = 1$$



POLINOMI

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

con $a_i \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \qquad [\text{RADICI } 1, 2]$$

Def Le RADICI di un polinomio $p(x)$ sono quei numeri α t.c. $p(\alpha) = 0$

Ruffini (regola) $x^3 + 3x + 4 = p(x)$, $p(-1) = 0$

$$x^3 + 3x + 4 = (x+1) \cdot (x^2 - x + 4)$$

coeff. x^2

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 0 & 3 & 4 \\
-1 & \downarrow & -1 & 1 & -4 \\
\hline
 & 1 & -1 & 4 & \cancel{\ }
\end{array}$$

Divisione con resto: $p(x) = q(x)\, s(x) + r(x)$

Dati $p(x)$ e $q(x)$ esistono $s(x)$ e $r(x)$ come sopra con $\text{grado}(r(x)) < \text{grado}(q(x))$

(Esiste se i coeff. sono $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, ma in generale non $\mathbb{Z}$)

$x^2 + 1$ diviso $2x$

$$x^2 + 1 = 2x\left(\tfrac{1}{2}x\right) + 1$$

non e' in generale a coeff. interi

Teo (Ruffini) $p(x)$ diviso $x - a$

$$p(x) = q(x)\cdot(x-a) + r$$ numero

$$\Downarrow$$

$$p(a) = \cancel{q(a)\cdot(a-a)} + r$$

$\Rightarrow$ resto della divisione è $p(a)$

Teo (fondam. dell'algebra)

Sia $p(x)$ un polinomio a coeff in $\mathbb{C}$.

Allora esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ e $c \in \mathbb{C}$ t.c.

$$p(x) = c\,(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$$

Es. $x^n - 1$ in $\mathbb{R}$ ha ≤ 2 radici

$$x^n - 1 = (x-1)\left(x - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)\left(x - e^{4\pi i/n}\right)\dots\left(x - e^{\frac{2\pi i}{n}(n-1)}\right)$$

Es $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

$$2x^2 - 2 = 2(x+1)(x-1)$$

Oss ① Se $p(x)$ ha coeff reali e $z \in \mathbb{C}$ è radice, allora $\bar{z}$ è ancora radice

$$p(\bar{z}) = a_n \bar{z}^n + a_{n-1}\bar{z}^{n-1} + \dots + a_0$$

$$= \overline{a_n}\,\bar{z}^n + \dots + \overline{a_0}$$

$$= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}$$

$$= \overline{p(z)} = 0$$

② Se $p(x) = q(x)$ per infiniti valori di x

$\iff$ sono uguali coefficiente per coefficiente

In effetti: se $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono tali che

$p(x_1) = q(x_1), \dots, p(x_n) = q(x_n)$,

allora $p(x) - q(x)$ ha $x_1, x_2, \dots, x_n$ come radici

$$p(x)-q(x) = \underbrace{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\,r(x)}_{\text{grado} \geq n \quad (\text{oppure } r(x)=0)}$$

Scegliendo $n >$ grado $p(x)$, grado $q(x)$ trovo

che $r(x) = 0$. $\Rightarrow p(x) - q(x) = 0 \Rightarrow p(x) = q(x)$

Esercizio $x^{20200} - x^{2019}$ diviso x^2+x+1: che resto dà?

$$x^{20200} - x^{2019} = (x^2+x+1)\,q(x) + r(x)$$

con $r(x)$ di grado ≤ 1 $\qquad r(x) = ax + b$

Cerco $x^2+x+1 = 0$. $\iff x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$$= \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \qquad (x^3 = 1)$$

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

$$x^{20200} - x^{2019} = (x^2+x+1)\,q(x) + r(x) \qquad r(x)=ax+b$$

Sostituisco $x = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

$$x^{3k}\cdot x - 1 = x - 1 = \frac{-3+\sqrt{-3}}{2} \qquad (\text{lato sx})$$

$20200 = 3k+1$

$$a\cdot x + b = a\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) + b \qquad (\text{lato dx})$$

Quindi voglio $\boxed{-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i = \left(-\frac{a}{2}+b\right) + \frac{a}{2}\sqrt{3}\cdot i}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3/2 = -a/2 + b \implies b = -1 \\ a/2\,\sqrt{3} = 1/2\,\sqrt{3} \implies a = 1 \end{cases}$$

FORMULE DI VIÈTE / ESPRESSIONI SIMMETRICHE

$$(x-x_1)(x-x_2) = x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2$$

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = x^3 - (x_1+x_2+x_3)x^2 + (x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2)x - x_1x_2x_3$$

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) = x^4 + (x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)x^2$$
$$-(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_2x_3x_4+x_1x_3x_4)x + x_1x_2x_3x_4$$
$$-x^3(x_1+x_2+x_3+x_4)$$

In generale:

$(x-x_1)\cdots(x-x_n) = x^n - (\text{somma } x_i)\, x^{n-1} +$

$+ (\text{somma prodotti a 2 a 2})\, x^{n-2} - (\text{somma prodotti a 3 a 3})\, x^{n-3}$

$+ \dots + (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n$

Esempio $p(x) = x^3 + 3x + 5$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ radici

Quanto vale $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$

$\alpha_3^2 + \alpha_2^2 + \alpha_1^2$

$a^2b + b^2c + c^2a$ non e' simmetrica : $a \leftrightarrow b$

$b^2a + a^2c + c^2b$

ma e' "ciclica" : $a \to b \to c \to a$

$b^2c + c^2a + a^2b$

$a^2b + b^2c + c^2a + b^2a + c^2b + a^2c$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = (\underbrace{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}_{-\text{coeff } x^2})^2 - 2(\underbrace{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1}_{\text{coeff. di } x})$$

$$= 0^2 - 2\cdot 3 = -6$$

$$\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^3 - 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - 3(\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_2^2\alpha_1 + \alpha_2^2\alpha_3 + \alpha_3^2\alpha_1 + \alpha_3^2\alpha_2)$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

$\sum_{sym} \alpha_1^2\alpha_2$ = somma di $\alpha_1^2\alpha_2$ e tutte le espr. che ottengo rinominando gli indici

$$\sum_{sym} a^3 b = a^3b + a^3c + b^3a + c^3b + b^3c + c^3a$$

$$\sum_{sym} a^3 = 2(a^3 + b^3 + c^3)$$

$$\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^3 - 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - 3\sum_{sym}\alpha_1^2\alpha_2$$

$$\sum_{sym}\alpha_1^2\alpha_2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1) - 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \qquad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 \qquad \alpha_1\alpha_2\alpha_3$

(Una) disuguaglianza

$a_1, a_2, \dots, a_n$ reali ≥ 0

Media (aritmetica): $AM = \dfrac{a_1 + \dots + a_n}{n}$

Media (geometrica): $GM = \sqrt[n]{a_1\, a_2 \dots a_n}$

Teo $AM \geq GM$ (sempre)

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} \iff \frac{a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2}{4} \geq a_1 a_2$$

$$\iff a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2 \geq 4 a_1 a_2$$

$$\iff a_1^2 - 2a_1 a_2 + a_2^2 \geq 0 \iff (a_1 - a_2)^2 \geq 0$$

PROBLEMI CONSIGLIATI

- A2, A3, A4, A6
- Sia $p(x)$ un polinomio di grado 99 t.c.

  $p(k) = \frac{1}{k}$ per $k = 1, \ldots, 100$. Calcolare $p(101)$

$\boxed{A2}$ a, b, c, d interi $\Rightarrow$ esistono x, y interi t.c.

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = x^2+y^2$$

$z = a+bi$ $\qquad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ $\qquad u = x+iy$

$w = c+di$ $\qquad |w| = \sqrt{c^2+d^2}$

$$|z|^2 \cdot |w|^2 = |u|^2 \iff \underbrace{|z| \cdot |w|}_{= |z \cdot w|} = |u|$$

Scelgo

$$u = z \cdot w = (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Mi viene in mente che $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2+(ad+bc)^2$

$\boxed{A3}$ x_1, x_2, x_3, x_4 radici di $x^4+ax+b=0$. Calcolare

$x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4$

$$x_1^4 + ax_1 + b = 0 \Rightarrow x_1^4 = -ax_1-b$$

$$x_2^4 = -ax_2-b$$

$$\vdots$$

$$x_1^4+\ldots+x_4^4 = -a\underbrace{(x_1+x_2+x_3+x_4)}_{0} - 4b$$

$$= -4b$$

$\boxed{A4}$ $P(p) = P(1/p) = 0$ per i primi 21 n^i primi dispari

$\deg P = 42$

$$P(x) = c \cdot \underbrace{(x-3)\left(x-\tfrac{1}{3}\right)}\ \underbrace{(x-5)\left(x-\tfrac{1}{5}\right)} \cdots (x-p_{21})\left(x-\tfrac{1}{p_{21}}\right)$$

$$\frac{(x-q)(x-1/q)}{(x-q)(x-1/q)} \quad \begin{matrix} \text{per } x=2 \\ \text{per } x=1/2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} (2-q)\left(\frac{2q-1}{q}\right) \\ \left(\frac{1-2q}{2}\right)\left(\frac{q-2}{2q}\right) \end{matrix}$$

$$\frac{\cancel{(2-q)}\,\cancel{(2q-1)}/\cancel{q}}{\cancel{(1-2q)}\,\cancel{(q-2)}/4\cancel{q}} = 4$$

$$\Rightarrow \quad P(2)/P(1/2) = 4^{21}$$

$\boxed{A6}$ $a,b,c \in \mathbb{R} \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

$$\underbrace{a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)} \geq 0$$

Candidati quadrati:

- $a+b-2c$
- $a-b \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 \geq 0 \\ (b-c)^2 &= b^2-2bc+c^2 \geq 0 \\ (c-a)^2 &= c^2-2ca+a^2 \geq 0 \\ \hline 2a^2+2b^2+2c^2 &- 2(ab+bc+ca) \geq 0 \end{aligned}$$

Sia $P(x)$ di grado 99, $P(1)=1/1$, $P(2)=1/2$, ..., $P(100)=1/100$

Calcolare $P(101)$

Se $P_1(x)$ e $P_2(x)$ hanno questa proprietà,

$Q(x) = P_1(x) - P_2(x)$ e' di grado ≤ 99 e ha

≥ 100 radici $\Rightarrow Q(x)$ è $0 \Rightarrow P_1 = P_2$

$P(x) = 1/x \iff x P(x) = 1$ per $x = 1, \dots, 100$

$R(x) = x P(x) - 1$ è polinomio di grado 100 con radici $1, 2, \dots, 100$

$$x P(x) - 1 = R(x) = c \cdot (x-1)(x-2) \dots (x-100)$$

Metto $x=0 \Rightarrow -1 = c \cdot (-1)(-2) \dots (-100)$

$$\Rightarrow c = \frac{-1}{100!}$$

$$P(x) = \frac{-\frac{1}{100!}(x-1)\dots(x-100)+1}{x}$$

$$P(101) = \frac{-\frac{1}{100!}100!+1}{101} = 0$$

$\boxed{\text{A3, reprise}}$

$e_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ $\qquad x^4 + ax + b = 0$

$e_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_3x_4 = 0$

$e_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$

$e_4 = x_1x_2x_3x_4$

$\cancel{e_1^4}$, $\cancel{e_1^2 \cdot e_2}$, $\cancel{e_1 \cdot e_3}$, $\cancel{e_2^2}$, e_4

Risposta: $\underset{-4}{k} \cdot b$ $\qquad x^4 + 1 = 0 \qquad x^4 = -1$

COMBINATORIA BASIC

Note Title 31/10/2019

PIGEONHOLE

Enunciati

- "$k+1$ piccioni, k buchi" $\Rightarrow$ $\exists$ buco con almeno 2 piccioni.
- "$mk+1$ piccioni, k buchi" $\Rightarrow$ $\exists$ buco con almeno $m+1$ piccioni

IMPLICAZIONI ABUSIVE

"$k+2$ piccioni, k buchi" $\cancel{\Rightarrow}$ • c'è almeno un piccione in ogni buco

• ci sono almeno 3 piccioni in una buca.

Esempio

55 numeri $\in \{1, \dots, 100\} \overset{?}{\Rightarrow} \exists$ almeno 2 numeri a distanza 9

OSS: 18 interi consecutivi, quanti ne posso scegliere in modo che possano non essercene 2 a distanza 9?

Possibili resti della div per 9: $\underbrace{0, \dots, 8}_{9 \text{ numeri}}$

Per PG se ne scelgo 10 allora almeno 2 danno lo stesso resto div. per 9.

$$\underbrace{1,\dots,18}_{\text{al più } 9}\,|\,\underbrace{19,\dots,36}_{\text{al più } 9}\,|\,\dots\,\overset{\overset{18\cdot 5}{\downarrow}}{90}\,|\,91, 92, \dots, 100$$

blocchi

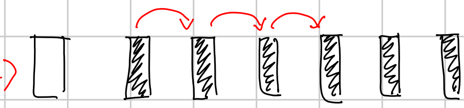
$\Rightarrow$ POSSO SCEGLIERE $9\cdot 6 = 54$

Per PG ci sarà almeno un blocco con 10 numeri

INDUZIONE

Una proprietà $\forall n \in \mathbb{N}$ da dimostrare $\longrightarrow P(n)$

IDEA: "Se dimostro "$P(n) \Rightarrow P(n+1)$" ho quasi finito"

$\Rightarrow$ 

n_0

PASSO BASE: lo dimostro per n_0 $P(n_0)$

PASSO INDUTTIVO: DIMOSTRO "$P(n) \Rightarrow P(n+1)$"

Esempio

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad 1+2+3+\dots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Esercizio: $\dfrac{n(n+1)}{2}$ è intero.

DIM

- DICHIARARE L'INDICE SU CUI SI FA INDUZIONE
- PASSO BASE: $n_0 = 1$

$$1 \overset{?}{=} \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

- PASSO INDUTTIVO: ASSUMIAMO

"$P(n)$: $1+2+\dots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$"

IPOTESI INDUTTIVA

VOGLIO DIMOSTRARE

$$\text{“}P(n+1):\quad 1+2+\ldots+n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\text{”}$$

$$\underbrace{1+2+3+\ldots+n}_{\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$(n+1) \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)}{\cancel{2}}\left[\cancel{n}+\cancel{2}-\cancel{n}\right] = n+1 \quad \boxed{\checkmark}$$

Esempio (del passo base)

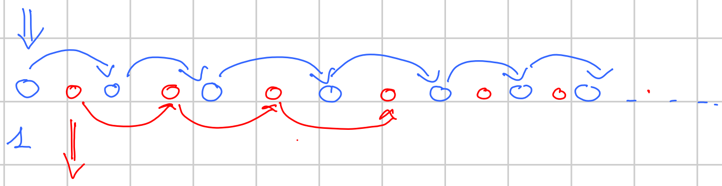
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 3 \nmid 5^n - 1$$

DIM

PASSO INDUTTIVO: Assumo che $3 \nmid 5^n - 1$
e mi chiedo $3 \nmid 5^{(n+2)} - 1$? $\Big\}\ P(n) \Rightarrow P(n+2)$

$$5^{n+2} - 1 = 25\underbrace{(5^n - 1)}_{\text{non è multiplo di 3}} + \underbrace{24}_{\text{è multiplo di 3}} \Rightarrow 3 \nmid 5^{n+2} - 1$$

PASSO BASE: $n = 1$: $\underset{n=1}{5^n - 1} = 5 - 1 = 4$

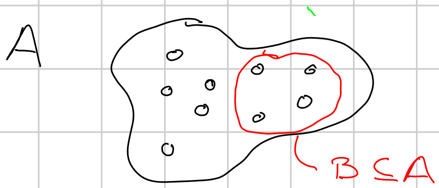


MI MANCA UN PASSO BASE

P.B.: $n = 2$ $\qquad \underset{n=2}{5^n - 1} = 25 - 1 = 24$

CONTEGGI

* NUMERO DI SOTTOINSIEMI



$|A| = n$

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & & 0 \\ 1 & 1 & & 1 \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 2 & 2 \text{ poss} & \dots & 2 \text{ poss} \end{array}$$

$\Rightarrow \# \{\text{sottoinsiemi di } A\} = 2^n$

* ANAGRAMMI

AIUOLE : $\underset{6}{\_}\ \underset{5}{\_}\ \underset{4}{\_}\ \dots\ \underset{1}{\_}$

$\# \{\text{anagrammi AIUOLE}\} = 6!$

NOTAZIONE: $k! = k \cdot (k-1) \cdot \_\_ \cdot 1$

ARA $\qquad \dfrac{3!}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

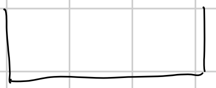
ARA $\longrightarrow$ $A_1 R A_2$ $\qquad A_2 R A$
AAR
RAA

ANAGRAMMI $\qquad \dfrac{9!}{3!\,2!}$

3 "A" $\qquad$ 2 "M"

BINOMIALI

n palline numerate da 1 a n



$$\begin{array}{ccccc} ① & ② & ③ & \dots & ⓝ \\ 0 & 0 & 1 & & 1 \end{array}$$

$$\underbrace{0 \quad 0 \quad 1 \quad \dots \quad 1}_{k \text{ "1"} \Rightarrow n-k \text{ "0"}}$$

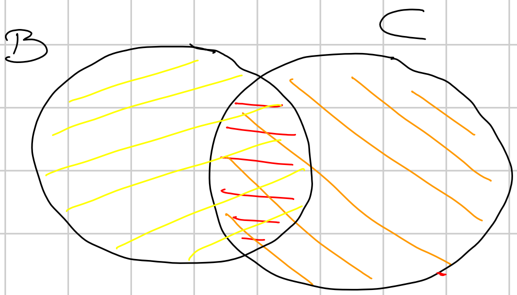
$$\#\{\text{estrazioni di } k \text{ palline}\} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

NOTAZIONE

PRINCIPIO DI INCLUSIONE-ESCLUSIONE (PIE)

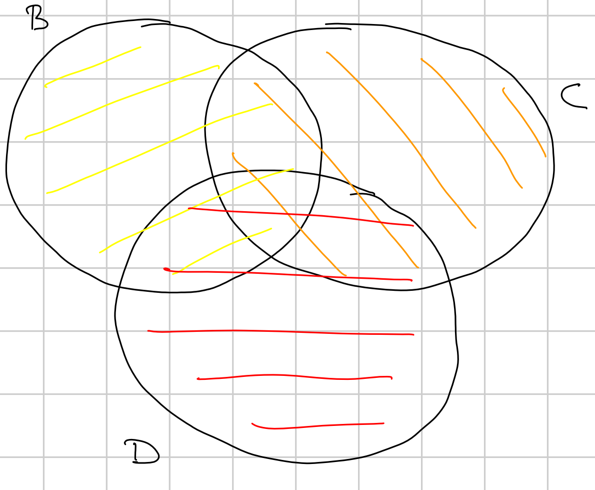
Quanti multipli di 2 o 5 in $\{1, \dots, 100\}$?

$$\underbrace{\#\{\text{mult. di } 2\}}_{\frac{100}{2} = 50} + \underbrace{\#\{\text{multipli di } 5\}}_{\frac{100}{5} = 20} - \underbrace{\#\{\text{multipli di } 10\}}_{\frac{100}{10} = 10} = 60$$



$$A = (B \cup C)$$

$$|A| = |B| + |C| - |B \cap C|$$



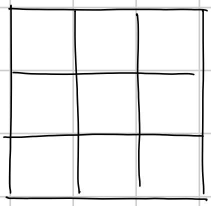
$$A = B \cup C \cup D$$

$$|A| = |B| + |C| + |D| +$$

$$-\left(|B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D|\right) +$$

$$+ |B \cap C \cap D|$$

Esempio



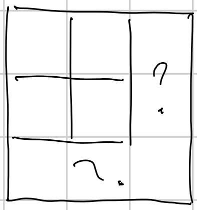
B o N

Quante colorazioni senza sottoquadrati 2×2 bianchi?

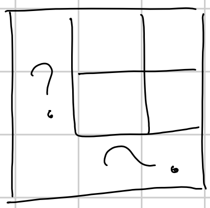
DIM

- oss: $2^9 = \#\{\text{colorazioni totali}\}$

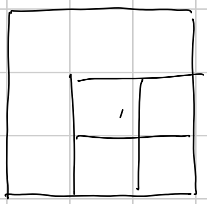
$B_1 =$



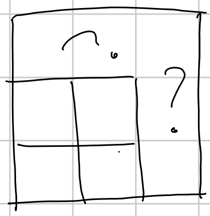
$B_2 =$



$B_3 =$



$B_4 =$



$$A = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$$

$$|A| = |B_1| + |B_2| + |B_3| + |B_4| + \qquad 2^5 \cdot 4$$

$$-\big[|B_1\cap B_2| + |B_1\cap B_3| + |B_1 \cap B_4| + \qquad -(4\cdot 2^3 + 2\cdot 2^2)$$

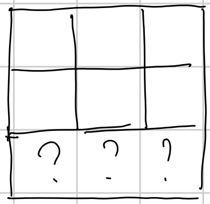
$$+|B_2\cap B_3| + |B_2\cap B_4| + |B_3\cap B_4|\big] +$$

$$+|B_1\cap B_2\cap B_3| + |B_1\cap B_2\cap B_4| + |B_1\cap B_3\cap B_4| + \qquad +(2\cdot 4)$$

$$+|B_2\cap B_3\cap B_4| \quad +$$

$$-|B_1\cap B_2\cap B_3\cap B_4| = 2^5\cdot 4 - (4\cdot 2^3 + 2\cdot 2^2) + 8 - 1 \; - 1$$

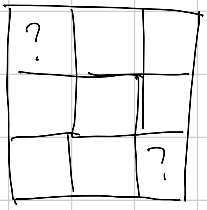
$\{B_1 \cap B_2\}$:



$2^3 \cdot 4$

4 intersezioni a 2 a 2

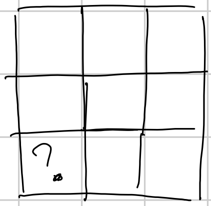
$\{B_2 \cap B_4\}$



2 intersezioni a 2 a 2

$2 \cdot 2$

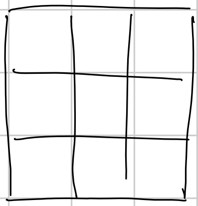
$B_1 \cap B_2 \cap B_3$



$2 \cdot 4$

4 intersezioni a 3 a 3

$B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4$



$1 \cdot 1$

1 sola int a 4 a 4

DOUBLE - COUNTING (D-C)

IDEA: Conto in 2 modi diversi una certa Q

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{I modo}} = Q = \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{II modo}}$$

Esempio

$\forall n \quad 1 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$m+1$ ↑ $m+1$ ↑ ...

1	2	3	4	...	$m-1$	m
m	$m-1$	$m-2$	$m-3$		2	1

m colonne

$Q = \{\text{somma delle entrate}\}$

$$2\cdot(1+2+\ldots+m) \underset{\text{per righe}}{=} Q \underset{\text{per colonne}}{=} (m+1)\,m$$

$\boxed{\checkmark}$

Esempio 2.

n persone

ci sono amicizie (simmetriche)

"A è amico di B" $\Rightarrow$ "B è amico di A"

TESI: $\#\{$persone con un n. dispari di amici$\}$ è pari

DIM

$Q = \#\{\text{coppie } (A,B) \text{ tali che } A \text{ è amico di } B\}$

OSS: (A,B) c'è $\Rightarrow$ (B,A)

$$2\cdot\#\{\text{amicizie}\} = Q = \#\{\text{amici di } A_1\} + \#\{\text{amici di } A_2\} + \ldots + \#\{\text{amici di } A_n\}$$

$$= \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{numeri pari}} + \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{numeri dispari}}$$

$\Downarrow$

Ci sono un numero pari di addendi dispari $\Leftarrow$ DEVE ESSERE PARI (perché Q è pari)

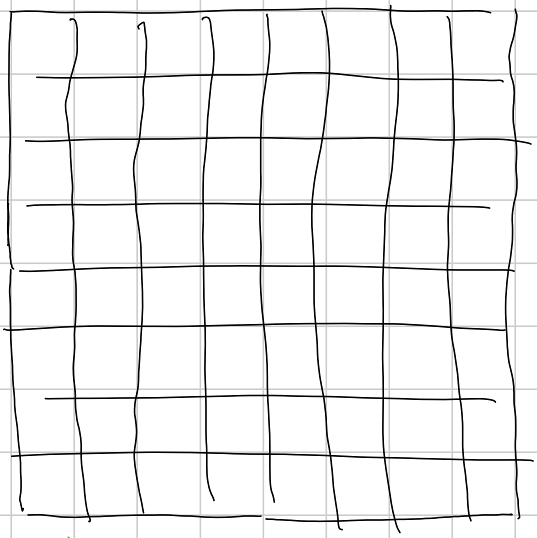
INVARIANTI (STATICHE)

IDEA: situazione dinamica, nuova a causa di mosse

INVARIANTE: una quantità Q che non cambia da mossa a mossa

Posso passare da A a B? Se dimostro $Q(A) \neq Q(B)$ mostro che non posso passare da A a B

Esempio 1

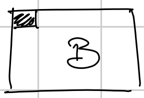


B o N a scacchiera

MOSSE:

- invertire una riga
- invertire una colonna
- invertire un sotto quadrato 2x2

DOMANDA: Posso passare dalla col. a scacchiera



?

No! Q = parità del numero di caselle B

È invariante?

1) b caselle B, $8-b$ N $\xrightarrow{\text{MOSSA 1}}$ $8-b$ B, b N $\boxed{\checkmark}$ $8-b$ e b hanno la stessa parità

2) ANALOGO $\boxed{\checkmark}$

3) $\left.\begin{array}{ll} b \text{ caselle} & B \\ 4-b & N \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\text{MOSSA 3}}$ $\left\{\begin{array}{ll} 4-b & B \\ b & N \end{array}\right.$ $4-b$ e b hanno la stessa parità $\boxed{\checkmark}$

Q (inizio) = pari $\neq$ Q (finale) = dispari

Esempio 2

2019	2019	2019
R	B	V

MOSSA: tolgo 2 dello stesso colore e ne riaggiungo 1 per ciascuno degli altri 2 colori

DOMANDA: Posso arrivare a

2018	2019	2020
R	B	V

No!

Q = "la differenza #R − #B è multiplo di 3"

- $(\#R - \#B)_{\text{inizio}} \xRightarrow{\text{MOSSA } R} (\#R' - \#B')_{\text{fine}} = \#R - 2 - (\#B + 1) = = (\#R - \#B)_{\text{inizio}} - 3$ ✓
- $(\#R - \#B)_{\text{inizio}} \xRightarrow{\text{MOSSA } B} (\#R' - \#B') = \#R + 1 - (\#B + 2) = = \#R - \#B + 3$ ✓
- $(\#R - \#B)_{\text{inizio}} \xRightarrow{\text{MOSSA } V} (\#R' - \#B') = \#R + 1 - (\#B + 1) = = \#R - \#B$ ✓

Q (inizio) = V $\neq$ Q (fine) = F

- INVARIANTI MONOTONE: qt. che aumenta o diminuisce sempre

IDEA: Serve a dimostrare che a un certo punto passerò per una certa config.

Esempio

12 gnomi, 1 per mese, ci sono amicizie con case [red] [blue]
ogni mese lo gnomo arrabbiato si adatta alla maggioranza dei suoi amici

TESI: A un certo punto nessuno ridipinge più

DIM

$Q = \#\{\text{coppie di amici con case di colore diverso}\}$

Ad ogni mossa Q diminuisce se ci sono ridipingimenti

Però $Q \geq 0 \implies \#\{\text{ridiping.}\}$ è finito.

INVARIANTI CONTROLLATE: qt. che varia in modo controllato

IDEA: possiamo usarla per stimare il numero di mosse.

Esempio

A e B giocano e n monete in una pila

MOSSA:
- scegliere una pila e toglierla
- dividere una pila in 4, ciascuna con >0 monete

PERDE chi toglie l'ultima moneta; A gioca per primo?

CHI VINCE?

DIM

$Q = \#\text{pile}$

Q cambia parità ad ogni mossa

$Q(\text{inizio}) = 1$ $\quad Q(\text{fine}) = 0$

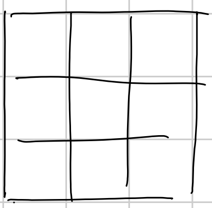
$\#\{\text{mosse}\}$ è dispari $\implies$ A gioca per ultimo e perde.

Esercizio: dimostrare che il gioco finisce.

COLORAZIONI

IDEA: utile per dimostrare che qualcosa NON si può fare

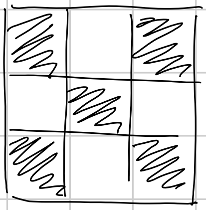
Esempio 1



mettere i $1, \dots, 9$ in modo che n. consecutivi siano in caselle adiacenti.

DOMANDA: che numeri vanno al centro?

DIM



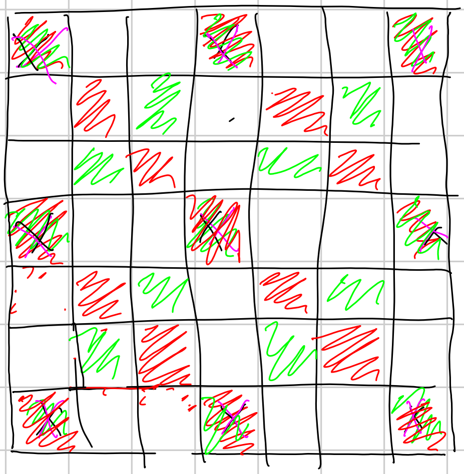
OSS: numeri della stessa parità stanno in caselle dello stesso colore

⇒ sui bianchi vanno i pari } ⇒ nella centrale
sui neri vanno i dispari } non posso mettere i pari

Esercizio: trovare gli esempi.

Esempio 2

16 tessere 3×1



Copro tutto lasciando un buco: dov'è?

OSS: Ogni tessera copre esattamente 1 R
Ma ci sono 17 R ⇒ il buco sta su un ROSSO
OSS 2: Vale anche per le caselle V.
Esercizio: finire (trovando gli esempi)

SCHEMINO TECNICHE COMBINATORICHE

ESITENZA NON ESISTENZA

* ESISTENZA :

1) Esistenza costruttiva

- mostrare l'esempio
- induzione
- algoritmi { uso invarianti (false) / greedy * }

2) Non costruttiva

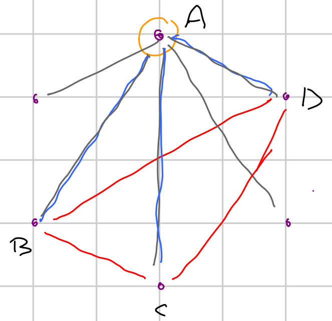
- ragiono per assurdo
- pigeonhole
- estremale *
- DOUBLE – COUNTING

* NON ESISTENZA

- invarianti (vere)
- colorazioni
- DOUBLE – COUNTING

CORREZIONE

C1



Th: ∃ triangolo tutto B o tutto R

per pigeonhole, da A escono almeno 3 segmenti dello stesso colore

1) se uno fra BC, BD, CD è blu :)

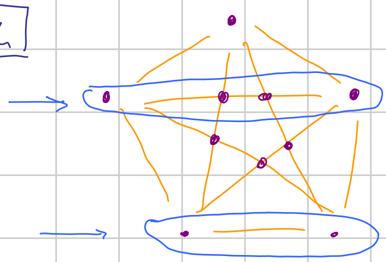
2) se BC, BD, CD sono rossi :)

C3 coloro a scacchiera

oss 32 × ■ 30 × □

oss ogni ▭ copre 1 × ■ e 1 × □ } NO!

C4



(a) $\varphi = \begin{cases} \text{lampadine accese} \\ \text{lampadine interne accese} \end{cases}$

la parità di φ non cambia

(b) $\varphi =$ lampadine interne accese

C5 $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

(a) sommare somma(Y) al variare di $Y \subseteq X$

fisso $k \in X$. a quanti sottoinsiemi appartiene k?

2^{n-1}. la risposta è

$$1 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} + \dots + n \cdot 2^{n-1} =$$

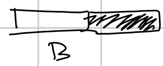
$$2^{n-1}(1+2+3+\dots+n) = 2^{n-1}\frac{n(n+1)}{2} = 2^{n-2} \cdot n \cdot (n+1)$$

(b) sommare min(Y) al variare di $Y \subseteq X$ non vuoto.

fisso $k \in X$. quanti sono gli Y con $\min(Y) = k$

- $k = 1 \rightsquigarrow 2^{n-1}$
- $k = 2 \rightsquigarrow 2^{n-2}$
- in generale $\rightsquigarrow 2^{n-k}$

$$1 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-2} + 3 \cdot 2^{n-3} + \dots + (n-1)2^{1} + n \cdot 2^{0} \overset{?}{=} 2^{n+1} - n - 2$$

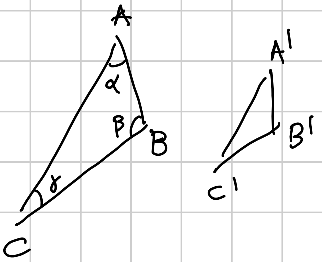
- induzione su n
- DC su $Q =$ # modi di colorare una $1 \times (n+1)$ con B/N tranne 

GEOMETRIA BASIC

Note Title 01/11/2019

Brevissimo recap

Similitudine



$\alpha = \alpha'$ e cyc.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

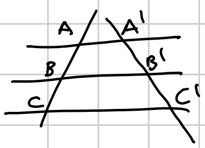
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

(I) $\alpha = \alpha'$ $\beta = \beta'$

(II) $\alpha = \alpha'$ $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$

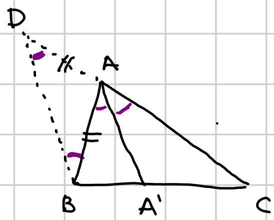
(III) tutti i lati proporzionali

Talete



$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

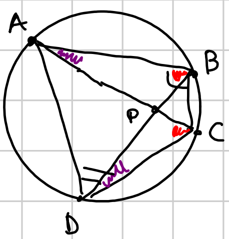
Thm della bisettrice



$\Longrightarrow \dfrac{BA'}{A'C} = \dfrac{AB}{AC}$

$\overset{\triangle}{ABD}$ isoscele $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{A'B}{A'C}$

Ciclicità



$ABCD$ conciclici

$\Longleftrightarrow$ $A\hat{B}C = 180° - A\hat{D}C$

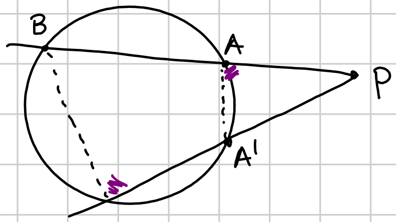
$\Longleftrightarrow$ $B\hat{A}C = B\hat{D}C$

$\Longleftrightarrow$ $\overset{\triangle}{PAB} \sim \overset{\triangle}{PDC}$

↳ simile

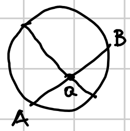
$\Longleftrightarrow$ $PB \cdot PD = PA \cdot PC$

Potenza di P rispetto a Γ

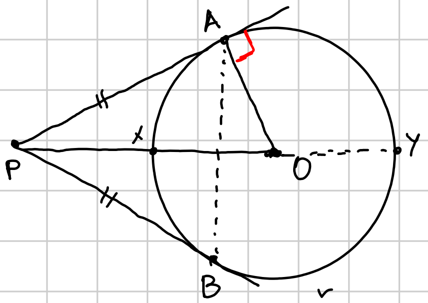


$\mathrm{Pow}_\Gamma(P) := PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$

$[\widehat{PAA'} \sim \widehat{PB'B}]$



$\mathrm{Pow}_\Gamma(Q) = -QA \cdot QB$

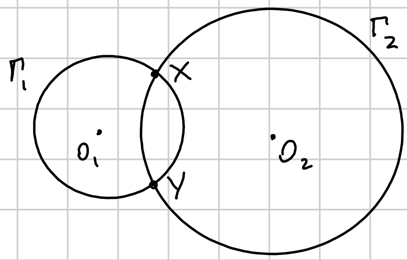


$\mathrm{Pow}_\Gamma(P) = PA^2 = PB^2$

$\mathrm{Pow}_\Gamma(P) = PX \cdot PY = (OP - OA)(OP + OA)$

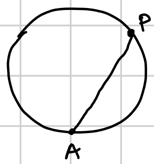
$= OP^2 - \underbrace{OA^2}_{= R_\Gamma}$

Asse radicale



Asse radicale = punti P tali che $\mathrm{Pow}_{\Gamma_1}(P) = \mathrm{Pow}_{\Gamma_2}(P)$

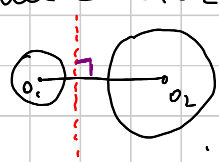
$X, Y \in$ asse radicale



$\mathrm{Pow}_\Gamma P = 0$

Fatto Asse radicale è la retta passante per X, Y [se Γ_1, Γ_2 si intersecano]

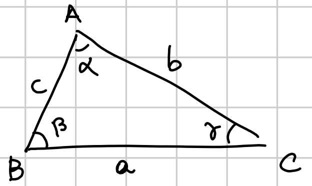
In generale è una retta ortogonale a O_1O_2



EX

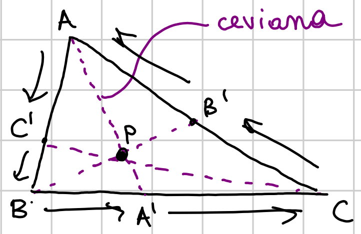
Triangolo

Notazione



$$\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$$

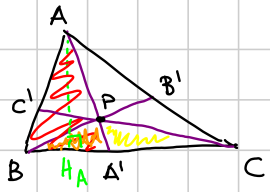
TRm di Ceva



AA', BB', CC' concorrono

$$\iff \frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$$

Dimostrazione $\implies$



$$\frac{BA'}{A'C}=\frac{BA'\cdot AH_A}{A'C\cdot AH_A}=\frac{\cancel{2}\text{Area}(ABA')}{\cancel{2}\text{Area}(A'CA)}=\frac{\text{Area}(BA'P)}{\text{Area}(CA'P)}=\frac{\text{Area}(ABA')-\text{Area}(BA'P)}{\text{Area}(A'CA)-\text{Area}(A'P)}$$

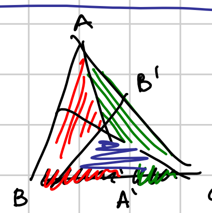
$$\frac{x}{y}=\frac{u}{v}\implies\frac{x}{y}=\frac{u}{v}=\frac{x-u}{y-v}$$

$$\frac{x}{y}=\frac{x-u}{y-v}$$

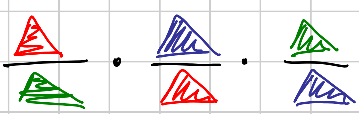
$$\iff \cancel{xy}-xv=\cancel{xy}-yu$$

$$\iff \frac{x}{y}=\frac{u}{v}$$

$$=\frac{\text{Area}(ABP)}{\text{Area}(ACP)}$$

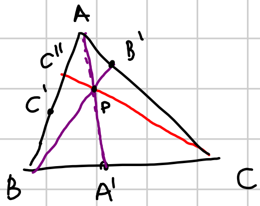


$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=$$



$$=1$$

$\Longleftarrow$

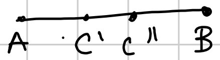


$$\boxed{\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1}$$

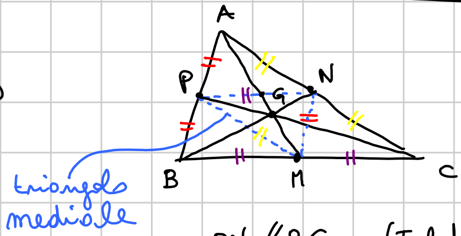
AA', BB', CC'' concorrono

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC''}{C''B}=1}$$

$$\Longrightarrow \frac{AC'}{C'B}=\frac{AC''}{C''B} \Rightarrow C'=C''$$



Baricentro



G baricentro

$\frac{BM}{MC}=1$

(esiste ovviamente per Ceva)

$PN \parallel BC$ (Talete)

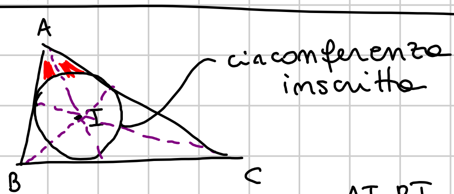
$\overset{\triangle}{MNP} = \overset{\triangle}{APN} \sim \overset{\triangle}{ABC}$ (con rapporto di similitudine 2)

$\Longrightarrow AG = 2GM$

Fatto G è il baricentro anche del triangolo mediale

$\frac{AG}{GM}$ = rapporto di similitudine $=2$

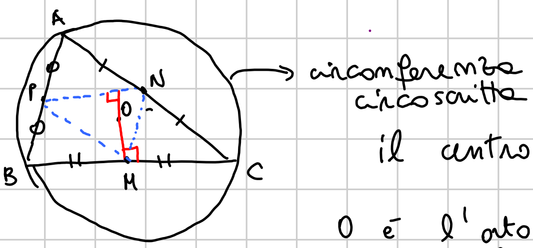
Incentro



Il centro è l'incentro I

AI, BI, CI sono bisettrici.

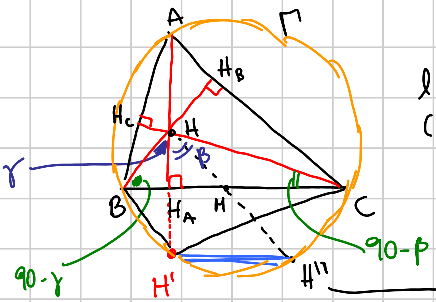
Circocentro



il centro è il circocentro O

O è l'ortocentro del triangolo mediale $\overset{\triangle}{MNP}$

Ortocentro



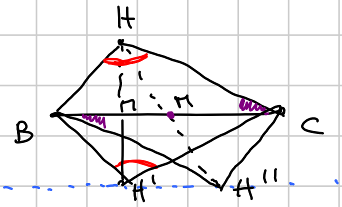
l'incontro delle altezze (dim che esiste) è l'ortocentro H

$H' \in \Gamma$, $H'' \in \Gamma$

↳ simmetrico di H rispetto a BC ($HH_A = H'H_A$)

→ simmetrico di H rispetto a M [$HM = MH''$]

$$B\hat{H'}C = B\hat{H}C = \beta + \gamma = 180° - \alpha$$



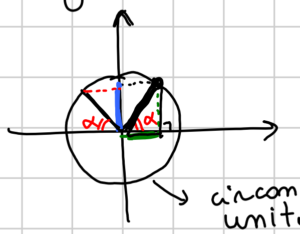
$H'H'' \parallel BC$

$BH''CH$ è un parallelogramma (B e C sono simmetrici rispetto ad M)

HC è parallela a BH''

→ BC e HH'' si incontrano nel pto medio di entrambi

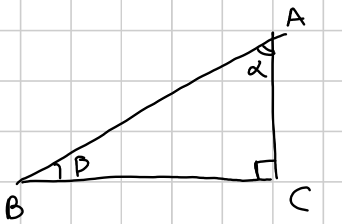
Trigonometria



↳ circonferenza unitaria

$\sin\alpha =$ /

$\cos\alpha =$ /



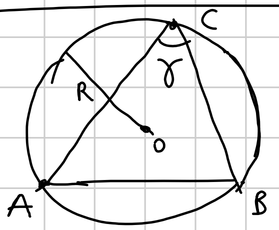
$AC = AB \cdot \cos\alpha = AB \cdot \sin\beta$

$\beta = 90° - \alpha$ ⇝ $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$

$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$

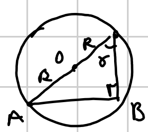
$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$



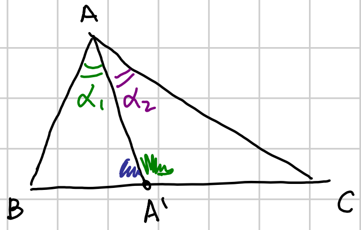
$\boxed{AB = 2R\sin\gamma}$

$\frac{AB}{\sin\gamma} = 2R$

$\frac{BC}{\sin\alpha} = 2R$



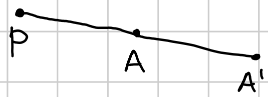
Thm dei seni $\quad \dfrac{AB}{\sin\gamma} = \dfrac{BC}{\sin\alpha} = \dfrac{CA}{\sin\beta}$



$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$$

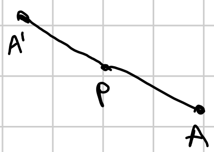
$$\begin{cases} \dfrac{BA'}{\sin\alpha_1} = \dfrac{AB}{\sin A\hat{A'}B} \\[2ex] \dfrac{A'C}{\sin\alpha_2} = \dfrac{AC}{\sin A\hat{A'}C} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{AC}{AB}$$

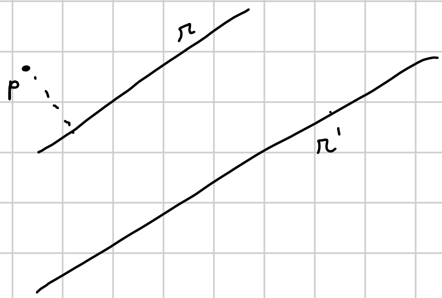
Omotetia (trasformazione del piano) di centro P e fattore λ



$A \longmapsto A'$ t.c. P, A, A' sono allineati
$$\frac{PA'}{PA} = \lambda$$

$\lambda < 0$

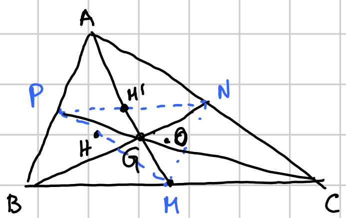




retta $\longmapsto$ retta parallela
gli angoli si conservano

le lunghezze NON si conservano

$\overset{\triangle}{ABC} \longmapsto \overset{\triangle}{A'B'C'} \sim \overset{\triangle}{ABC}$



Facciamo un'omotetia di centro G e fattore -2

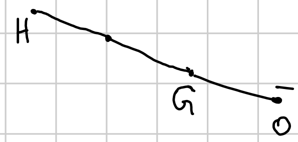
$M \longmapsto A$
$N \longmapsto B$
$P \longmapsto C$
$O \longmapsto H$

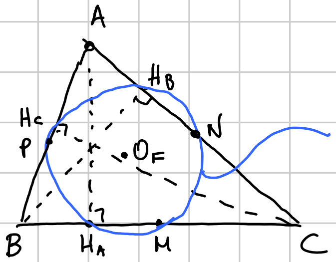
circocentro di $\overset{\triangle}{ABC}$ $\rightarrow$ O

$\hookrightarrow$ ortocentro di $\overset{\triangle}{MNP}$

$\Longrightarrow$ O, H, G allineati $\longrightarrow$ retta di Eulero

$2\,OG = GH$





circonferenza di Feuerbach

$H_A H_B H_C M N P$ sono conciclici

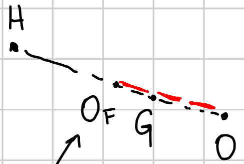
O_F centro di Feuerbach

$O_F \xrightarrow[\text{di prima}]{\text{omotetia}} O$ circocentro di $\hat{ABC}$

$\Longrightarrow$ O, G, O_F sono allineati

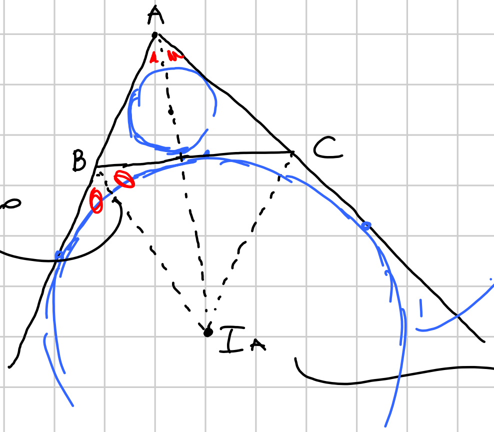
$H, G, O, O_F \in$ retta di Eulero.

ortocentro di $\hat{ABC}$



circocentro di $\hat{MNP}$

circocentro di $\hat{ABC}$
ortocentro di $\hat{MNP}$

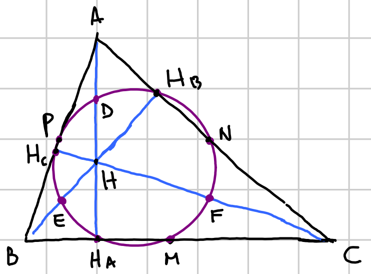


angolo esterno

circonferenza exscritta

excentro relativo ad A.

G15 Bonus

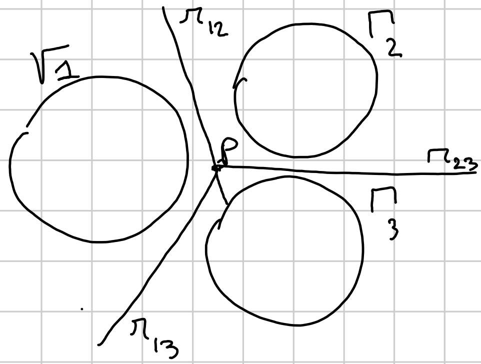


D, E, F punti medi di AH, BH, CH

G14 M è il punto medio BC (non di AB)

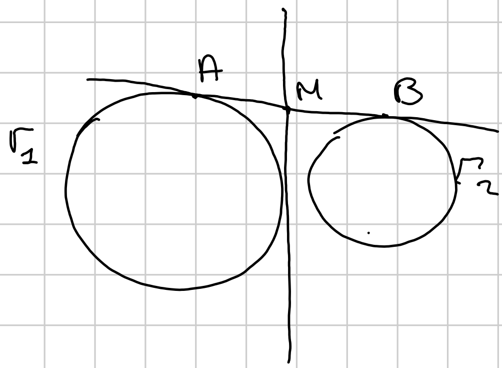
ESERCIZI

G2.



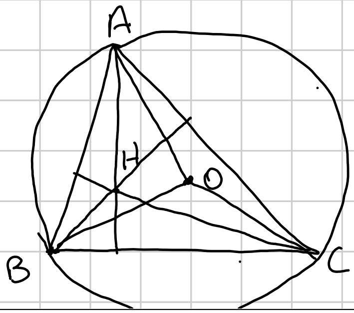
$$Pow_{\Gamma_1}(P) = Pow_{\Gamma_2}(P)$$
$$Pow_{\Gamma_2}(P) = Pow_{\Gamma_3}(P)$$
$$\Rightarrow Pow_{\Gamma_1}(P) = Pow_{\Gamma_3}(P)$$

G3.



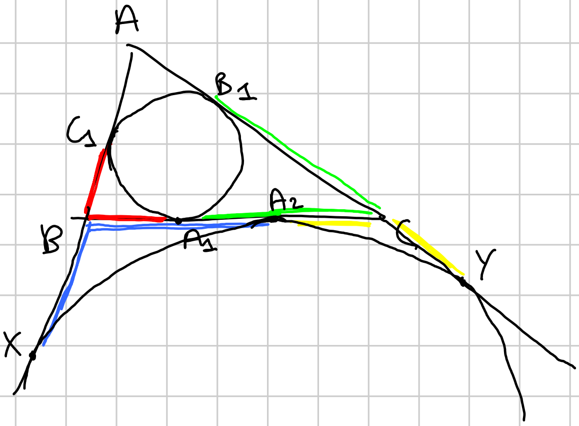
$$Pow_{\Gamma_1}(M) = Pow_{\Gamma_2}(M)$$
$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ AM \cdot AM & & MB \cdot MB \end{array}$$
$$AM^2 = MB^2 \Rightarrow AM = MB$$

G12.



$$B\hat{A}H = 90° - \beta$$
$$A\hat{O}C = 2\beta$$
$$O\hat{A}C = \frac{180° - 2\beta}{2} = 90° - \beta$$
$$\Rightarrow B\hat{A}H = O\hat{A}C$$

G6.



$AX = AY$

$AC_1 = AB_1$

$AX - AC_1 = AY - AB_1$

$XC_1 = B_1Y$

$\parallel$

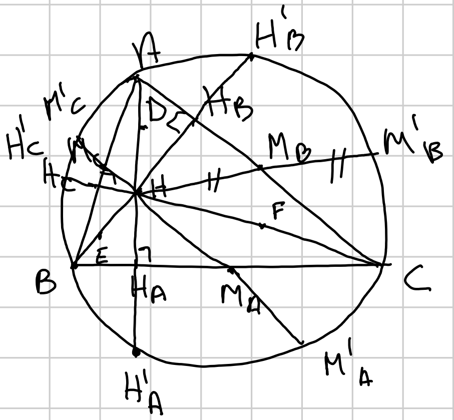
$XB + BC_1 = B_1C + CY$

$BA_2 + BA_1 = A_1C + A_2C$

$BA_1 + \cancel{A_1A_2} + BA_1 = \cancel{A_1A_2} + A_2C + A_2C$

$\cancel{2}BA_1 = \cancel{2}A_2C$

G15.



Omotetia di centro H e fattore 2

$H_A \to H'_A$

$M_A \to M'_A$ e cyc

$\Rightarrow$ ($H'_A M'_A H'_B M'_B H'_C M'_C$ sono ciclici

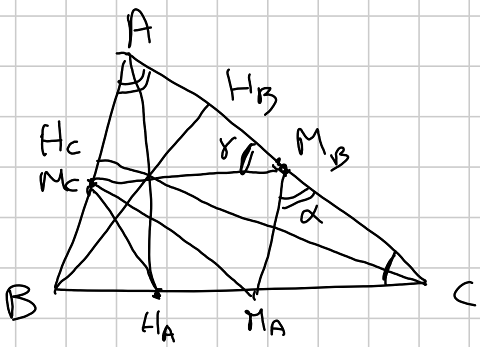
$\Rightarrow$ $H_A M_A H_B M_B H_C M_C$ sono ciclici

$D \to A$

$E \to B$

$F \to C$

$D, E, F \in$ circ di Feuerbach



$\odot\, M_A M_B M_C$

$M_C \hat{M}_B M_A = \beta$

$90°$

$M_C \hat{H}_A M_A = M_C \hat{H}_A A + A\hat{H}_A C =$

$= M_C \hat{H}_A A + 90°$

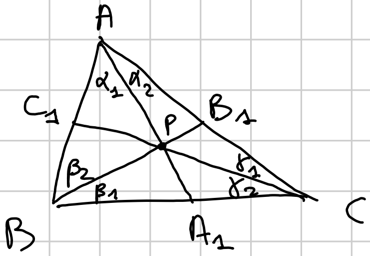
$= M_C \hat{A} H_A + 90°$

$= 90° - \beta + 90° =$

$= 180° - \beta$

$H_A \in \odot\, M_A M_B M_C$

G10.



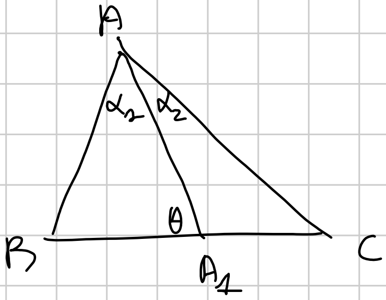
AA_1, BB_1, CC_1 concorrono $\iff \dfrac{BA_1}{A_1C} \cdot \dfrac{CB_1}{B_1A} \cdot \dfrac{AC_1}{C_1B} = 1$ (*)

☆ $\boxed{\dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{AB \cdot \sin\alpha_1}{AC \cdot \sin\alpha_2}}$ $\qquad \dfrac{CB_1}{B_1A} = \dfrac{BC \cdot \sin\beta_1}{AB \cdot \sin\beta_2}$

$\dfrac{AC_1}{C_1B} = \dfrac{AC \cdot \sin\gamma_1}{BC \cdot \sin\gamma_2}$

(*) $\iff \dfrac{\cancel{AB} \cdot \sin\alpha_1}{\cancel{AC} \sin\alpha_2} \cdot \dfrac{\cancel{BC} \cdot \sin\beta_1}{\cancel{AB} \cdot \sin\beta_2} \cdot \dfrac{\cancel{AC} \cdot \sin\gamma_1}{\cancel{BC} \cdot \sin\gamma_2} = 1$

$\iff \dfrac{\sin\alpha_1 \cdot \sin\beta_1 \cdot \sin\gamma_1}{\sin\alpha_2 \cdot \sin\beta_2 \cdot \sin\gamma_2} = 1$



$\dfrac{BA_1}{\sin\alpha_1} = \dfrac{AB}{\sin\theta} \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{AB}{BA_1} \cdot \sin\alpha_1$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$

$\dfrac{A_1C}{\sin\alpha_2} = \dfrac{AC}{\underbrace{\boxed{\sin 180^\circ - \theta}}_{\sin\theta}} \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{AC}{A_1C} \cdot \sin\alpha_2$

$\dfrac{AB}{BA_1} \cdot \sin\alpha_1 = \dfrac{AC}{A_1C} \cdot \sin\alpha_2$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{AB \cdot \sin\alpha_1}{AC \cdot \sin\alpha_2}}$ ☆

Teoria dei numeri

Note Title 01/11/2019

$\underset{\text{interi}}{\mathbb{Z}} = \{\ldots, -2, -1, \underbrace{0, 1, 2, \ldots}_{\text{naturali } \mathbb{N}}\}$

Problema. Quante sono le sol (x, y) INTERE di

equazione diofantea $\rightarrow$ $x^2 - y^2 = \boxed{2019}$ IDEA: fattorizzare!

$(x+y)(x-y) = 3 \cdot 673$

per ogni valore ho una soluzione (x, y) diversa

± 1	± 2019
± 3	± 673
± 673	± 3
± 2019	± 1

$\rightarrow x = \pm 1010 \quad y = \ldots$

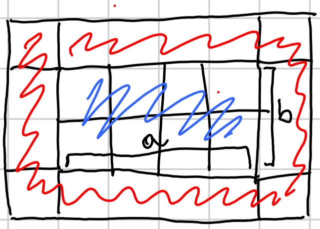
Ho trovato 8 soluzioni intere!

Problema bis $\boxed{2020} = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$

Che valori può prendere $(x+y)$? $\pm 2, \pm 2 \cdot 5, \pm 2 \cdot 101, \pm 2 \cdot 5 \cdot 101$

[# divisori di un numero $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_k^{e_k}$ è $(e_1+1)(e_2+1)\ldots(e_k+1)$]

Problema ter $x^2 - y^2 = \boxed{2022}$ NON ha soluzioni!



Trovare tutti gli a, b interi t.c. (red) = (blue) $(a, b \geq 1)$

$\boxed{ab} = \boxed{2a + 2b + 4}$

IDEA: Guardare i casi "grandi"

IDEA: dividere in casi

(ad es: $a \geq b$, a pari-vs-dispari, a, b coprimi ecc...)

assumo $a \geq b$ $\quad 2a + 2b + 4 \leq 4a + 4 \Rightarrow b \leq 5$

$\overset{\parallel}{ab} \leq 4a + 4$

[oppure

$6a \leq ab \leq 4a + 4$

$2a \leq 4 \rightarrow a \leq 2$]

Adesso faccio i casi! $b = 1, 2, 3, 4, 5$

Per quali valori interi di b $\left(\frac{b^2+3b-1}{b-4}\right)^{☆}$ è intero?

(equivalentemente: $b-4 \mid b^2+3b-1$) ↖ "divide"

$$\frac{b^2+3b-1}{b-4} = \frac{\overbrace{(b-4)b}^{b^2-4b}+7b-1}{b-4} = b + \frac{7b-1}{b-4} = b + \frac{7(b-4)+27}{b-4}$$

$$= b+7+\frac{27}{b-4}$$

☆ è intero $\Leftrightarrow \frac{7b-1}{b-4}$ è intero $\Leftrightarrow b-4 \mid 27$

→ guardo i divisori di 27, so quali sono!

NOTA: $d \mid a,\ d \mid a+b \Rightarrow d \mid b$

$d \mid a,\ d \mid b \Rightarrow d \mid na+mb\ \forall\, n, m$ interi

spesso non si scrive

Quanto vale al max $[\mathrm{MCD}](n^2+100, (n+1)^2+100)$?

n intero ≥ 0

NOTA $(a,b) = (a, a-b) \Leftarrow \left[\begin{array}{l}(a,b) \mid (a,a-b) \\ (a,a-b) \mid (a,b)\end{array}\right.$

$= (a, a-kb)$

$$\begin{aligned}(n^2+100, (n+1)^2+100) &= (2n+1, n^2+100) = \\ &= (2n+1, 2n^2+200) = \\ &= (2n+1, 200-n) = \\ &= (2n+1, 400-2n) = \\ &= (2n+1, 401)\end{aligned}$$

l'MCD dell'inizio divide 401; la risposta è 401, effettivamente viene per $n=200$.

Ho un metodo per calcolare il MCD: algoritmo di Euclide

Basato su "divisione euclidea": a, b interi >0

DIVISIONE EUCLIDEA: $b = aq + r$, dove $0 \leq r \leq a-1$

$$\underset{b>a}{(a,b)} = \underset{b=aq+r}{(a,r)}$$

Esempio:

$$(70,13) = (13\cdot 5+5, 13) = $$
$$= (5, 13) = (5, 5\cdot 2+3) =$$
$$= (5, 3) = (3\cdot 1+2, 3) =$$
$$= (\boxed{2}, \boxed{3}) = (2, \boxed{3} = \boxed{2}\cdot 1 + 1) =$$
$$= (2, 1) = 1$$

Domanda: che soluzioni intere (x,y) ha un'equazione della forma $ax+by=c$? a,b,c interi

NOTA: dati a,b, perché ci sia soluzione dev'essere $(a,b) \mid c$.

Teorema [Bézout]: Se $(a,b) \mid c$ allora esiste una soluzione intera (x,y)

Suppongo $(a,b)=1$ ("primi fra loro")
e $c=1$

ESEMPIO: $70x+13y=1$

$$1 = \boxed{3} - \boxed{2}\cdot 1 = 3-(5-3\cdot 1) = 2\cdot\boxed{3} - \boxed{5} =$$
$$= 2(13-5\cdot 2)-5 =$$
$$= 2\cdot\boxed{13} - 5\cdot\boxed{5} =$$
$$= 2\cdot 13 - 5\cdot(70-13\cdot 5) =$$
$$= 27\cdot\boxed{13} - 5\cdot\boxed{70}$$

Abbiamo trovato la soluzione $x=-5$ $y=27$

NOTA: se c'è una soluzione ce ne sono infinite!

$3^a - 2^b = 1$ quali soluzioni (a,b) intere non negative?

Provare casi "piccoli"!
$(1,1)$ è soluzione e $(2,3)$ è soluzione.

modulo 3: SE $a \geq 1$ allora $3^a \equiv 0 (3)$, devo avere $(-1)^b \equiv -1 (3)$
$\Rightarrow$ ho scoperto che b deve essere dispari.

→ devo risolvere $3^a - 2^{2k+1} = 1$

→ posso provare a risolvere $3^a = 2^{2k+1} + 1 =$

$= (2+1)(2^{2k} - 2^{2k-1} + \dots)$

dev'essere una potenza di 3

proviamo mod 4 : o $\boxed{b=1}$ (poi lo faccio) o $3^a \equiv (-1)^a \equiv 1 (4)$

$\Rightarrow$ a pari! $3^{2k} - 2^b = 1$: devo risolvere

$(3^k+1)(3^k-1) = 2^b$

$MCD(3^k+1, 3^k-1) =$

$= (3^k+1, 2) \mid 2$

risolvo $3^k+1 = 2^i$ $3^k-1 = 2^j$ $j < i$

devo avere $3^k - 1 = 1$ o 2

$\boxed{\text{soluzione } k=1 \Rightarrow a = 2k = 2,\ b = 3}$ ⇝ trovo tutte le soluzioni.

Qual è il MCD di tutti i numeri della forma

$0(3) \equiv 5n - 8n\ (3) \equiv$ $3n^5 + 5n^3 - 8n$ per $n > 1$ intero?

$0(5) \equiv 3n - 8n\ (5) \equiv$

$n(3n^4 + 5n^2 - 8) = n(3n^2+8)(n^2-1) =$

ottima idea!

$= n(3n^2+8)(n+1)(n-1)$

è sempre divisibile per 3 e anche per 4!

In effetti c'è anche 5!

Poi basta trovare due numeri che abbiano MCD 120.

Piccolo teorema di Fermat: p primo, allora $\forall a\ a^p \equiv a (p)$

p primo, allora $\begin{cases} \text{o } a \equiv 0 (p) \\ \text{o } a^{p-1} \equiv 1 (p) \end{cases}$ [ordine di a mod p - cioè min $n \mid a^n \equiv 1 (p)$ è un divisore di $p-1$].

PROBLEMI:

- p, q primi; se $p+q^2$ é un quadrato perfetto p^2+q^n NON lo é per nessun n.
- Dimostrare che $21n+4/14n+3$ non è mai intero
- Risolvere negli interi: $x^2+x+1=y^2$, $p^a+36=b^2$ (p primo, $a,b\geq 0$), $9^a-7^a=2^b$, $a,b\geq 0$
  $x^2+1\equiv 0\ (p)$ dove p è primo $\equiv 3\ (4)$, $x^3+2y^3+4z^3=0$
- Dimostrare che $a^p\equiv a\ (p)$ (p primo) per induzione su a
- Qual è la più grande somma che NON si può spendere con monete di valore 7 e 16?
- Considera la successione a_n definita per $n\geq 10$ da: $a_{n+1}=a_n+n$, $a_{10}=10$; qual è il più grande $n\leq 100$ per cui $99 \mid a_n$.
- Se $13a\equiv 1 \mod 99$ allora a cosa è $\equiv a \mod 99$?

$$\frac{21n+4}{14n+3}=\frac{(14n+3)+(7n+1)}{14n+3}=1+\frac{7n+1}{14n+3}$$

$14n+3 \mid 7n+1 \iff 14n+3 \mid 14n+2$

$14n+3 \mid -1$

2) $13a\equiv 1\ (99) \rightsquigarrow 99 \mid 13a-1$

$13a-1=99b$

$\rightsquigarrow 13a-99b=1$

ha sol. solo quando $(13,-99) \mid 1$

$99=99\cdot\boxed{1}+13\cdot\boxed{0}$
$13=99\cdot\boxed{0}+13\cdot\boxed{1}$

$8=99\cdot\boxed{1}+13\cdot\boxed{-7}$
$5=99\cdot\boxed{-1}+13\cdot\boxed{8}$
$3=99\cdot\boxed{2}+13\cdot\boxed{-15}$
$2=99\cdot\boxed{-3}+13\cdot\boxed{23}$
$\boxed{1=99\cdot\boxed{5}+13\cdot\boxed{-38}}$

Algoritmo di Euclide

$a=-38 \mod 99$
$13a\equiv 1 \mod 99$

$1 = 99a_1 + 13b_1$

$1 = 99a_2 + 13b_2$

$0 = 99(a_1 - a_2) + 13(b_1 - b_2)$

$\Longrightarrow ??\ \boxed{13 \mid a_1 - a_2}$

$13 \cdot 0 = 99 \cdot 0$

3) $x^2 + x + 1 = y^2 = x^2$

$(x-1)^2 < x^2 + x + 1 < (x+1)^2$

$\qquad\qquad\quad = x^2$

mi sa che è falsa per $x \le 0$

$\cancel{x^2} + \cancel{1} + x < \cancel{x^2} + 2x + \cancel{1}$

$\cancel{x^2} = \cancel{x^2} + x + 1 \Longrightarrow \boxed{\begin{matrix} x = -1 \\ y = 1 \end{matrix}}$

MENSA!

MISCELLANEA - Basic

Note Title 02/11/2019

Nota M1 Per "Trovare" si intende "Contare tutti i $p(x)$ di grado $n \in \mathbb{N}$ fissato"

M1 $p(x)$ coeff ± 1, $\deg p = n-1$ t.c. $\exists k \in \mathbb{Z} : p(k) = 0$

Oss $k \mid p(0)$ (termine noto) $\Rightarrow k = \pm 1$.

① $p(1) = 0$ $\quad p(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \rightsquigarrow a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 = 0$

Tutti gli a_i sono $\in \{-1, 1\}$ Dunque c'è lo stesso numero di "1" e "−1".

OSS: n è pari (ossia per n dispari non esistono questi pol.)

$$\text{Num pol} = \binom{n}{\frac{n}{2}} = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)! \left(\frac{n}{2}\right)!}$$

②. $p(-1) = 0$. $(-1)^{n-1} a_{n-1} + (-1)^{n-2} a_{n-2} + \dots + (-1) a_1 + a_0 = 0$.

OSS: n è pari.

OSS: se $a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ha sol -1 ho che $(a_{n-1}(-1)^{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1(-1)^1)x + a_0$ ha sol 1. (cioè cambio di segno i coeff dei termini di grado disp).

Ho trovato una corrispondenza biunivoca fra i pol che hanno radice 1 e quelli che hanno radice −1!

$\rightarrow$ Sono anche loro $\binom{n}{\frac{n}{2}}$!

③ $p(1) = p(-1) = 0$. $P :=$ somma dei coeff di grado pari

$D :=$ " " " dispari.

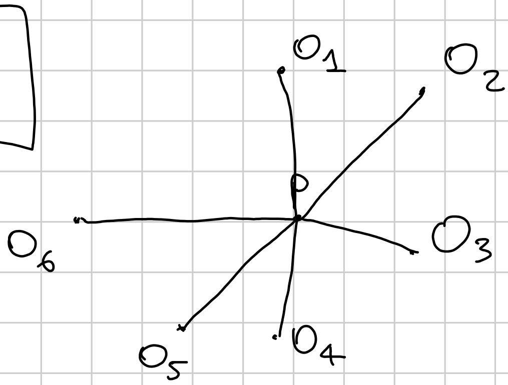
$p(1) = 0 \Rightarrow P + D = 0$
$p(-1) = 0 \Rightarrow P - D = 0$
$\Rightarrow \begin{cases} P = 0 \\ D = 0 \end{cases}$

OSS numero di coeff di grado pari/dispari è pari
(altrimenti non c'è nessun p con $p(1)=p(-1)=0$).
Prendiamo i coeff pari. Deve esserci lo stesso numero di
"1" e "-1" $\rightsquigarrow$ ci sono $\binom{n/2}{n/4}$ possibilità.
Stesso sui coeff dispari.
Dato che posso scegliere indipendentemente pari e dispari,
in totale ci sono $\binom{n/2}{n/4}^2$ possibilità.

INCLUSIONE-ESCLUSIONE: ① + ② − ③

$$\begin{cases} 2 \nmid n \Rightarrow 0 \\ 2 \mid n \quad 4 \nmid n \Rightarrow ③ = 0 \Rightarrow ① + ② - ③ = 2\binom{n}{n/2} \\ 4 \mid n \Rightarrow 2\binom{n}{n/2} - \binom{n/2}{n/4}^2 \end{cases}$$

$\boxed{\text{M2}}$

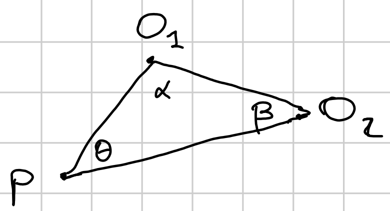


r_i raggio di ω_i

$PO_i \leq r_i$

Per Pigenhole $\exists\, i,j \quad i \neq j$ t.c $O_i\hat{P}O_j \leq 60°$

wlog $O_1\hat{P}O_2 \leq 60°$

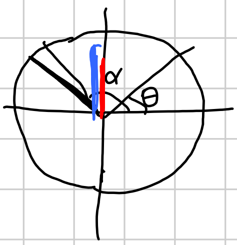


Per Pigenhole $\exists$ angolo tra $\{\alpha, \beta\}$ t.c angolo $\geq 60°$

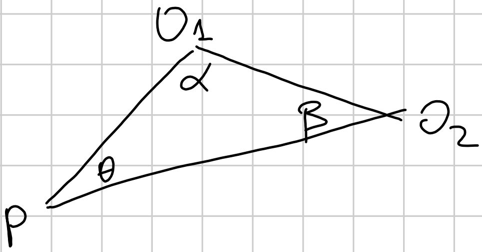
wlog $\alpha \geq 60°$

$\theta \leq 60° \quad \alpha \geq 60° \Rightarrow \theta \leq \alpha \leq 180° - \theta$

$\sin\theta \leq \sin\alpha$



$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sin\theta} \geq \frac{1}{\sin\alpha}}$ ☆



P.A $\quad O_1 \notin \omega_2 \qquad O_1O_2 > r_2$

Inoltre $\quad PO_2 \leq r_2 \qquad O_1O_2 > r_2 \geq PO_2$

$$\Rightarrow \boxed{O_1O_2 > PO_2} \quad ☆$$

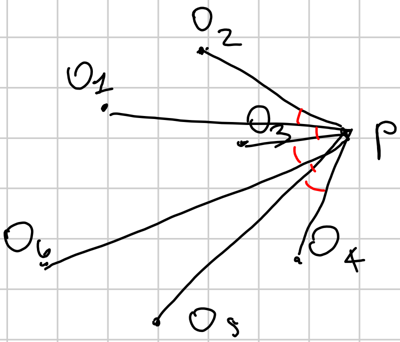
☆ + ☆ $\Rightarrow \quad \frac{O_1O_2}{\sin\theta} > \frac{PO_2}{\sin\alpha}$

Ma per il thm dei seni su $P\hat{O_1}O_2$

$$\frac{O_1O_2}{\sin\theta} = \frac{PO_2}{\sin\alpha} \qquad \lightning$$

$\Rightarrow \quad O_1 \in \omega_2$

Esiste un caso 2



$\sum \triangle \leq 180^\circ$

$\Rightarrow \exists$ angolo $\leq 60^\circ$

$\Rightarrow$ il resto è uguale!

M3 (a). $n(n-1)\dots(n-5)$.

(1): $k^2 \mid \frac{7!}{1!}$ in particolare $\Rightarrow k \mid 12$

(2). $p=2$. Ci sono (esattamente) almeno 3 numeri tra $n,\dots,n-5$ multipli di 2. Inoltre, almeno uno di questi è multiplo di 4 $\Rightarrow$ Il loro prodotto è multiplo di 16.
$p=3$. Ci sono (esattamente) almeno 2 numeri tra $n,\dots,n-5$ multipli di 3 $\Rightarrow$ Il loro prodotto è multiplo di 9
$n\dots(n-5)$ è multiplo di $16\cdot 9 = 12^2$ $(\forall n)$.

Oss $\binom{n}{6}$ è un numero intero. In particolare:
$\frac{n!}{(n-6)!\,6!} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 6! \mid \frac{n!}{(n-6)!}$. Si vede che $12^2 \mid 6!$

(b). Oss: Il punto (a 2) si ricicla. $\Rightarrow 6! = 720 \mid \frac{n!}{(n-6)!}$

(1). p primo $\geq 7 \Rightarrow \exists\, n : p \nmid \frac{n!}{(n-6)!} \Rightarrow p \nmid k$
Prendiamo $n = p\cdot 1000000000 - 1 \Rightarrow n, n-1, \dots, n-5$ non sono multipli di p, $i \in \{0,\dots,5\}$.
$n-i = p\cdot 10\dots0 - (i+1)$. $p \mid p\cdot 10\dots0$, ma $p \nmid i+1 \Rightarrow p \nmid n-i$.

(2). $p=2$ $n-6$ multiplo di 8.
$n-i = (n-6)+(6-i)$ Quante volte viene diviso da 2?

$$\left\{\begin{array}{l} 6-i=1 \rightsquigarrow 0 \\ \dots = 2 \rightsquigarrow 1 \\ = 3 \rightsquigarrow 0 \\ = 4 \rightsquigarrow 2 \\ = 5 \rightsquigarrow 0 \\ = 6 \rightsquigarrow 1 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Il prodotto $n(n-1)\dots(n-5)$ viene diviso da 2 $0+1+0+2+0+1=4$ volte, ossia 16 lo divide ma 32 no!

$16 \mid k$ $32 \nmid k$.
Ripetiamo per i vari primi ($p=3$ e $p=5$).
$n-6$ multiplo di 3^3 ... $9 \mid k$, $27 \nmid k$
$n-6$ multiplo di 5^2 ... $5 \mid k$, $25 \nmid k$
$k = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 6!$

(c). $m = n-6$. $\mathrm{MCD}\Big(n(n-1)\dots(n-5),\ (n-6)(n-7)\dots(n-11)\Big) = D$.

(1) $p \geq 13$ Se p divide uno dei primi 6 termini (n, o $n-1$, o $n-2$, ..) non può dividere nessuno degli altri 6, perché la distanza tra due qualsiasi di questi termini è al più $11 < p \Rightarrow p \nmid D$

(2). $p=11$ chiediamo che $11 \mid n-6$ ⇝ così $11 \nmid n$, $11 \nmid n-1$, .. $11 \nmid n-5$
$\Rightarrow$ 11 non divide il primo termine $\Rightarrow 11 \nmid D$ (Vogliamo $n \equiv 6 (11)$)
$p=7$. chiediamo $7 \mid n-6$. Stesso ragionamento ⇝ $7 \nmid D$.
$p=5,3,2$, chiedendo le divisibilità opportune (ad esempio $16 \mid n-6$)
si ottiene che D viene diviso da 2 esattamente 4 volte,
da 3 esattamente 2 volte e da 5 esattamente 1 volta.
La condizione finale sarà del tipo $11 \cdot 7 \cdot 16 \cdot \ldots \mid n-6$.
Esiste n fatto così e lo posso prendere grande a piacere.

Algebra Advanced

Note Title 02/11/2019

1| $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ t.c.

$\forall x,y \quad f(x+yf(x^2)) = f(x) + xf(xy)$

Proviamo $f(x) = ax+b$

$$a(\cancel{x} + y(ax^2+b)) + \cancel{b} = \cancel{ax} + \cancel{b} + x(axy+b)$$

$$a^2x^2y + aby = ax^2y + bx$$

$$ab = 0$$
$$b = 0$$
$$a^2 = a$$

$$\begin{bmatrix} f(x) = 0 \\ f(x) = x \end{bmatrix}$$

$P(x,y)$: $f(x+yf(x^2)) = f(x) + xf(xy)$

$\Rightarrow \forall x,y \in \mathbb{Q} \quad P(x,y)$

$P(x,0)$: $\cancel{f(x)} = \cancel{f(x)} + xf(0)$ $\quad xf(0) = 0$

$x = 1 \leadsto f(0) = 0$

$P(1,y)$: $f(1) = c$

$$\boxed{f(1+yc) = c + f(y)} \quad (*)$$

proviamo $1 + yc = y \iff y = \frac{1}{1-c} \quad (c \neq 1)$

$c \neq 1 \Rightarrow c = 0 \overset{(*)}{\leadsto} 0 = f(1) = f(y) \quad \forall y \in \mathbb{Q}$

$$\boxed{f \equiv 0}$$

$c = 1 \quad (*) \Rightarrow f(1+y) = 1 + f(y)$

$$\boxed{f(n+y) = n + f(y)} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

x intero in $P(x,y)$

$$\cancel{x} + f(y\underbrace{f(x^2)}) = \cancel{x} + xf(xy)$$

$\forall x \in \mathbb{Z}$, $\forall y \in \mathbb{Q}$ $\quad f(yx^2) = xf(xy)$

$z = xy$

$y = z/x$

$\forall x \in \mathbb{Z} \ \forall z \in \mathbb{Q} \quad f(xz) = xf(z)$

$z = a/b$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^\times$

$f\left(x \cdot \frac{a}{b}\right) = x f\left(\frac{a}{b}\right)$

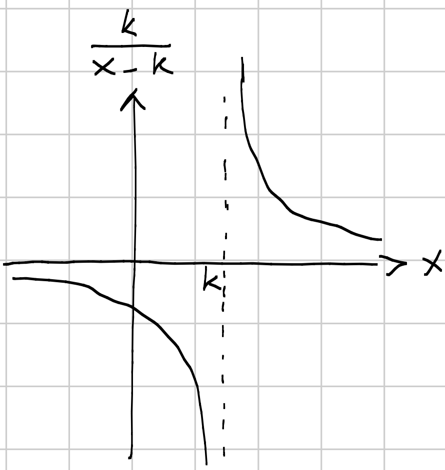
$x = b$

$a = f(a) = b f(a/b)$

$\Rightarrow \quad f(a/b) = a/b \quad \forall\, a/b \in \mathbb{Q}$ $\square$

2)
$$\underbrace{\sum_{k=1}^{100} \frac{k}{x-k}}_{f(x)} \geq 5/2 \quad \rightsquigarrow \text{ unione di intervalli}$$

somma delle lunghezze $= 2020$



$$\frac{k}{x-k} < 1/100$$

$$L = \sum_{i=1}^{100} (x_i - i) = \sum_{i=1}^{100} x_i - 5050$$

deg $P_k = 99$

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{k}{x-k} = 5/2 \xrightarrow{\text{molt. per } \prod(x-i)} \sum_{k=1}^{100} k \cdot \underbrace{\prod_{\substack{j=1,\\ j\neq k}}^{100} (x-j)}_{P_k(x)} = 5/2 \prod_{j=1}^{100} (x-j)$$

$\cdot\, 2/5$

$$\boxed{\prod_{j=1}^{100} (x-j)} - \underline{\frac{2}{5} \sum_{k=1}^{100} k \cdot P_k(x)} = 0$$

termine di deg 100 (coeff 1)

$$\frac{2}{5} \sum_{k=1}^{100} k = 2020$$

il coeff di x^{99} è la somma delle radici (per -1)
quindi è $-\sum_{j=1}^{100} j = -5050$

Quindi il coeff. di x^{99} in tutto il LHS è $-5050 - 2020 = -7070$

ovvero, la somma delle radici è 7070.

$$L = \sum_{i=1}^{100}(x_i - i) = \underbrace{\sum_{i=1}^{100} x_i}_{7070} - 5050 = 2020.$$

□

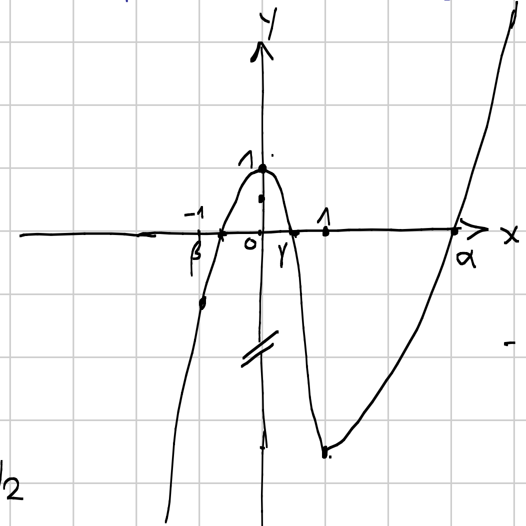
3 α la più grande radice reale di $\overset{P(x)}{x^3 - 17x^2 + \underline{1}} = 0$

β, γ le altre 2 $\lfloor \alpha^{2018} \rfloor \bmod 17$

Prodotto delle radici $= -1$

$\alpha\beta\gamma = -1$

$\underbrace{|\alpha|}_{>1} \cdot \underbrace{|\beta|}_{<1} \cdot \underbrace{|\gamma|}_{<1} = 1$



se $P(-1/2) < 0$ ✓

$P(1/2) < 0$ ✓ allora

$$\boxed{-\frac{1}{2} < \beta, \gamma < 1/2}$$

$$A_{2018} = \boxed{\alpha^{2018} + \beta^{2018} + \gamma^{2018}} < \alpha^{2018} + 1/2$$

$$\beta^{2018} + \gamma^{2018} < 1/2$$

se fosse intera $A_{2018} - 1/2 < \alpha^{2018} < A_{2018} \leq \alpha^{2018} + 1/2$

$\lfloor \alpha^{2018} \rfloor = A_{2018} - 1$

A_{2018} è una funz. simmetrica di α, β, γ e si scrive come somme e prodotti dei coeff. del polinomio P

$\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma$, $\alpha\beta\gamma$

$Q = x^n - (a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)$

$\longrightarrow$ radici $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$b_k = c_1 \cdot \alpha_1^k + \dots + c_n \alpha_n^k$

$$\begin{cases} b_0 = \dots \\ \vdots \\ b_{n-1} = \dots \\ b_k = a_{n-1} b_{k-1} + \dots + a_0 b_{k-n} \end{cases}$$

$A_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$ è una successione per ricorrenza!

viene dal polinomio monico che ha come radici $\alpha, \beta, \gamma \longrightarrow P$

$$P(x) = x^3 - 17x^2 + 1$$

mod 17 : $A_{n+3} \equiv -A_n \quad (17)$

$$A_{n+3} - \cancel{17 A_{n+2}} + A_n = 0 \quad (*)$$

α^n rispetta

$$\boxed{\alpha^{n+3} - 17\alpha^{n+2} + \alpha^n = \alpha^n P(\alpha) = 0}$$

α^n rispetta $(*)$

lo stesso per β^n, γ^n

Abbiamo spiegato (forse) perché A_n rispetta $(*)$

A_{2018} mod 17

$$A_0 = \alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 = 3$$
$$A_1 = \alpha + \beta + \gamma = 17 \equiv 0 \quad (17)$$
$$A_2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \underbrace{(\alpha+\beta+\gamma)^2}_{17^2} - \underbrace{2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)}_{2\cdot 0} \equiv 0 \quad (17)$$

$$\underbrace{\begin{array}{ccccccc} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 3 \end{array}}_{6} \quad \dots \quad A_{2018}$$

$$2018 = 2 + 2016 = 2 + 336 \cdot 6$$
$$A_{2018} \equiv A_2 \equiv 0$$

$$\lfloor \alpha^{2018} \rfloor = A_{2018} - 1$$
$$\equiv 16 \quad (\text{mod } 17)$$

4| $a, b, c \geq 0$ $\quad \sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}} + 8\sqrt[3]{abc} \leq 3(a+b+c)$ $\square$

"succumbed quickly to power means"

— Evan Chen

$$M_3(a,b,c) + 8 M_0(a,b,c) \leq 9 M_1(a,b,c)$$

La $\sqrt[3]{\ }$ compare in varie medie p-esime

- M_3 (cubica)
- M_0 (geometrica) per caso
- $M_{1/3}(a,b,c)$

$$= \left(\frac{a^{1/3}+b^{1/3}+c^{1/3}}{3}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}{3}\right)^3$$

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}} + 8\sqrt[3]{abc} \leq 3(a+b+c)$$

$$q = \frac{a^3+b^3+c^3}{3} \qquad p = abc$$

$$\left(\frac{\sqrt[3]{q}+8\sqrt[3]{p}}{9}\right)^3 \leq \frac{q+8p}{9}$$

$$[M_{1/3} \leq M_1]$$

$$LHS = \sqrt[3]{q}+8\sqrt[3]{p} \leq 9\sqrt[3]{\frac{q+8p}{9}} \overset{?}{\leq} 3(a+b+c)$$

$$3\sqrt[3]{\frac{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}+8abc}{9}} \leq a+b+c$$

$$\Updownarrow$$

$$27\,\frac{(a^3+b^3+c^3)/3+8abc}{9} \leq (a+b+c)^3$$

$$\| \qquad\qquad\qquad \|$$

$$a^3+b^3+c^3+24abc \qquad a^3+b^3+c^3+3\sum_{sym} a^2b+6abc$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{18}^{\,6}abc \leq \cancel{3}\,\frac{(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)}{6}$$

Ma ora
$$\frac{a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+a^2c}{6} \geq \sqrt[6]{a^6b^6c^6} = abc \qquad \square$$

C-ADVANCED

Note Title 31/10/2019

$\boxed{C1}$

K-esimo salto della forma $(1, K)$
Per quali n posso tornare a $(0,0)$ con n salti?

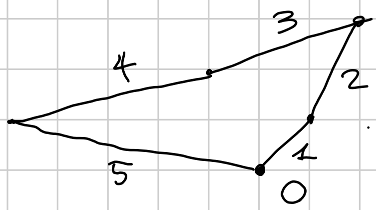
Risposta: $n \equiv 0 \ (4)$ e $n \equiv 1 (4)$ e $n \neq 1$

$(1, k)$, $(1, -(k+1))$, $(-1, -(k+2))$, $(-1, k+3)$

<u>OSS 1</u> Con 4 salti cons. torno dov'ero

<u>OSS 2</u> Se n funziona allora $n+4$ funziona

0 funziona $\Rightarrow$ $4n$ funziona



5 funziona,

$\Rightarrow$ $5+4n$ funziona

Ci restano i casi $n \equiv 2, 3 \ (4)$

Consideriamo la somma delle coordinate del punto dove si trova la cavalletta modulo 2

1° 2° 3°
0 1 0 1 . . .

0 1 1 0 0 1 1 0 0

$\boxed{C2}$ n pesetti, di pesi $x_1, \dots, x_n$ interi positivi
$\sum x_i = 2018$
Qual è il massimo n per cui $\exists\, x_1, \dots, x_n$ non divisibili in due gruppi equipesanti?

Risposta: 1009

Esempio 1 $\quad x_i = 2 \quad \forall i$

Esempio 2 $\quad x_1 = 1010 \qquad x_i = 1 \quad \forall i \neq 1$

Supponendo $n \geq 1010$ dimostriamo che si possono dividere in due gruppi equipesanti.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ \dots \\ x_1 + \dots + x_n \end{array}\right] \geq 1010$$

modulo 1009 due di queste sono uguali (la k-esima e la j-esima) $(k < j)$

$$\underbrace{x_{k+1} + \dots + x_j}_{K} \equiv 0 \; (1009)$$

$0 < K < 2018$ (non ho x_k, e ho x_j)

$\Rightarrow K = 1009$

Questo ci dà una divisione

dim 2

$x_1 \ge x_2 \ge \dots \ge x_n$ $\qquad n \ge 1010$

Algoritmo

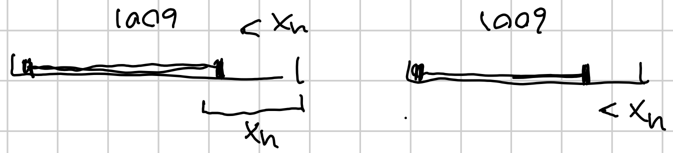
Ho due scatole che possono ospitare un peso di massimo 1009

Al passo k:
- prendo x_k
- se sta nella 1^a scatola lo metto lì
- sei no, se sta nella 2^a ce lo metto
- se no non posso dividere i pesi usando questa procedura e mi fermo

Se l'algoritmo non si ferma mai alla fine produce una divisione

Quindi ci basta mostrare che per $k=1,\dots,n$ x_k sta in almeno una scatola.

Supponiamo per assurdo che x_n non stia in nessuna scatola al passo n



$$\le 2\left\lfloor \frac{1009}{x_n} \right\rfloor + x_n - 1$$

$$\le 2\cdot\frac{1009}{x_n} - 1 + x_n - 1 \overset{?}{<} 1010$$

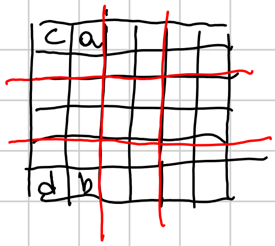
$$2\cdot\frac{1009}{x_n} + x_n \overset{?}{<} 1012 \qquad x_n \ge 2,\quad x_n \le 1009$$

Devo provare solo gli estremi per x_n perché sto massimizzando una somma di due addendi a prodotto fisso. □

$\boxed{C3}$

$n \geq 4$ pari, tabella $n \times n$

- se una casella ha un 2, almeno 2 vicini hanno un 1
- " " " 3 " 3 vicini hanno un 1
- se è 4, tutti i vicini sono 1



Trovare la somma massima

Soluzione 1

Dividiamo la tabella in quadratini $2 \cdot 2$ (n pari).
Ci sono $\frac{n^2}{4}$ caselle $2 \cdot 2$.

$$\text{Somma voluta} = \Sigma_0 = \boxed{\sum \boxplus}$$

4	1
1	4

Caso 1: c'è un 4. Allora al massimo somma $\boxplus = 10$

3	1
3	3

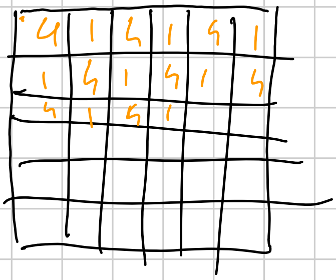
Caso 2: no 4, c'è 3. Al massimo somma $\boxplus = 10$

2	2
2	2

Caso 3: solo 2 e 1 somma $\boxplus < 10$

$$\sum \boxplus \leq \underbrace{\frac{n^2}{4}}_{\#\text{ di } \boxplus \text{ nella tabella}} \cdot \underbrace{10}_{\text{max somma di una } \boxplus} = \frac{5n^2}{2}$$

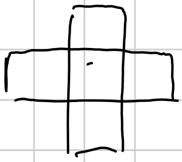
Troviamo l'esempio!



Idea: coloro a scacchiera!

$$\Sigma_o = 4 \cdot \frac{n^2}{2} + 1 \cdot \frac{n^2}{2} = \underline{\underline{\frac{5n^2}{2}}}$$

Soluzione 2 $\left(\Sigma_o \le \frac{5n^2}{2} \right)$

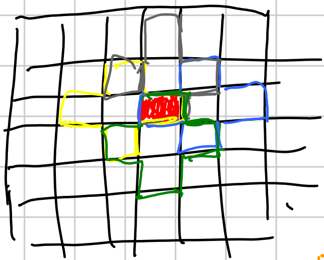


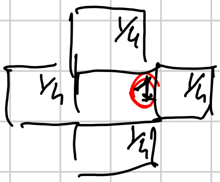
"croci". Ci sono n^2 croci con centri diversi nella tabella

Se consideriamo queste n^2 croci:

1 - ogni casella della scacchiera è centro di esattamente una croce

2 - ogni casella è al "bordo" di 4 croci



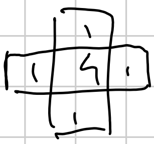


$$\boxed{2\Sigma_o = \Sigma \text{ croci}}$$

$$1 \cdot el + 4 \cdot \frac{1}{4}\, el = 2\, el$$

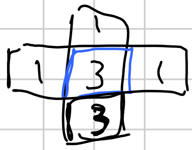
Troviamo la massima somma di una croce:

- Caso 1: ha centro 4:



$\Rightarrow$ somma croce $= 4 + \frac{1}{4}(4) = 5$

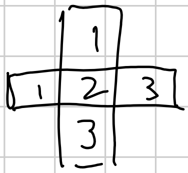
- Caso 2: ha centro 3



$\Rightarrow$ Somma croce $\leq 3 + \frac{1}{4}(6)$

$\leq 3 + \frac{3}{2}$

- Caso 3: ha centro 2



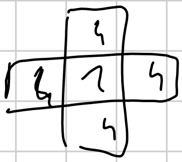
Somma croce $\leq 2 + \frac{1}{4}(2+6)$

$\leq 2 + 2$

- Caso 4 ha centro 1

Somma croce $\leq 1 + \frac{1}{4}(16)$

≤ 5



Quindi somma croce è ≤ 5

Sommando sulle n^2 croci, otteniamo $5n^2$

Quindi $\Sigma_o = \frac{1}{2} 5n^2$

Soluzione 3 (lui)

a_1 : # di uni

a_2 : # di 2

a_3 : # di 3

a_4 : # di 4

Sommate sulle croci (senza pesi) e sfruttare

(1) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = n^2$

(2) $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = \Sigma_o$

$\boxed{C4}$ $S = \{1, 2 \dots 2n\}$

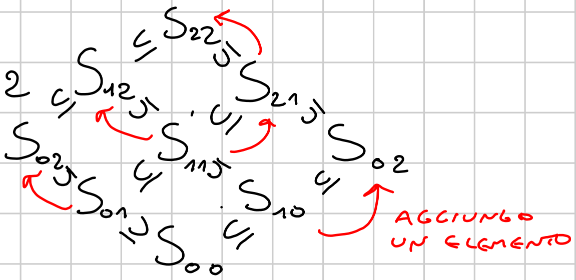
$\forall\, i,j$ t.c. $0 \le i,j \le n$ SCELGO $S_{ij} \subseteq S$

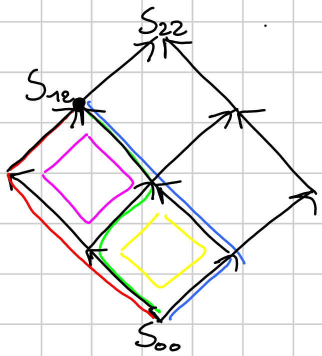
$|S_{ij}| = i+j$

$i \le k \quad j \le l \qquad S_{ij} \subseteq S_{kl}$.

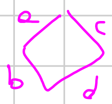
<u>OSS</u> $S_{00} = \{\}$ $\qquad S_{nn} = S$

$n = 2$





AD OGNI $\nearrow$ AGGIUNGO UN ELEMENTO



a,b DEVONO ESSERE c,d

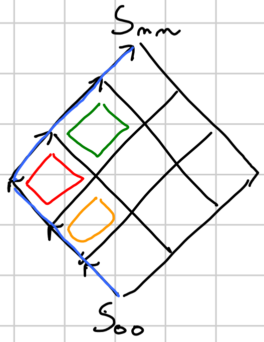
$\Rightarrow$ ROSSO E BLU DANNO LO STESSO INSIEME

e,f DEVONO ESSERE g,h

$\Rightarrow$ VERDE E BLU DANNO LO STESSO INSIEME

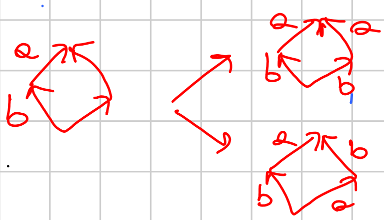
DEVO RISPETTARE:

- NON POSSO AGGIUNGERE LO STESSO ELEMENTO PIÙ VOLTE
- OGNI $\diamond$ DEVE AVERE GLI ELEMENTI "GIUSTI"

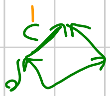


AD OGNI FRECCIA ASSEGNAMO UN ELEMENTO

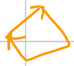
$(2n)!$ MODI



2 MODI



2 MODI



2 MODI

AD OGNI QUADRATO MOLTIPLICO PER 2 :

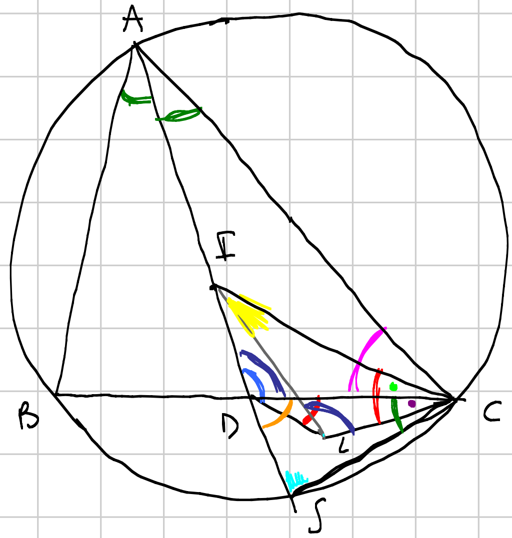
$(2n)! \cdot 2^{n^2}$ MODI PER SCEGLIERE GLI $S_{i,j}$

EGMO Camp 2019 – Geometria

Note Title 01/11/2019

G 1

a)



Tesi: $CL = IL$

$\alpha = \angle BAC$

$\beta = \angle CBA$

$\gamma = \angle ACB$

$$\angle LCI = \angle LCD + \angle DCI = \frac{1}{2}\angle SCD + \gamma/2$$

$$\Rightarrow \boxed{\angle LCI = \frac{\alpha}{4} + \gamma/2}$$

$$\angle SDC = \boxed{\alpha/2 + \gamma} \Rightarrow \frac{1}{2}\angle SDC = \angle LCI$$

$$\Rightarrow \boxed{\angle LDC = \angle LCI}$$

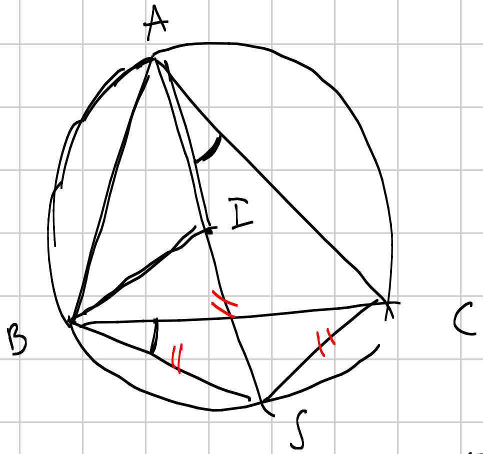
Quindi la Tesi equivale a mostrare $DLCI$ ciclico.

$$= \angle CDA + \angle LDC = \beta + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\gamma}{2}$$

Ma ora $\text{(blu)} + \text{(rosso)} = \left(\beta + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) + \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) = \pi$ $\blacksquare$

Altra soluzione

- Lemma:



Tesi: S è circocentro di $\triangle BIC$

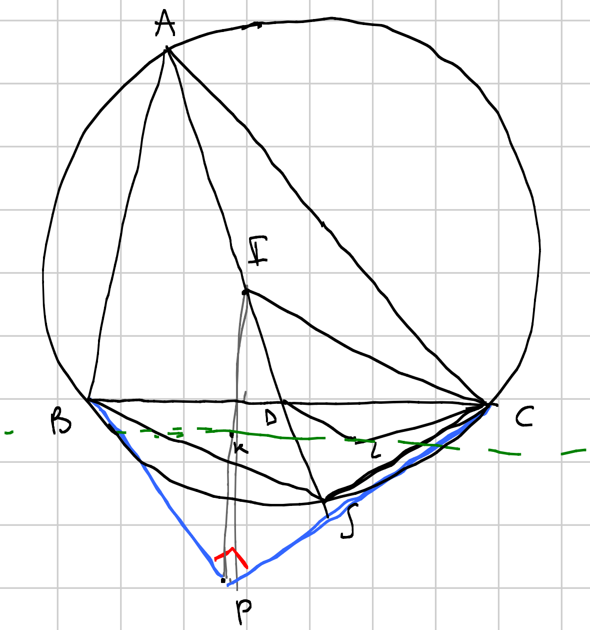
Dim $\angle BIS = \frac{\alpha}{2} + \beta/2$

$\angle SBI = \angle SBC + \angle CBI$
$= \alpha/2 + \beta/2$

$\Rightarrow \triangle BIS$ isoscele

Analogo $\triangle SIC$ isoscele $\Rightarrow$ chiude $\square$

(Dimostro che L sta sull'asse di BC)



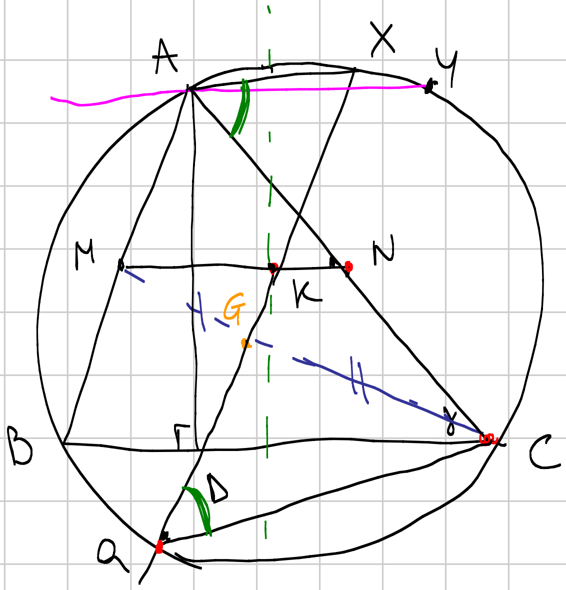
Dalle parte a) : • DLIC ciclico γ_1
• $IL = LC$
• BIDK ciclico γ_2
• $IK = KB$

P sym di I wrt KL
$\Rightarrow$ $PK = KI$ $\Rightarrow$ $PK = KI = KB$ (1)
$\Rightarrow$ $PL = LI$ $\Rightarrow$ $PL = LI = LC$ (2)

• (1) ci dice che K è circocentro di $\triangle PIB$
• (2) L è circocentro di $\triangle PIC$

$$\angle CPB = \angle CPI + \angle IPB$$
$$= \frac{1}{2}\angle CLI \quad \frac{1}{2}\angle IKB$$
$$= \frac{1}{2}\angle CDI + \frac{1}{2} BDI = \frac{1}{2}\left(\angle CDI + \angle IDB\right) = \frac{1}{2}\pi$$

G2



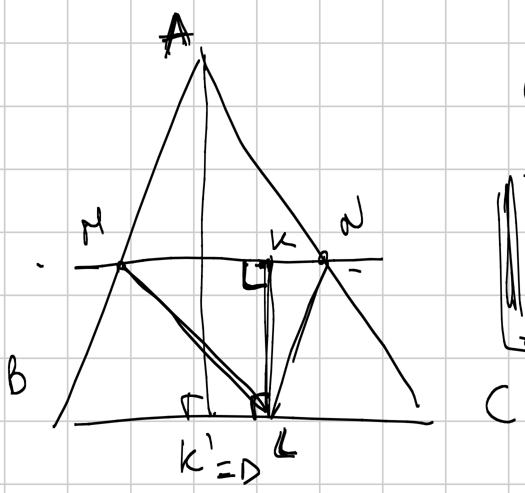
Tesi: KNCQ ciclico

Def Y t.c.
AY ∥ BC, Y ∈ ⊙ΔABC

"Euristica": Dimostro che $\angle CQK = \angle ANK$
⇒ la tesi diventa dimostrare BC ∥ AX

Idea Omotetia di centro G e fattore −2
(perché M → C
N → B)

Def Y come sopra e dimostriamo che
Y, K, Q sono allineati.

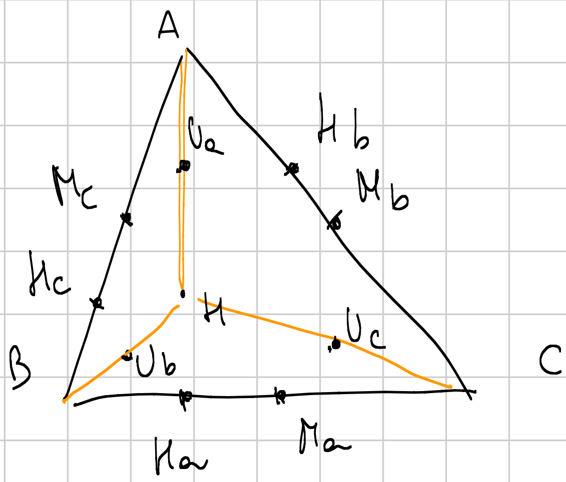


Con l'omotetia,
ΔLMN → ΔABC
In particolare
⊙LMN → ⊙ABC

$K \to D$

Ci serve dimostrare che $\forall\, D \to Y$

$\odot LMN$ = Feuerbach di $\triangle ABC$



$D \in \odot LMN \Rightarrow D' \in \odot ABC$

Ovverlo conserva parallelismi e $DL \parallel BC$

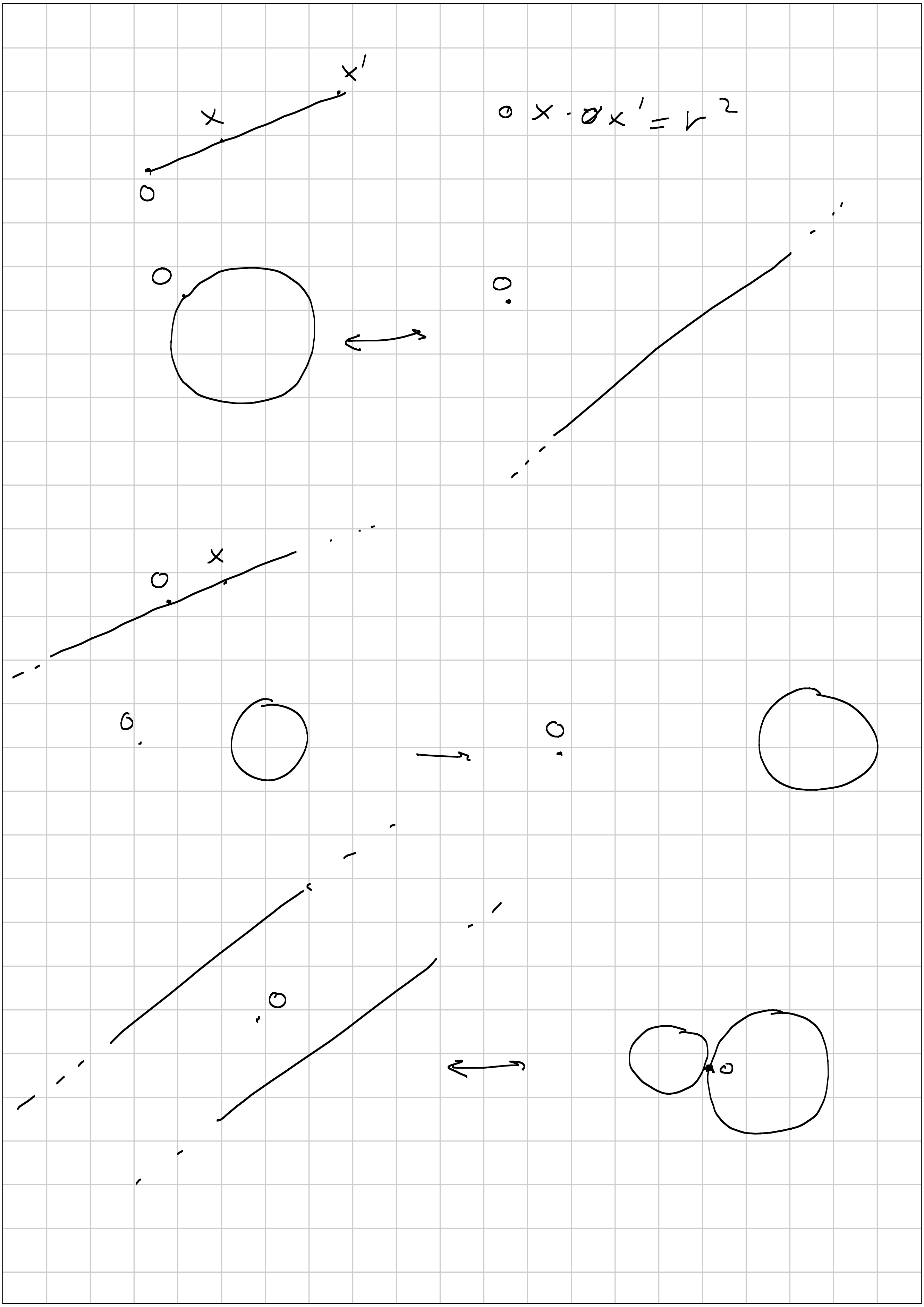
Ora $L \to A$

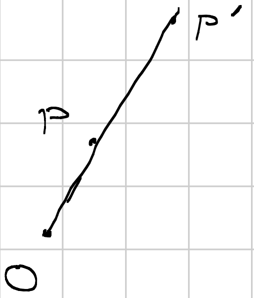
& $AD' \parallel BC$ e $D \in \odot ABC$

$\Rightarrow D' = Y$!

$\Rightarrow Y \equiv X$

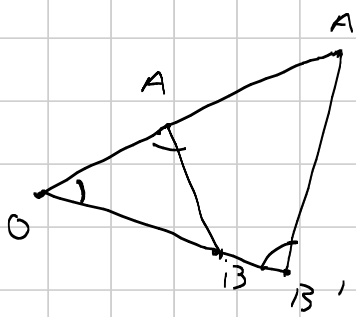
$\blacksquare$


X'
X
O
$OX \cdot OX' = r^2$
O
O
O
X
O
O
O
O



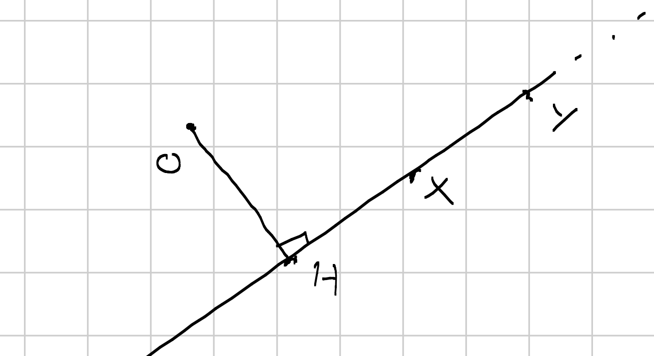
Inversione centro O
e raggio r

$OP \cdot OP' = r^2$

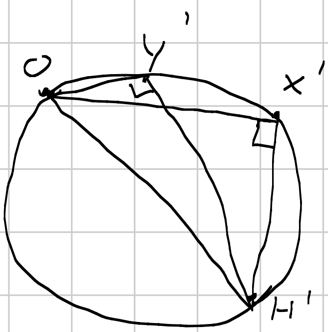


$O\hat{A}B$

$$OA \cdot OA' = r^2 = OB \cdot OB' \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}$$

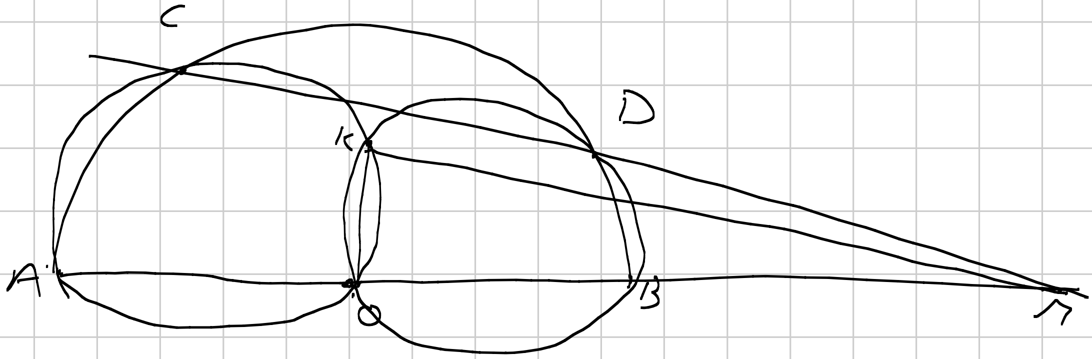


X t.c. $\angle OHX = \frac{\pi}{2}$

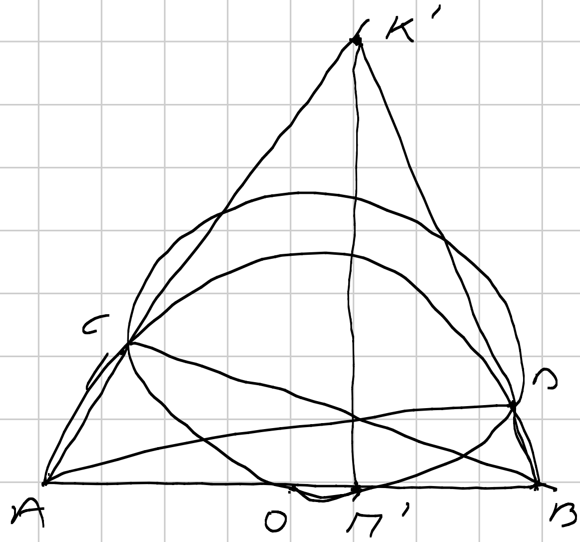


$\angle OX'H' = \frac{\pi}{2}$

G3



Inversione di centro O e raggio OA



Voglio $\angle OM'K' = \frac{\pi}{2}$

$M' = AB \cap$ Circonferenza per $C, O, D = \Gamma$

$\angle ADB = \angle BCA = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow C, D$ piedi delle altezze del triangolo A, B, K'.

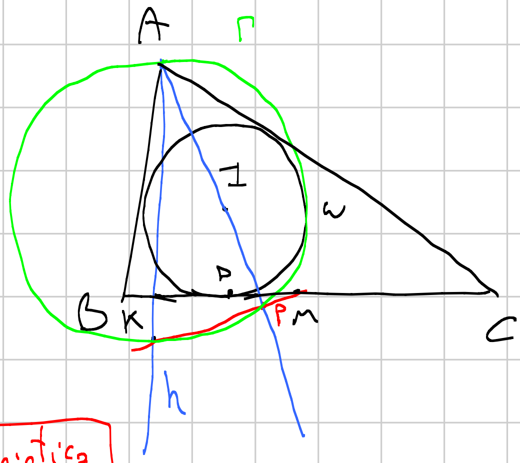
O è il punto medio di AB.

$\Rightarrow \Gamma$ è la circ. di Feuerbach di ABK'

$\Rightarrow M'$ è piede dell'altezza relativa ad AB

$\Rightarrow K'M'O = \frac{\pi}{2}$

Problema G4



M pt medio di BC

h = altezza da A su BC

$P \in AI$, $PM \perp AP$

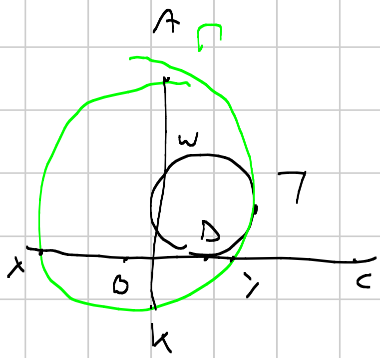
$K = MP \cap h$

Γ = cerchio di diametro AK

Tesi: Γ e ω sono tangenti

$\boxed{\text{Euristica}}$

Chi è il punto di tangenza?



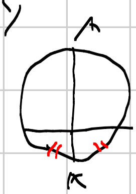
T = pt di tangenza tra ω e Γ

$\Rightarrow T, D, K$ sono allineati

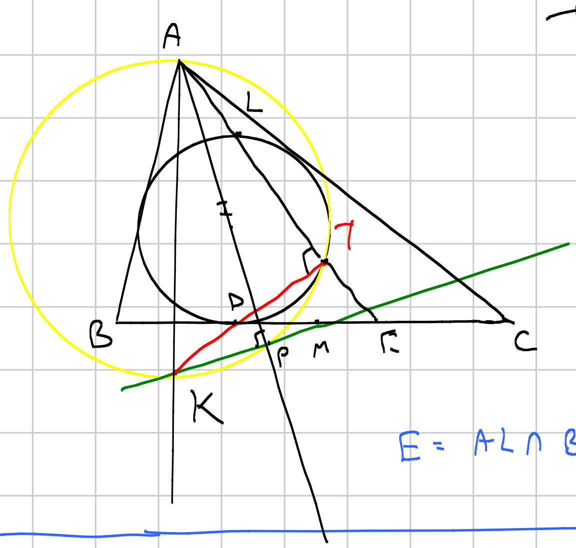
Oss

T, D, pt medio dell'arco XY sono allineati

AK diametro $\Rightarrow$ è asse di XY $\Rightarrow$ K è pt medio dell'arco $\widehat{XY}$



Se la tesi è vera, T = pt di tangenza tra ω e Γ sta su KD



$T \in \Gamma \Rightarrow \angle ATK = 90°$ AK diametro

$\angle APK = 90°$

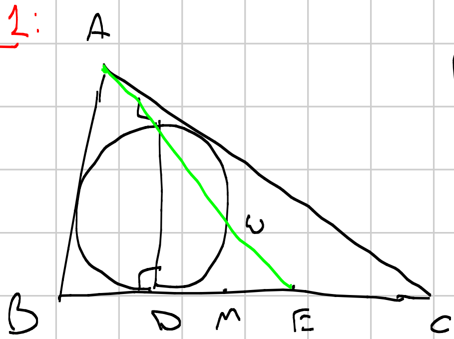
L = diametralmente opposto di D in ω

$\Rightarrow DTL = 90°$

$\Rightarrow A\ L\ T$ allineati

$E = AL \cap BC$, $\angle DTE = 90°$ $DM = ME$

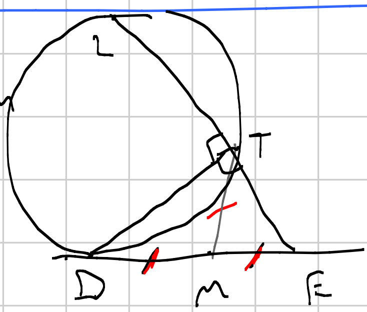
Lemma 1:



$E = AL \cap BC$ M pt medio BC

Tesi del lemma: $MD = ME$

zoom



DTE = triangolo rettangolo

$M \Rightarrow$ centro della circonferenza.

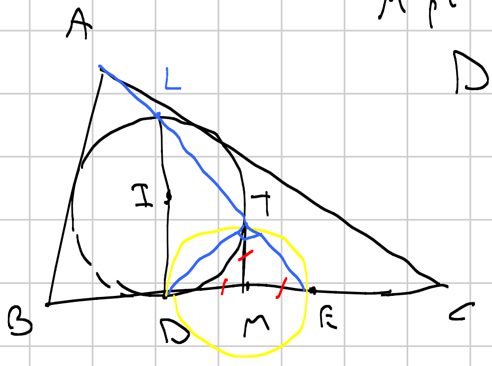
$\Rightarrow \boxed{MT = MD} = ME$

$\Rightarrow MT$ tange ω

Se la tesi è vera, ho più forza

- pt di tangenza tra ω, Γ è T
- $KD \cap \omega = T$
- A, L, T, E sono allineati
- MT tange ω

DIMOSTRAZIONE



M p.to medio BC

Definisco T su ω tale che MT tange ω

Tangenti $\Rightarrow MD = MT = ME$

Sia E il simmetrico di D rispetto M

C'è una circonferenza di centro M passante per D, T, E

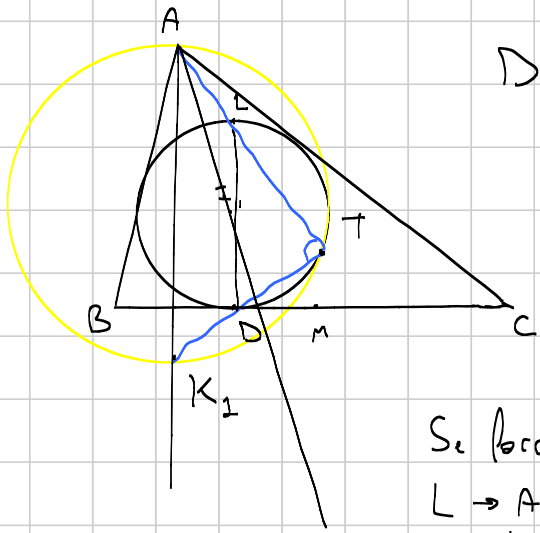
DE diametro $\Rightarrow \angle DTE = 90^\circ$

$L = TE \cap \omega$, siccome $\angle DTL = 90^\circ \Rightarrow DL$ diametro

$\Rightarrow DL \perp BC$

Per il lemma 1 $\underbrace{A, L, E}$ sono allineati

\+ LTE allineati $\Rightarrow$ A, L, T, E sono allineati



Definisco $K_1 = DT \cap h$ altezza da A su BC

$DL \perp BC \perp AK$

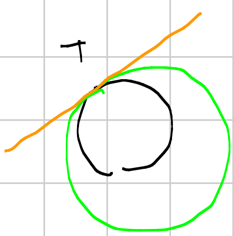
$\Rightarrow DL \parallel AK$

$\Delta TLD \cong \Delta TAK_1$ sono simili.

Se faccio un'omotetia di centro T

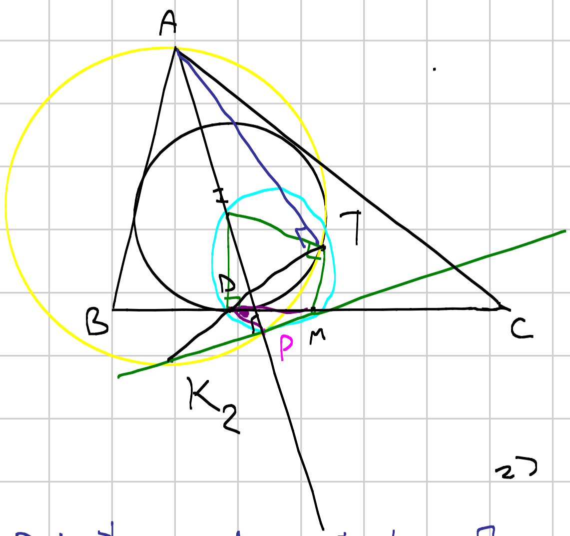
$L \to A$ $\qquad \omega \to$ circonferenza per $A, T, K_1 = \Gamma_1$

$D \to K_1$



Γ_1 e ω sono tangenti

Il testo da $K = h \cap \boxed{MP}$ = retta per M $\perp AI$



$K_2 = TD \cap MP$

Voglio A, T, K_2, P ciclici su Γ_2 e Γ_2 tangente a ω in T

So che $\angle ATD = 90°$

$\angle APK_2 = 90$

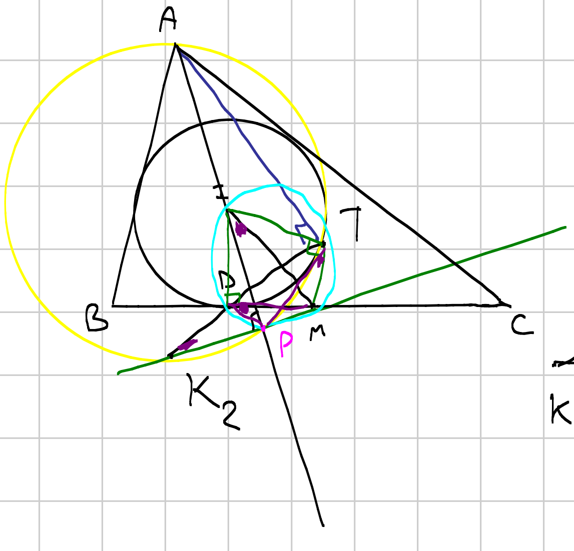
$\Rightarrow A, T, K_2, P$ è ciclico

Dimostriamo che MT tange Γ_2

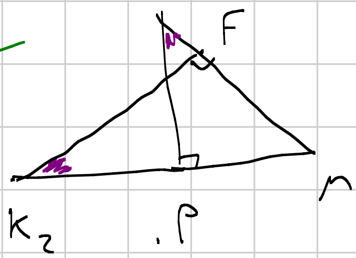
- So che $MDITP$ è ciclico $\begin{cases} \angle MTI = \angle MDI = 90 \text{ in quanto tangenti} \\ \angle MPI = 90° \end{cases}$

circonf. di $MITDP$

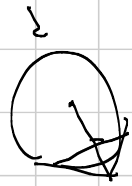
$\angle MDP = \angle MTP = \angle PIM$



I



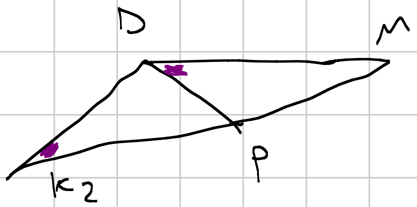
$MI \perp DT$



$F = MI \cap DT$

$\angle K_2FM = 90$

$\angle MK_2T = \angle MIP = \angle MDP$



$\Rightarrow \Delta MPD \sim \Delta MDK_2$

$\frac{MD}{MP} = \frac{MK_2}{MD} \Rightarrow MP \cdot MK_2 = MD^2 = MT^2$ (perché MT, MD tangenti)

$\Rightarrow MT$ tange circonferenza per T, P, K_2 = circonf. per $A, T, P, K_2 = \Gamma_2$

Γ_1 = cerchio per A, T, K_1 tangente a ω in T

Γ_2 = cerchio per A, T, K_2 tangente a ω in T

$\Gamma_1 = \Gamma_2$

$\Downarrow$

$K_1 = K_2$

K_1 : altezza $\cap$ TD

$||$

K_2 = $TD \cap MP$

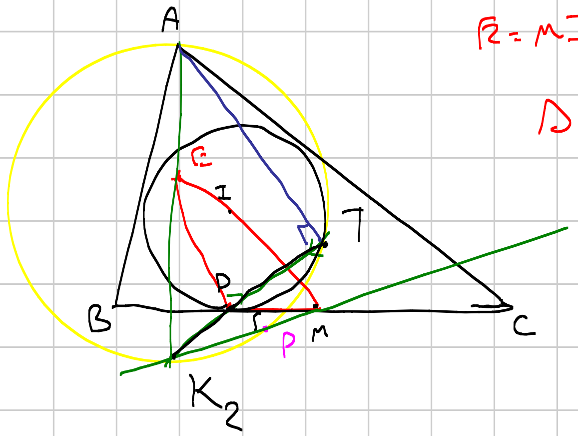
K = altezza $\cap MP$

$K = K_1 = K_2$

$\square$

Arrivati a K_1; avremmo quasi finito

ci manca che altezza, TK_1, MP concorrono.



$E = MI \cap h$

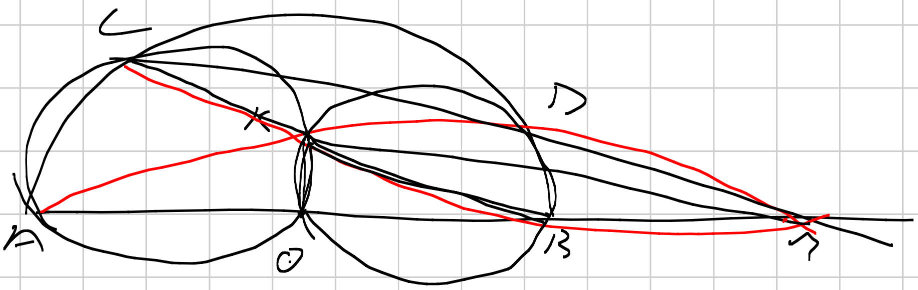
$\triangle EDM$

le altezze di EDM

sono le rette che devono

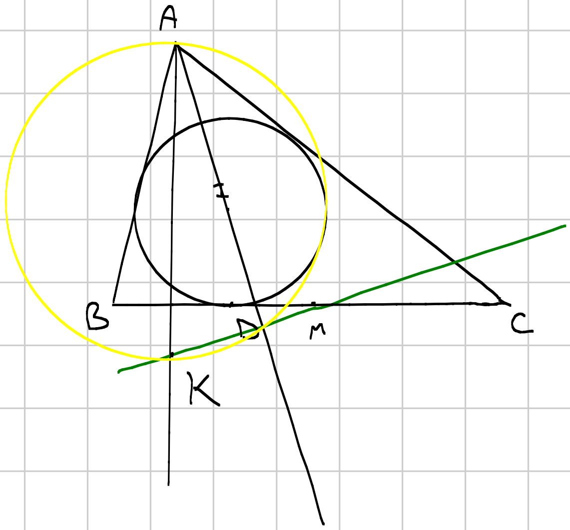
concorrere.

Altra dimostrazione



MBKC e MDKA ciclici

$\angle OKM = \angle OKB + \angle BKM$ poi conti con angoli


A
I
B
D
M
C
K

TdN EGMO 2015

Note Title 01/11/2019

Problema 1

$x^3+3x+14=2p^n$

$(x+2)(x^2-2x+7)=2p^n$

$\begin{cases} x+2=2p^\alpha \\ x^2-2x+7=p^\beta \\ \alpha+\beta=n \end{cases}$ o $\begin{cases} x+2=p^\alpha \\ x^2-2x+7=2p^\beta \\ \alpha+\beta=n \end{cases}$

$\rightsquigarrow$ mod p^α $\quad x\equiv -2$ $\qquad x^2-2x+7 \geq x+2$

$x^2-3x+5=(x-\frac{3}{2})^2+(5-\frac{9}{4})\geq 0$

>0

$\beta<\alpha \quad \Rightarrow 2p^\beta \leq p^\alpha$

$\beta \geq \alpha$

$0\equiv(-2)^2+4+7=15 \qquad p^\alpha \mid 15$

$p^\alpha=3, \; p^\beta=5$

- $x=2p^\alpha-2 \qquad \underbrace{4p^{2\alpha}-c_1p^\alpha+c_2}=p^\beta$

$p^{2\alpha}<3p^{2\alpha}+[p^{2\alpha}-c_1p^\alpha+c_1]<p^{2\alpha+1}$

$p^{2\alpha+1}=4p^{2\alpha}+c\dots$

$p^{2\alpha} \mid -c_1p^\alpha+c_2$

$x=p^\alpha-2$

$\rightsquigarrow \quad p^{2\alpha}\underbrace{-c_1p^\alpha+c_2}_{<0}=p^\beta$

$\beta<2\alpha$

$p^{2\alpha}-c_1p^\alpha+c_2 \geq p^{2\alpha-1} \qquad p^\alpha \gg 1$

Problema 2

$p_j \mid M+j \quad , \; j=1,\dots,n \qquad M,n \in \mathbb{Z}_+ , \; M > n^{n-1}$.

$M+1 \; , \dots \quad M+i \; , \dots \; M+j \; \dots \quad M+n$

$p_i \xleftarrow[\neq ?]{} , p_j$

- $d \mid (M+i, M+j) \;\Rightarrow\; d \mid M+i-M-j = i-j < n$

$(M+i, M+j) \mid (n-1)!$

$a_i := \dfrac{M+i}{((n-1)!, M+i)}$.

$\Rightarrow \; a_i > 1 , \quad (a_i, a_j) = 1$.

$((n-1)!, M+i) \le (n-1)! \le n^{n-1} \quad M+i > n^{n-1}$

$a_i > 1$

- $(M+i, M+j) \mid (n-1)!$

$$\left(\frac{M+i}{((n-1)!, M+i)} , \frac{M+j}{((n-1)!, M+j)} \right) \Bigg| \; \frac{(M+i, M+j)}{mcd\big(((n-1)!, M+i), ((n-1)!, M+j)\big)} = 1$$

$p_i \mid a_i \qquad p_i \neq p_j$

- $p_i \mid M+i , \quad p_i > n$

$p_i^k \nmid M+i \; , \; p_i^k > n$

$\Rightarrow \; \nexists \; \bar{k} \text{ t.c. } p_i^{\bar{k}} \mid M+j \; , \; p_i^{\bar{k}} > n$.

$M+i = \prod_{i=1}^{k} \underbrace{p_i^{\alpha_i}}_{\le n} \qquad p_i \le n \qquad k \le n-1$

$\le n^{n-1}$

assurdo

$\exists\, p_i$ t.c. $\exists\, k_i$ t.c. $p_i^{k_i} > n$, $p_i^{k_i} \mid M+i$.

$p_i' = \dots$

$p_i = p_j$, $p_i^{k_i} \mid M+i$, $p_j^{k_j} \mid M+j$

$p_i^{\min(k_i,k_j)} > n$ $p_i^{\min(k_i,k_j)} \mid i-j < n$

Problema 3: $f^{(i)}(n) = \underbrace{f \cdot\cdot (f}_{i \text{ volte}}(n)\cdot)\cdot\cdot)$

$$f^{(f(n))}(n) = \frac{n^2}{f^{(2)}(n)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Quali sono i possibili valori di $f(1000)$?

$n = 1$: $f(f(1)) = 1$ $a = f(1) \to f(a) = f(f(1)) = 1$

$n = a \to 1 = f(a) = f^{(f(a))}(a) = \frac{a^2}{f(f(a))} = \frac{a^2}{a} = a$

$\to \boxed{f(1) = 1}$

k t.c. $f(k) = 1 \implies k = 1 \to 1$

$\cdot\ n = p$ $f^{(f(p))}(p) = \frac{p^2}{f(f(p))}$ $f(f(p)) \in \{1, p, p^2\}$

$f(f(p)) = 1 \to f(p) = 1 \to p = 1$

$f(f(p)) = p^2 \to f^{(f(p))}(p) = 1 \to p = 1$

$$\boxed{f(f(p)) = p}$$

- $f(m)=f(n)=d \Rightarrow f^{(d)}(m)=\dfrac{m^2}{f(d)}$

$\boxed{\text{INIETTIVA}}$

$$f^{(d-1)}(f(m)) \overset{\shortparallel}{\ } f^{(d-1)}(f(n)) \qquad f^{(d)}(n)=\frac{n^2}{f(d)} \quad \Big\}\ m=n$$

- $f(n)=n \quad \forall n$ dispari

P.B : $n=1$ già visto

P.I : supponiamo che $\forall d$ dispari $d<n$: $f(d)=d$

e dimostriamo che $f(n)=n$ n dispari

$$\boxed{f^{(2)}(n) \cdot f^{(f(n))}(n) = n^2 \quad n \text{ dispari}}$$

n $\qquad n$

$d_1=f(f(n))$ dispari $<n$: $f(n)=d_1<n \to n=d_1$ ass

$$f(f(n))=n$$
$$f^{(f(n))}(n)=n$$

$m=f(n)$: $f(m)=n$

$$f^{(n+1)}(n)=f^{(f(f(n)))}(f(n))=\frac{(f(n))^2}{f(f(f(n))))}=\frac{(f(n))^{\cancel{2}}}{\cancel{f(n)}}$$

$$\Rightarrow f(n)=f^{\overset{\text{disp}}{(n+1)}}(n)=n \quad \text{pari}$$

$f(1000)$

— INIETTIVA

— $f(d) = d \quad \forall$ d dispari

$$f(1000) = 2k \rightarrow f(n) = \begin{cases} n & n \neq 1000, 2k \\ 2k & n = 1000 \\ 1000 & n = 2m \end{cases}$$

$n = 2k \quad : \quad f(2k) = 1000 \qquad f(f(2k)) = 2k$

$$2k = f^{(2000)}(2k) \overset{?}{=} \frac{(2k)^2}{2k} = 2k \quad \checkmark$$

Problema 4.

$$\boxed{f(n)} = \sum_{\substack{d \leq n \\ (d,n) \neq 1}} d \quad : \quad \forall n \, \forall p \quad f(n+p) \neq f(n) \quad \forall p > 7$$

$$\sum_{\substack{d \leq n \\ (d,n)=1}} d \qquad (d,n) = 1$$

$$(n-d, n) = (-d, n) = 1$$

$$2 \sum_{\substack{d \leq n \\ (d,n)=1}} d \begin{cases} 1 + d_1 + d_2 \ldots + n-1 \\ n-1 + n-d_1 + n-d_2 \ldots + d_1 \; 1 \end{cases} = n \cdot \phi(n)$$

$$\sum_{\substack{d \leq n \\ (d,n)=1}} d = \frac{n}{2} \cdot \phi(n)$$

$$f(n) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n \phi(n)}{2} = \frac{n}{2}(n+1 - \phi(n))$$

Riassunto : $\phi(n) = \#\{ d < n \mid (d,n) = 1 \}$

$\phi(p) = p - 1 \quad , \quad \phi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$

$$\phi(p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}) = \prod p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)$$

$$= \prod p_i^{\alpha_i}\left(1-\frac{1}{p_i}\right) \quad (*)$$

$$(m,n)=1 \Longleftarrow \boxed{\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)}$$

$$\frac{\phi(n)}{n} = \prod_{p\mid n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

$$f(n) = \frac{n}{2}\left(n+1-\phi(n)\right)$$

$\exists n\ \exists p>7:\quad f(n+p) = f(n)$

$$\Rightarrow (n+p)(n+p+1-\phi(n+p)) = n(n+1-\phi(n))$$

$(n,p)=1 \Rightarrow\quad n+p \mid n(n+1-\phi(n))$ ass.

$(n+p,n)=1 \longrightarrow\quad n+p \mid n+1-\phi(n) < n+p$

$\Rightarrow\ n=pk\quad (k\cancel{p}+\cancel{p}^{1})(kp+p+1-\phi(p(k+1))) = k\cancel{p}(kp+1-\phi(kp))$

$$\boxed{\phi(p(k+1)) + k\,\underbrace{\boxed{(\phi(p(k+1))-\phi(pk))}}_{r} = 2kp+p+1}$$

$\Rightarrow\ p-1 \mid r \qquad kr = \alpha\cdot k(p-1) \qquad \alpha \geq 1$

$\alpha k(p-1) < 2kp+p+1 \qquad p>7$

$$\boxed{\alpha<3}\ \begin{cases} 3k(p-1) > 2kp+p+1 \\ kp-3k \overset{?}{>} p+1 \iff (p-3)(k-1) > 4 \end{cases}$$

$\hookrightarrow k=1$ a meno

$$\phi(p(k+1)) < p(k+1) < (p+1)(k+1)$$

$k\alpha(p-1)$

$$= k r = 2kp + p + 1 - \phi(p(k+1)) \quad \}^{\alpha=1}$$

$$> \cancel{2}kp + \cancel{p} \cancel{+1} - \cancel{pk} - k \cancel{-1} \cancel{-1} = k(p-1)$$

$\Rightarrow$ $\alpha = 2$

$$\phi(p(k+1)) - \phi(pk) = 2(p-1)$$

$$\phi(p(k+1)) = 2kp + p + 1 - 2k(p-1)$$
$$= 2k + p + 1$$

$$\phi(pk) = 2k - p + 3$$

$p \mid k \Rightarrow p \mid \phi(pk) = 2k - p + 3$

$p \mid p,\ p \mid 2k \Rightarrow p \mid 3$ an.

$p \mid k+1 \to p \mid 2(k+2) - 2 + p + 1 \equiv -1 \ (p)$

$$\phi(k+1) - \phi(k) = \boxed{2}$$

$\phi(n) \equiv 2 \ (4)$ $\quad n = 2^a p^m \quad a = 0, 1$

$\parallel$

$\prod p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1)$

Uno fra $\phi(k)$ e $\phi(k+1)$ non è div per 4

$\to$ uno dei due (ad esempio $\phi(k)$) =

$k = \{ 2p^m, p^m, 4 \}$

$$\phi(k) = q^m \longrightarrow \phi(k) = \frac{2k-p+3}{p-1}$$

$$1-\frac{1}{q} = \frac{\phi(k)}{k} = \frac{2k-p+3}{k(p-1)} = \frac{2}{p-1} - \underbrace{\frac{p-3}{k(p-1)}}_{>0} < \frac{2}{p-1}$$

$$\frac{q-1}{q} < \frac{2}{p-1} \iff (p-1)(q-1) < 2q$$

$$q\,(\cancel{p-2}) < \frac{p-1}{p-2} < 2$$

EGMO Camp 2019 - Miscellanea

Note Title 02/11/2019

$\boxed{M1}$

$$\sum_{\substack{1\le p<q\le n \\ (p,q)=1 \\ p+q>n}} \frac{1}{pq} = \frac{1}{2} \qquad n>1$$

Passo base, $n=2 \qquad (p,q)=(1,2)$

Dimostriamo che $n-1 \Rightarrow n$

$$\Sigma_n = \sum_{(p,q)\in S_n} \frac{1}{pq}$$

In Σ_n conto tutte le coppie di Σ_{n-1} tranne quelle con $p+q=n$

In Σ_{n-1} conto tutte le coppie di Σ_n tranne quelle con $q=n$

$$\Rightarrow \quad \Sigma_n = \Sigma_{n-1} - \underbrace{\sum_{\substack{p+q=n \\ (p,q)=1 \\ 1\le p<q\le n-1}} \frac{1}{pq}}_{\{p\le n/2\}} + \underbrace{\sum_{\substack{q=n \\ (p,q)=1 \\ 1\le p<n}} \frac{1}{pq}}_{\{p<n\}}$$

$$\Sigma_n = \underbrace{\boxed{\Sigma_{n-1}}}_{=\frac{1}{2}} - \sum_{\substack{(p,n-p)=1 \\ 1\le p<n-p}} \frac{1}{p(n-p)} + \sum_{\substack{(n,p)=1 \\ 1\le p<n}} \frac{1}{np}$$

Mostriamo $\displaystyle \sum \frac{1}{p(n-p)} = \sum \frac{1}{np}$

$(p, n-p) = 1 \quad e \quad (n, p) = 1$

$$\frac{1}{np} + \frac{1}{n(n-p)} = \left(\frac{n}{p(n-p)}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{p(n-p)}$$

$\blacksquare$

$\boxed{M3}$

a) Dimostrare che $\exists\, a \neq b$ tale che $P(x)$ bilanciato $\forall x \in \{1, \ldots 50\}$

$P(x) = (x-a)(x-b)$

$\forall x$ in $\{1,2,\ldots 50\}$ $\begin{cases} \text{Se } x-a \text{ bilanciato, } x-b \text{ deve essere bilanciato} \\ \text{Se } x-a \text{ no bilanciato, } x-b \text{ dev'essere non b.} \end{cases}$

Definiamo $f: \mathbb{Z} \to \{0,1\}$

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è bilanciato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc} 1-a & a & 50 & -a \\ & = & & \\ 1-b & a & 50 & -b \end{array}$$

Abbiamo solo 2^{50} stringhe diverse ma infinite "traslazioni" dei nostri 50 numeri

b) Se $P(n)$ bilanciato $\forall n$, allora $a=b$

$$P(n) = (n-a)(n-b)$$

$\underline{n = 2b - a}$ $\qquad P(n) = (2b-2a)(b-a)$

$$P(n) = 2(b-a)^2$$

$P(n)$ è bilanciato
$(b-a)^2$ è bilanciato $\Rightarrow$ assurdo

Dunque $a=b$

$\boxed{M2}$ $\qquad S = \bigsqcup_{k=1}^{N} [a_k, b_k]$

<u>Fatto</u> possiamo assumere che gli intervalli siano chiusi.

$$(a_k, b_k] \supseteq [a_k+\varepsilon, b_k]$$

lunghezza tot $> 1+\delta$

<u>Fatto 2</u> se $b_k \geq a_k + 1$, allora troviamo in $[a_k, b_k]$ due numeri a distanza intera

Quindi WLOG $b_k < a_k + 1$

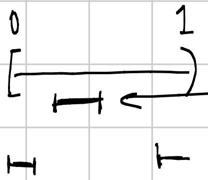
Vogliamo $t, r \in S$ t.c. $\overset{t - \lfloor t \rfloor}{\overset{\shortparallel}{\{t\}}} = \{r\}$

↳ parte frazionaria

Idea: spostarci su $[0,1)$ prendendo la parte frazionaria di $t \in S$

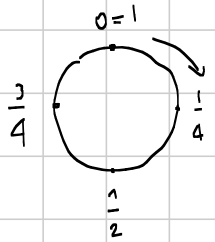
$$\{\{t\} : t \in S\} \subseteq [0,1)$$

$[a_k, b_k] \rightsquigarrow$

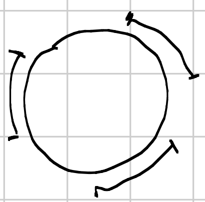


se $\{a_k\} < \{b_k\}$

altrimenti



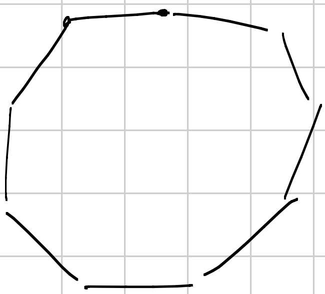
$\{\{t\} : t \in [a_k, b_k]\}$ sono un intervallo su $\bigcirc$ di lunghezza $= [a_k, b_k]$.



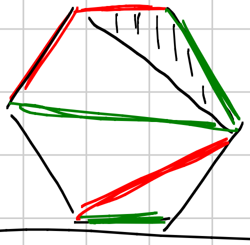
$\longrightarrow$ intervalli disgiunti di lunghezza >1

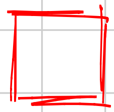
ASSURDO!

$\boxed{M4}$



colorazioni dei lati esterni t.c. possono essere completate ad una colorazione patriottica.

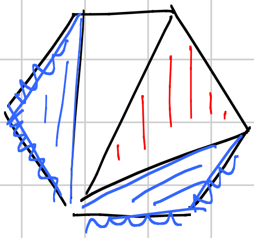




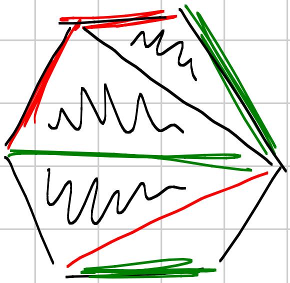
No!

Thm Data una triangolazione di un poligono (regolare) $\exists$ 2 orecchie

Dim X induzione



$\checkmark$



	#R	#B	#V
mosse possibili	-1	$+1$	-1
	1	-1	-1
	-1	-1	$+1$

Alla fine

$\#R = \#B = \#V = 1.$

3	1	1	disp
-1	$+1$	-1	
2	2	0	pari
1	1	1	disp

PARITÀ