C-ADVANCED

$\boxed{C1}$

K-esimo salto della forma $(1,K)$
Per quali n posso tornare a $(0,0)$ con n salti?

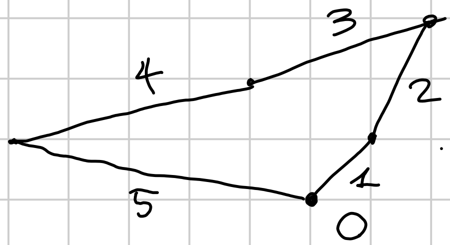
Risposta: $n \equiv 0\ (4)$ e $n \equiv 1\ (4)$ e $n \neq 1$

$(1,K),\ (1,-(K+1)),\ (-1,-(K+2)),\ (-1,K+3)$

<u>OSS 1</u> Con 4 salti cons. torno dov'ero

<u>OSS 2</u> Se n funziona allora $n+4$ funziona

0 funziona $\Rightarrow$ $4n$ funziona



5 funziona,
$\Rightarrow$ $5+4n$ funziona

Ci restano i casi $n \equiv 2,3\ (4)$

Consideriamo la somma delle coordinate del punto dove si trova la cavalletta modulo 2

1°	2°	3°		
0	1	0	1	...

0 1 1 0 0 1 1 0 0

$\boxed{C2}$ n pesetti, di pesi $x_1, \dots, x_n$ interi positivi
$\sum x_i = 2018$
Qual è il massimo n per cui $\exists\, x_1, \dots, x_n$ non divisibili in due gruppi equipesanti?

Risposta: 1009

Esempio 1 $\quad x_i = 2 \quad \forall i$

Esempio 2 $\quad x_1 = 1010 \qquad x_i = 1 \quad \forall i \neq 1$

Supponendo $n \geq 1010$ dimostriamo che si possono dividere in due gruppi equipesanti.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ \dots \\ x_1 + \dots + x_n \end{array}\right] \geq 1010$$

modulo 1009 due di queste sono uguali (la k-esima e la j-esima) $(k<j)$

$$\underbrace{x_{k+1} + \dots + x_j}_{K} \equiv 0 \ (1009)$$

$0 < K < 2018$ (non ho x_k, e ho x_j)

$\Rightarrow K = 1009$

Questo ci dà una divisione

dim 2

$x_1 \ge x_2 \ge \dots \ge x_n$ $\qquad n \ge 1010$

Algoritmo

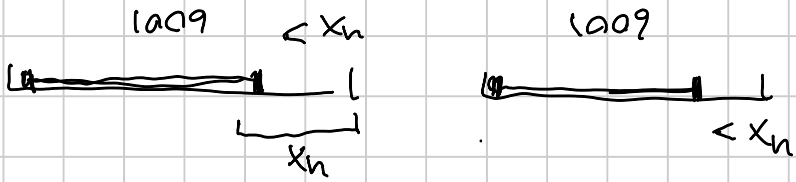
Ho due scatole che possono ospitare un peso massimo di 1009

Al passo k:
- prendo x_k
- se sta nella 1ª scatola lo metto lì
- se no, se sta nella 2ª ce lo metto
- se no non posso dividere i pesi usando questa procedura e mi fermo

Se l'algoritmo non si ferma mai alla fine produce una divisione

Quindi ci basta mostrare che per $k=1,\dots,n$ x_k sta in almeno una scatola.

Supponiamo per assurdo che x_n non stia in nessuna scatola al passo n



$$\le 2\left\lfloor \frac{1009}{x_n} \right\rfloor + x_n - 1$$

$$\le 2 \cdot \frac{1009}{x_n} - 1 + x_n - 1 \overset{?}{<} 1010$$

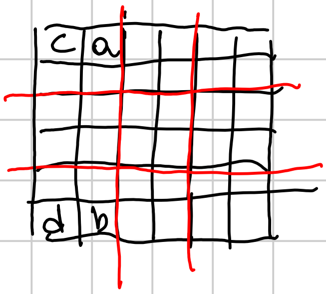
$$2 \cdot \frac{1009}{x_n} + x_n \overset{?}{<} 1012 \qquad \begin{matrix} x_n \ge 2 \\ x_n \le 1009 \end{matrix}$$

Devo provare solo gli estremi per x_n perché sto massimizzando una somma di due addendi a prodotto fisso. □

C3

$n \geq 4$ pari, tabella $n \times n$

- se una casella ha un 2, almeno 2 vicini hanno un 1
- " " " " 3 " 3 vicini hanno un 1
- se è 4, tutti i vicini sono 1



Trovare la somma massima

Soluzione 1

Dividiamo la tabella in quadratini $2 \cdot 2$ (n pari).
Ci sono $\frac{n^2}{4}$ caselle $2 \cdot 2$.

$$\text{Somma voluta} = \Sigma_0 = \boxed{\sum \boxplus}$$

4	1
1	4

Caso 1: c'è un 4. Allora al massimo somme $\boxplus = 10$

3	1
3	3

Caso 2: no 4, c'è 3. Al massimo somma $\boxplus = 10$

2	2
2	2

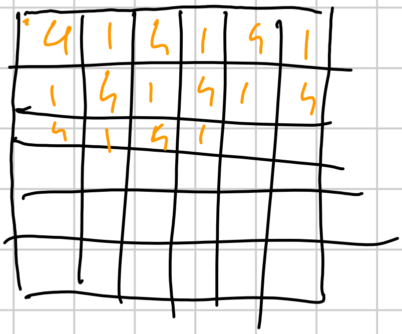
Caso 3: solo 2 e 1
somma $\boxplus < 10$

$$\sum \boxplus \leq \frac{n^2}{4} \cdot 10 = \frac{5n^2}{2}$$

di $\boxplus$ nella tabella

max somma di una $\boxplus$

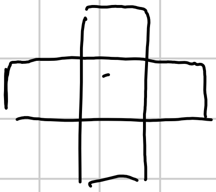
Troviamo l'esempio!



Idea: coloro a scacchiera!

$$\sum_o = 4\cdot\frac{n^2}{2} + 1\cdot\frac{n^2}{2} = \frac{5n^2}{2}$$

Soluzione 2 $\left(\sum_o \le \frac{5n^2}{2}\right)$

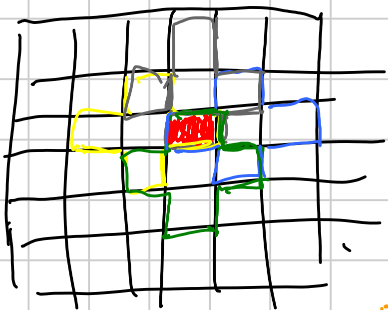


"croci". Ci sono n^2 croci con centri diversi nella tabella

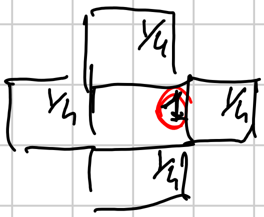
Se consideriamo queste n^2 croci:

1 - ogni casella della scacchiera è centro di esattamente una croce

2 - ogni casella è al "bordo" di 4 croci



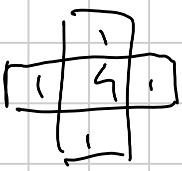
$$\boxed{2\sum_o = \sum \text{croci}}$$



$$1\cdot el + 4\cdot\frac{1}{4}\, el = 2\, el$$

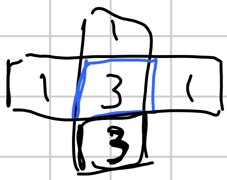
Troviamo la massima somma di una croce:

- Caso 1: ha centro 4:



$\Rightarrow$ somma croce $= 4 + \frac{1}{4}(4) = 5$

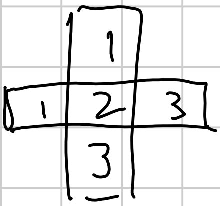
- Caso 2: ha centro 3



$\Rightarrow$ Somma croce $\leq 3 + \frac{1}{4}(6)$

$\leq 3 + \frac{3}{2}$

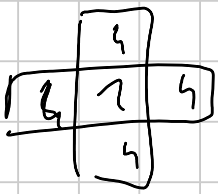
- Caso 3: ha centro 2



Somma croce $\leq 2 + \frac{1}{4}(2+6)$

$\leq 2 + 2$

- Caso 4 ha centro 1



Somma croce $\leq 1 + \frac{1}{4}(16)$

≤ 5

Quindi somma croce è ≤ 5

Sommando sulle n^2 croci, otteniamo $5n^2$

Quindi $\Sigma_0 = \frac{1}{2} 5n^2$

Soluzione 3 (lunr)

a_1 : # di uni
a_2 : # di 2
a_3 : # di 3
a_4 : # di 4

Sommate sulle croci (senza pesi) e sfruttare

(1) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = n^2$

(2) $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = \Sigma_0$

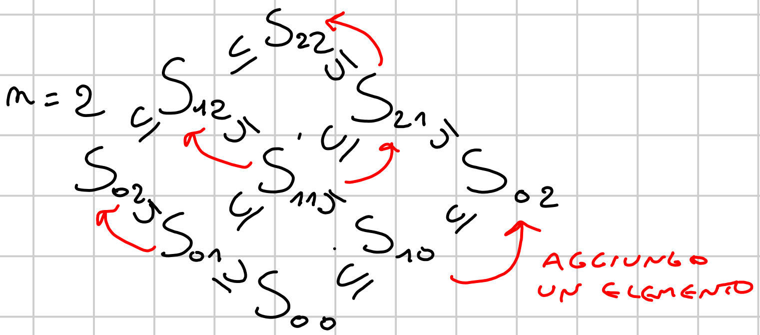
$\boxed{C4}$ $S = \{1, 2 \dots 2m\}$

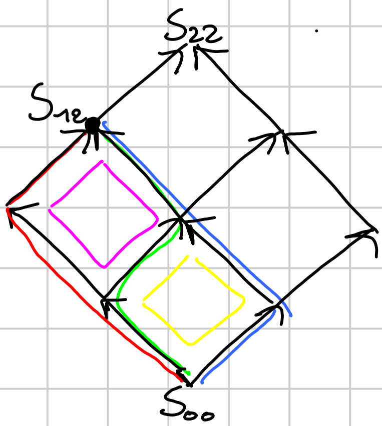
$\forall\, i, j$ t.c. $0 \le i, j \le m$ SCELGO $S_{ij} \subseteq S$

$|S_{ij}| = i + j$

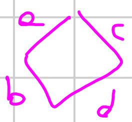
$i \le k \quad j \le l \qquad S_{ij} \subseteq S_{kl}$.

<u>OSS</u> $S_{00} = \{\}$ $\qquad S_{mm} = S$





AD OGNI ↗ AGGIUNGO UN ELEMENTO



a, b DEVONO ESSERE c, d

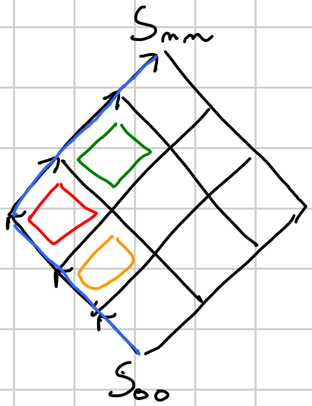
⇒ ROSSO E BLU DANNO LO STESSO INSIEME

e, f DEVONO ESSERE g, h

⇒ VERDE E BLU DANNO LO STESSO INSIEME

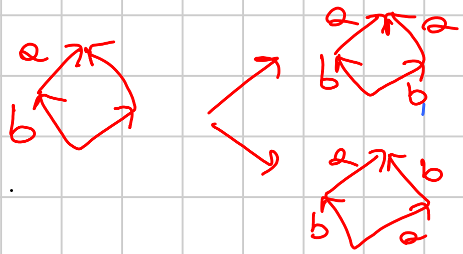
DEVO RISPETTARE:

- NON POSSO AGGIUNGERE LO STESSO ELEMENTO PIÚ VOLTE
- OGNI ◇ DEVE AVERE GLI ELEMENTI "GIUSTI"

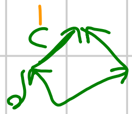


AD OGNI FRECCIA ASSEGNAMO UN ELEMENTO

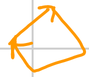
$(2n)!$ MODI



2 MODI



2 MODI



2 MODI

AD OGNI QUADRATO MOLTIPLICO PER 2:

$(2n)! \cdot 2^{n^2}$ MODI PER SCEGLIERE GLI S_{ij}