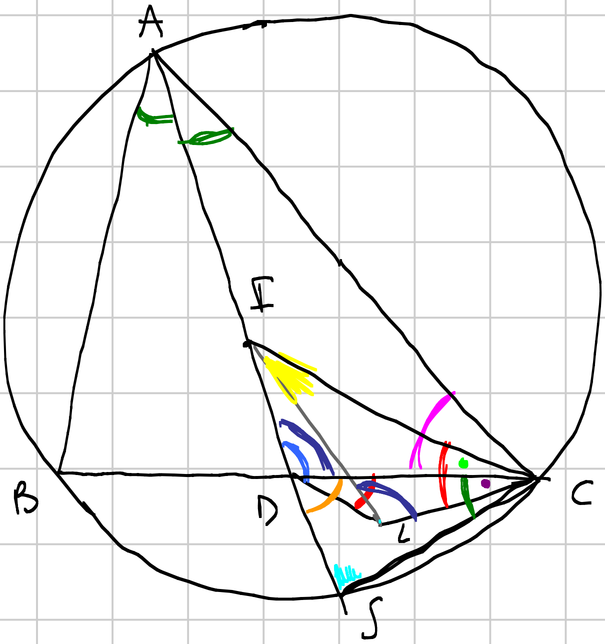
EGMO Camp 2019 – Geometria

Note Title 01/11/2019

G1

a)



Tesi: $CL = IL$

$\alpha = \angle BAC$

$\beta = \angle CBA$

$\gamma = \angle ACB$

$$\angle LCI = \angle LCD + \angle DCI = \frac{1}{2}\angle SCD + \gamma/2$$

$$\Rightarrow \boxed{\angle LCI = \frac{\alpha}{4} + \gamma/2}$$

$$\angle SDC = \boxed{\alpha/2 + \gamma} \Rightarrow \frac{1}{2}\angle SDC = \angle LCI$$

$$\Rightarrow \boxed{\angle LDC = \angle LCI}$$

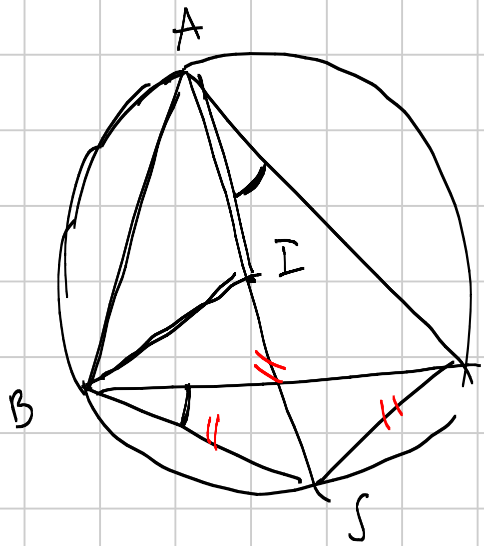
Quindi la Tesi equivale a mostrare DLCI ciclico.

$$= \angle CDA + \angle LDC = \beta + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\gamma}{2}$$

Ma ora $+$ $= \left(\beta + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) + \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) = \pi$ $\blacksquare$

Altra soluzione

- Lemma:



Tesi: S è circocentro di ΔBIC

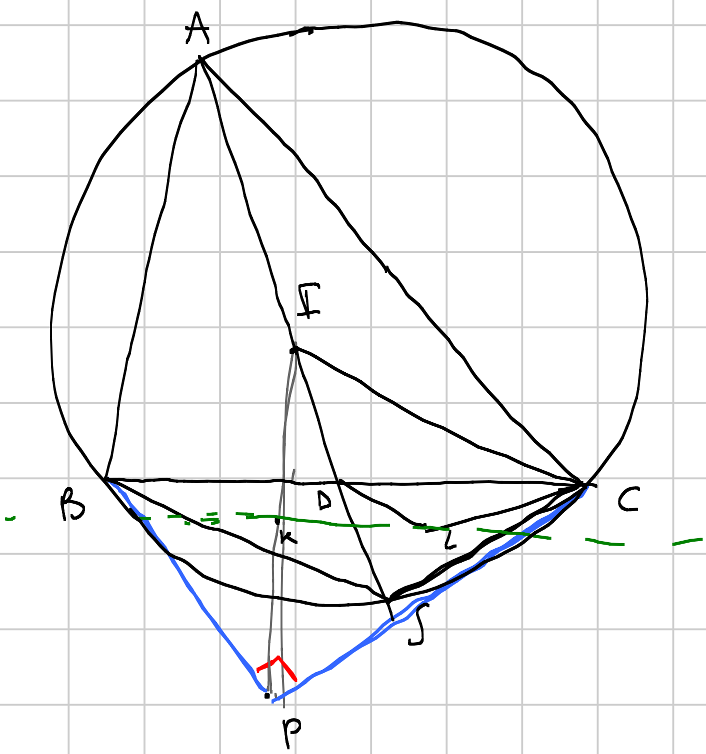
Dim $\angle BIS = \frac{\alpha}{2} + \beta/2$

$\angle SBI = \angle SBC + \angle CBI$
$= \alpha/2 + \beta/2$

$\Rightarrow \Delta BIS$ isoscele

Analogo ΔSIC isoscele $\Rightarrow$ chiude $\square$

(Dimostro che L sta sull'asse di BC)



Dalle parte a) : • $DLIC$ ciclico γ_1

• $IL = LC$

• $BIDK$ ciclico γ_2

• $IK = KB$

P sym di I wrt KL

$\Rightarrow PK = KI \Rightarrow PK = KI = KB$ (1)

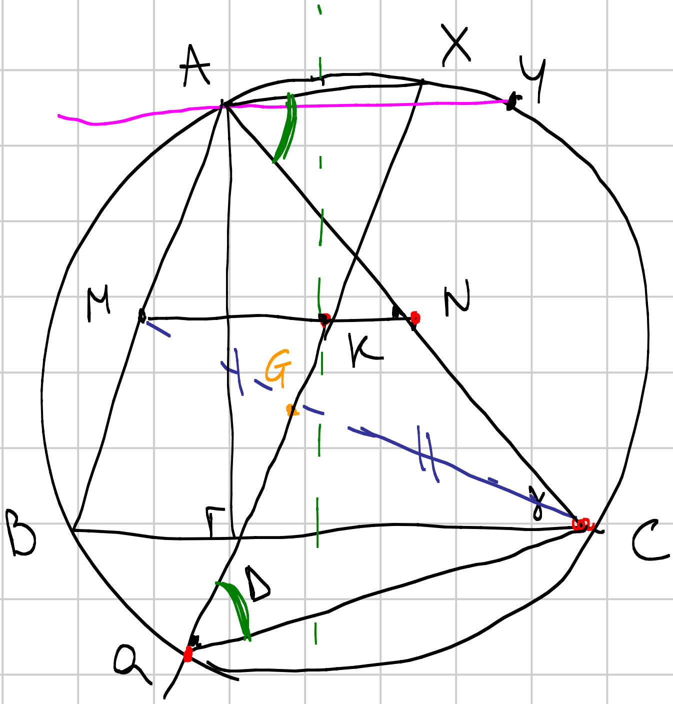
$\Rightarrow PL = LI \Rightarrow PL = LI = LC$ (2)

• (1) ci dice che K è circocentro di $\triangle PIB$

• (2) L è circocentro di $\triangle PIC$

$$\angle CPB = \angle CPI + \angle IPB$$
$$= \frac{1}{2}\angle CLI \quad \frac{1}{2}\angle IKB$$
$$= \frac{1}{2}\angle CDI + \frac{1}{2} BDI = \frac{1}{2}(\angle CDI + \angle IDB) = \frac{1}{2}\pi$$

$\boxed{G2}$



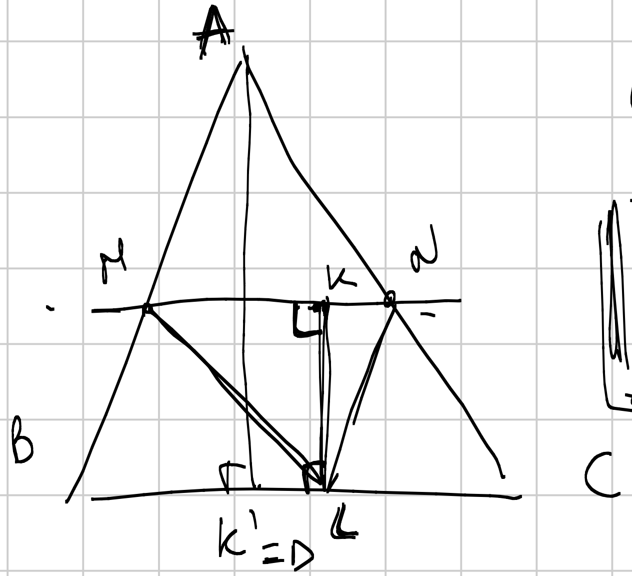
Tesi: $KNCQ$ ciclico

Def Y t.c.
$AY \parallel BC$, $Y \in \odot \triangle ABC$

"Euristica": Dimostro che $\angle CQK = \angle A\hat{N}K$ (γ)
$\Rightarrow$ la tesi diventa dimostrare
$BC \parallel AX$

Idea: Omotetia di centro G e fattore -2
(perché $M \to C$
$N \to B$)

Def Y come sopra e dimostriamo che
Y, K, Q sono allineati.



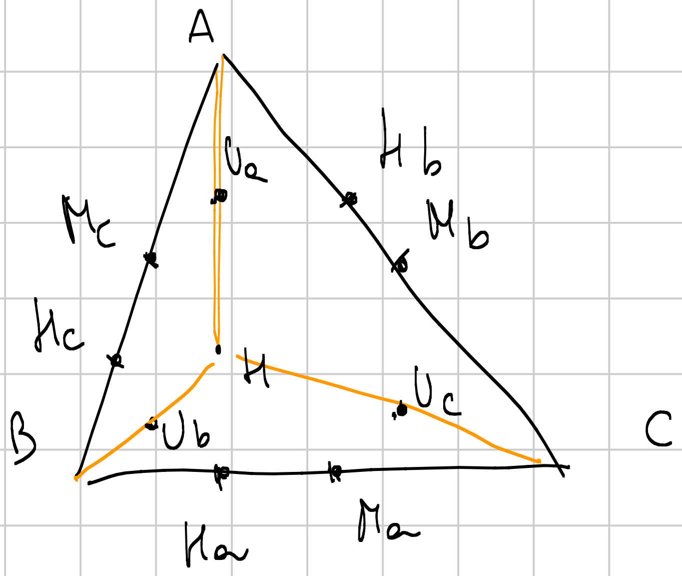
Con l'omotetia,
$\triangle LMN \to \triangle ABC$

$\boxed{\text{In particolare } \odot LMN \to \odot ABC}$

$K \to D$

Ci serve dimostrare che $D \to Y$

$\odot LMN =$ Feuerbach di $\triangle ABC$



$D \in \odot LMN \Rightarrow D' \in \odot ABC$

Ovvero conserva parallelismi e $DL \parallel BC$

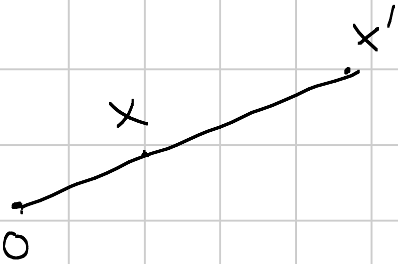
Ora $L \to A$

e $AD' \parallel BC$ e $D' \in \odot ABC$

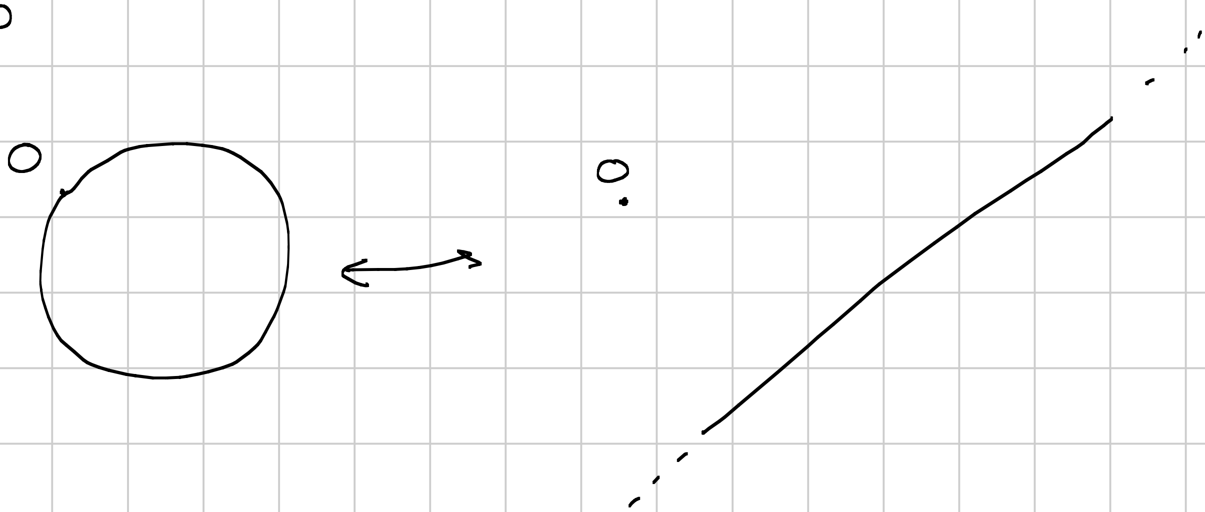
$\Rightarrow D' = Y$!

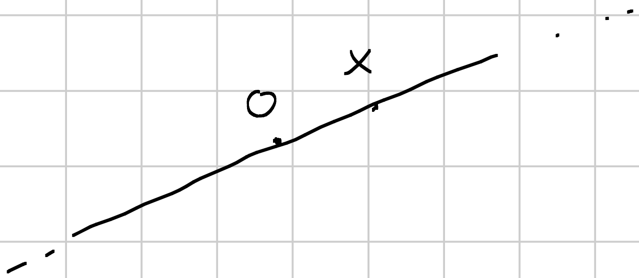
$\Rightarrow Y \equiv X$

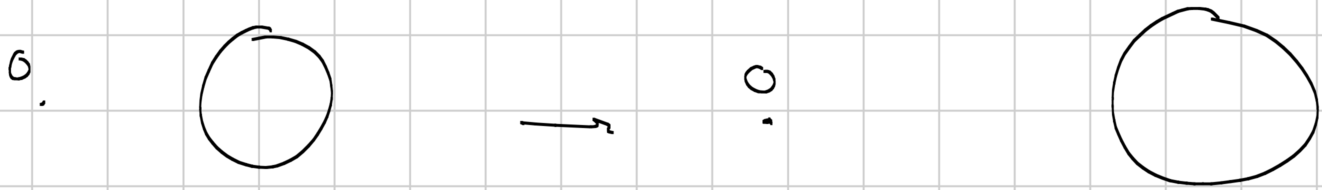
$\blacksquare$

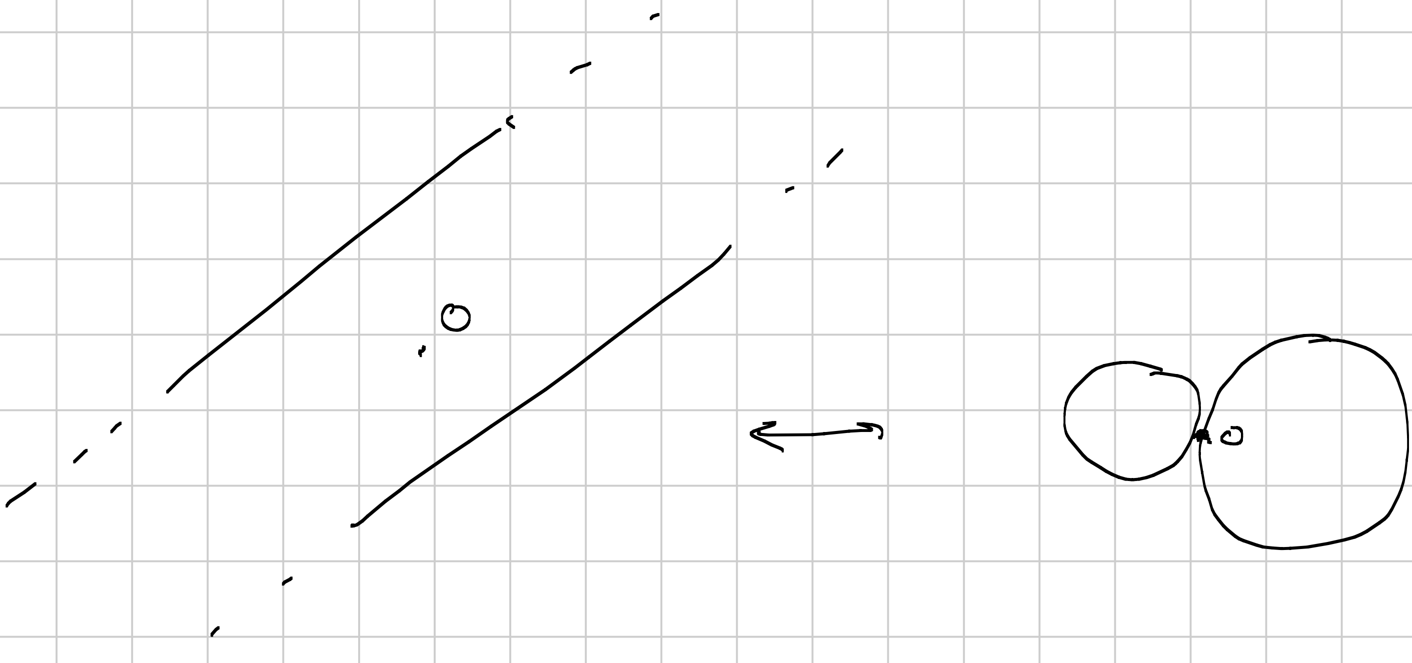


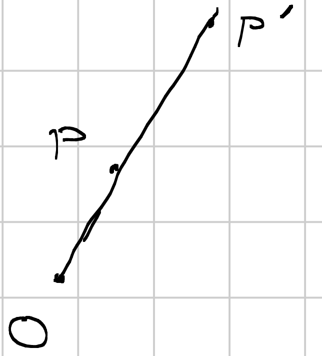
$$OX \cdot OX' = r^2$$





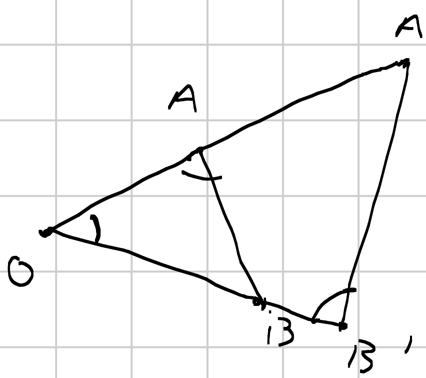






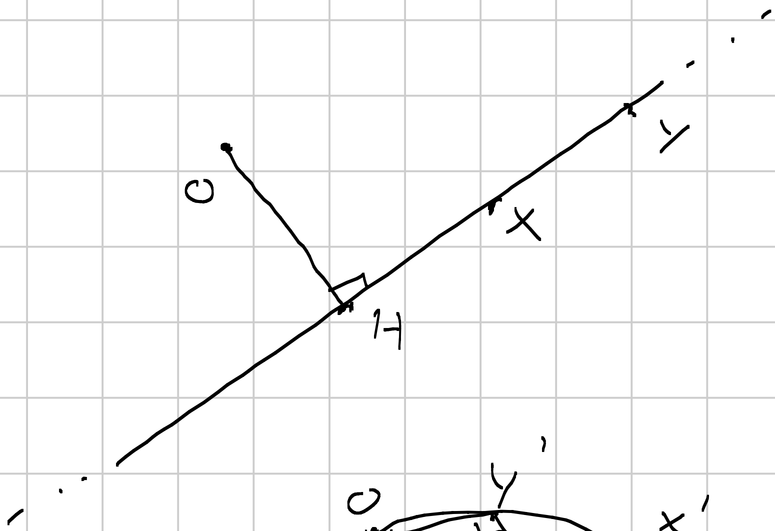
Inversione centro O e raggio r

$$OP \cdot OP' = r^2$$

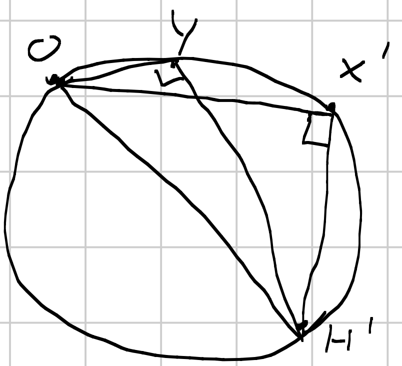


$$O\hat{A}B$$

$$OA \cdot OA' = r^2 = OB \cdot OB' \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}$$

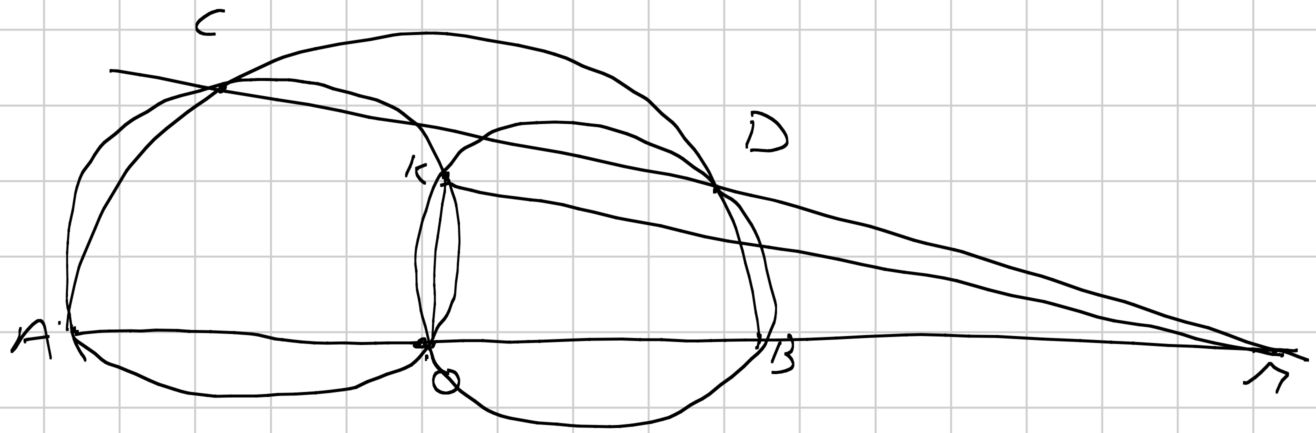


X t.c. $\angle OHX = \frac{\pi}{2}$

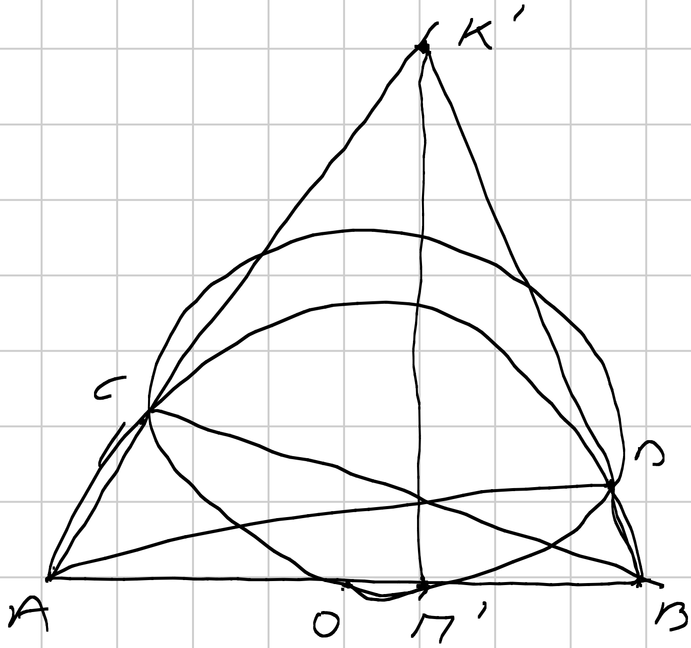


$$\angle OX'H' = \frac{\pi}{2}$$

$\boxed{G3}$



Inversione di centro O e raggio OA



Voglio $\angle OM'K' = \frac{\pi}{2}$

$M' = AB \cap$ Circonferenza per $C, O, D = \Gamma$

$\angle ADB = \angle BCA = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ C, D piedi delle altezze del triangolo A, B, K'.

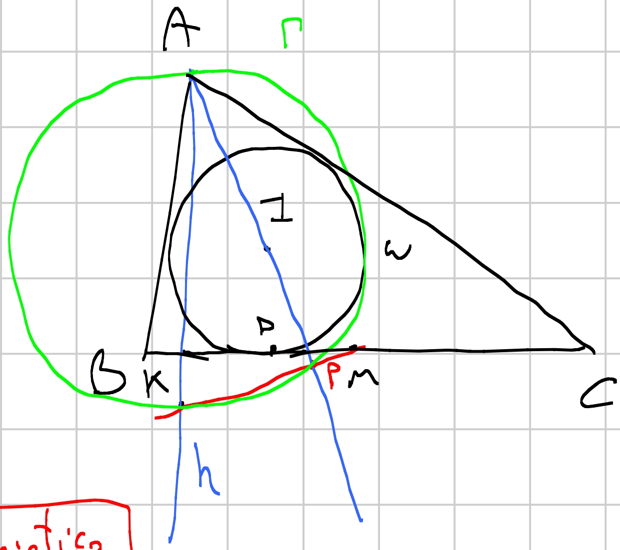
O è il punto medio di AB.

$\Rightarrow$ Γ è la circ. di Feuerbach di ABK'

$\Rightarrow$ M' è piede dell'altezza relativa ad AB

$\Rightarrow$ $K'M'O = \frac{\pi}{2}$

Problema G4



M pt medio di BC

h = altezza da A su BC

$P \in AI$, $PM \perp AP$

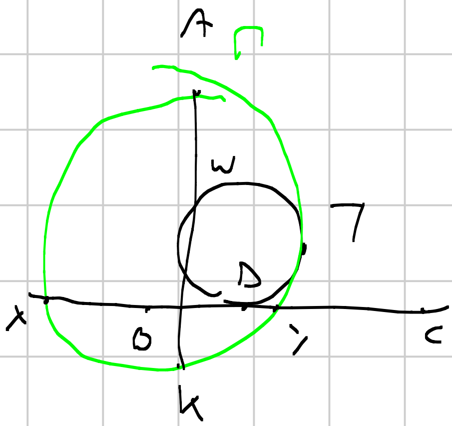
$K = MP \cap h$

Γ = cerchio di diametro AK

Tesi: Γ e ω sono tangenti

Euristica

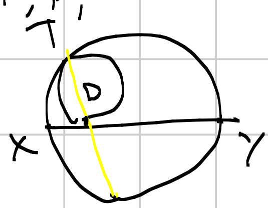
Chi è il punto di tangenza?



T = pt di tangenza tra ω e Γ

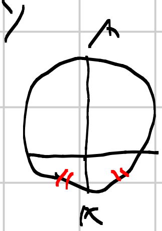
$\Rightarrow$ T, D, K sono allineati

Oss

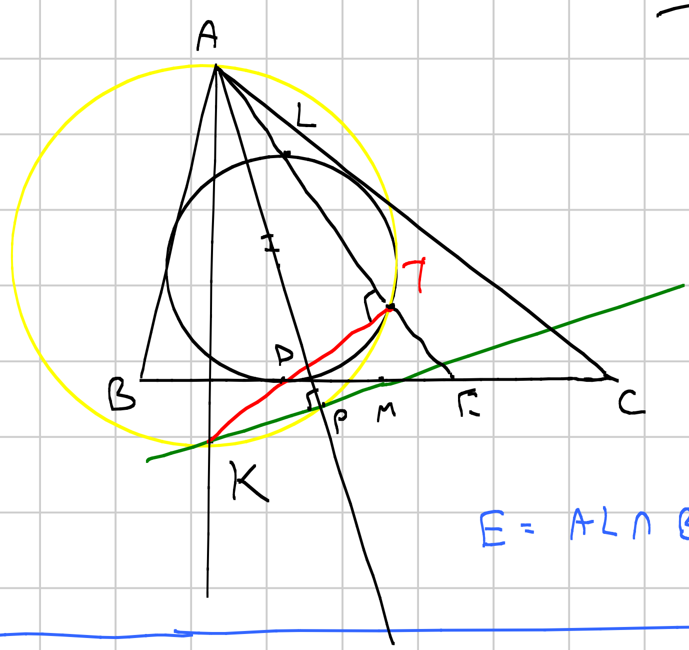


T, D, pt medio dell'arco XY sono allineati

AK diametro $\Rightarrow$ è asse di XY $\Rightarrow$ K è pt medio dell'arco $\widehat{XY}$



Se la tesi è vera, T = pt di tangenza tra ω e Γ sta su KD



$T \in \Gamma \Rightarrow \angle ATK = 90°$ AK diametro
$\angle APK = 90°$

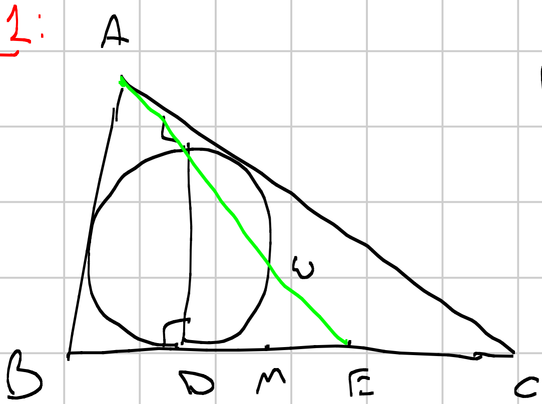
L = diametralmente opposto di D in ω

$\Rightarrow DTL = 90°$

$\Rightarrow A\ L\ T$ allineati

$E = AL \cap BC$, $\angle DTE = 90°$ $DM = ME$

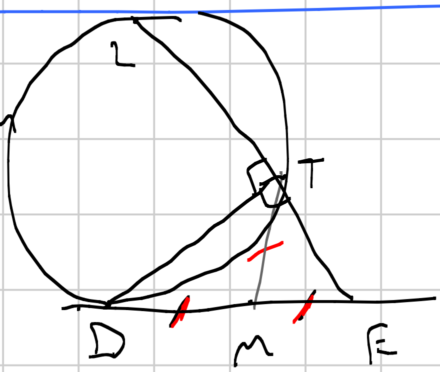
Lemma 1:



$E = AL \cap BC$ M pt medio BC

Tesi del lemma: $MD = ME$

zoom



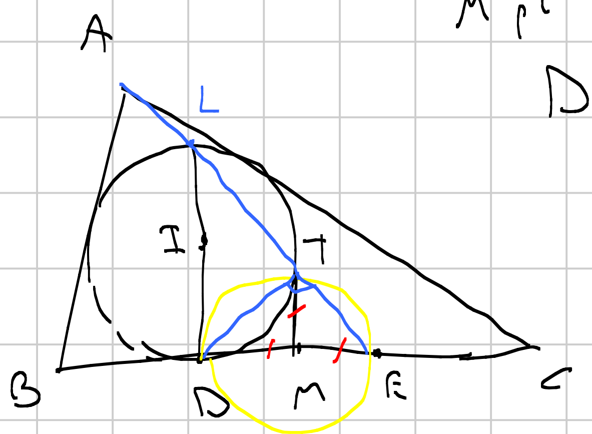
DTE = triangolo rettangolo
$M \Rightarrow$ centro della circonferenza.

$\Rightarrow \boxed{MT = MD} = ME$

$\Rightarrow MT$ tange ω

Se la tesi è vera, allora per forza
- pt di tangenza tra ω e Γ è T
- $KD \cap \omega = T$
- A, L, T, E sono allineati
- MT tange ω

DIMOSTRAZIONE



M p.to medio BC

Definisco T su ω tale che MT tange ω

Tangenti ⇒ MD = MT = ME

Sia E il simmetrico di D rispetto M

C'è una circonferenza di centro M passante per D, T, E

DE diametro ⇒ ∠DTE = 90°

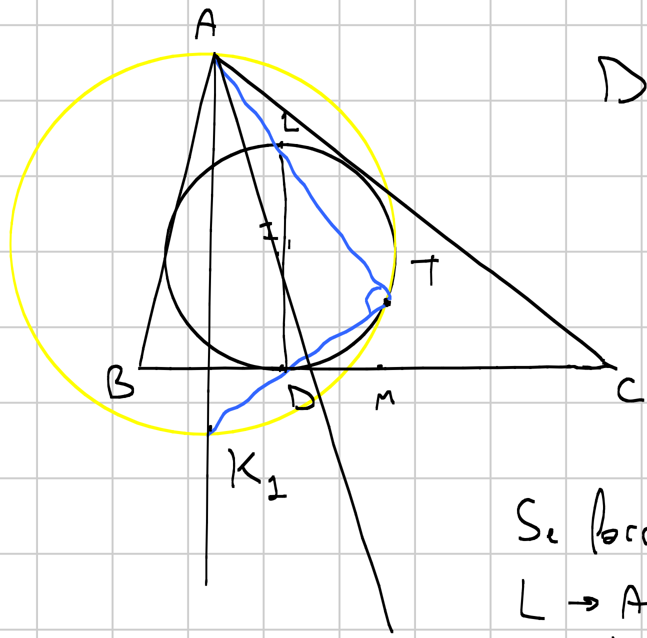
L = TE ∩ ω , siccome ∠DTL = 90° ⇒ DL diametro

⇒ DL ⊥ BC

Per il lemma 1 A, L, E sono allineati

\+

LTE allineati ⇒ A, L, T, E sono allineati



Definisco K_1 = DT ∩ h altezza da A su BC

DL ⊥ BC ⊥ AK

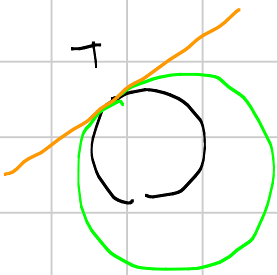
⇒ DL // AK

$\Delta TLD \cong \Delta TAK_1$ sono simili.

Se faccio un'omotetia di centro T

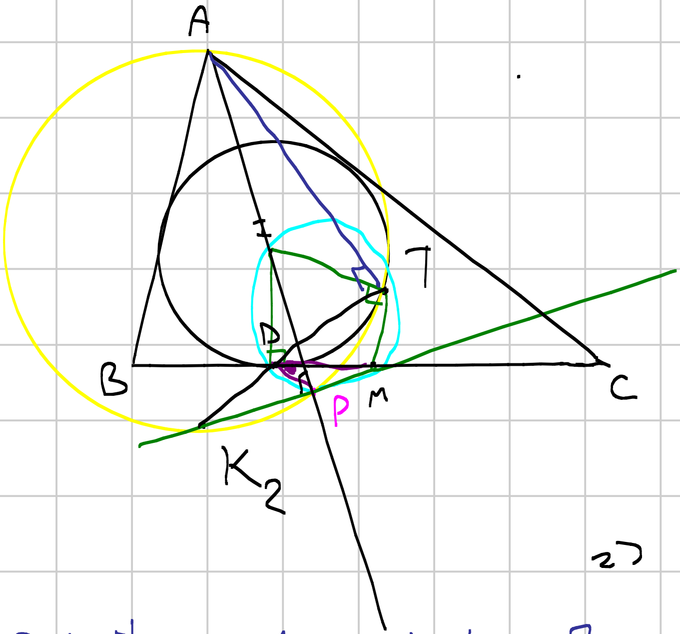
L → A
D → K_1

ω → circonferenza per $A, T, K_1 = \Gamma_1$



Γ_1 e ω sono tangenti

Il testo dice K = h ∩ $\boxed{MP}$ = retta per M ⊥ AI



$K_2 = TD \cap MP$

Voglio A, T, K_2, P ciclici su Γ_2
e Γ_2 tangente a ω in T

So che $\angle ATD = 90°$

$\angle APK_2 = 90$

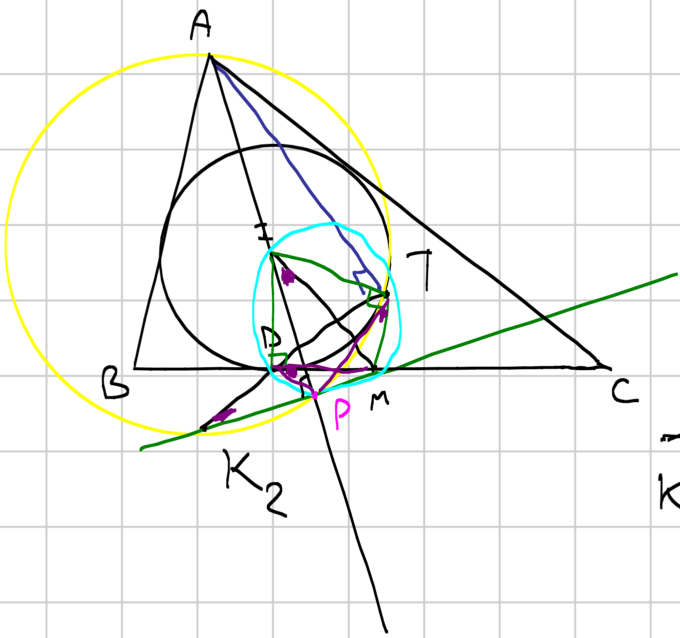
$\Rightarrow A, T, K_2, P$ è ciclico

Dimostriamo che MT tange Γ_2

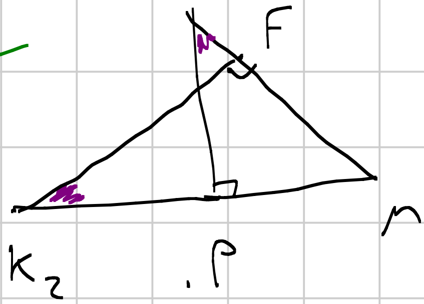
- So che $MDITP$ è ciclico $\begin{cases} \angle MTI = \angle MDI = 90 \text{ in quanto tangenti} \\ \angle MPI = 90° \end{cases}$

circonf. di $MITDP$

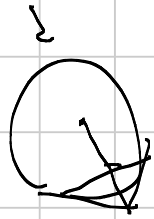
$\angle MDP = \angle MTP = \angle PIM$



I



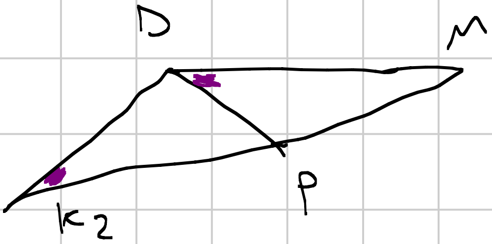
$MI \perp DT$



$F = MI \cap DT$

$\angle K_2FM = 90$

$\angle MK_2T = \angle MIP = \angle MDP$



$\Rightarrow \Delta MPD \sim \Delta MDK_2$

$\dfrac{MD}{MP} = \dfrac{MK_2}{MD} \Rightarrow MP \cdot MK_2 = MD^2$

|| perché MT, MD tangenti

MT^2

$\Rightarrow MT$ tange circonferenza per T, P, K_2

" circonf. per $A, T, P, K_2 = \Gamma_2$

Γ_1 = Cerchio per A, T, K_1 tangente a ω in T

Γ_2 = cerchio per A, T, K_2 tangente a ω in T

$\Gamma_1 = \Gamma_2 \Downarrow K_1 = K_2$

K_1: Altezza $\cap$ TD

$K_2 = TD \cap MP$

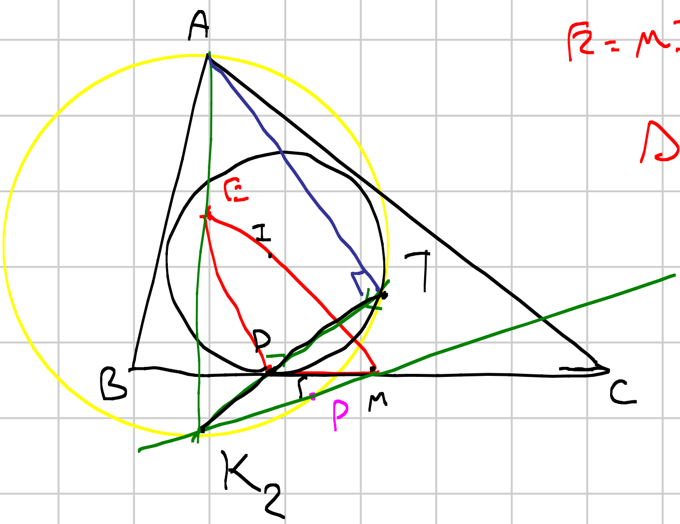
K = Altezza $\cap MP$

$K = K_1 = K_2$

$\square$

Arrivati a K_1; avevamo questo finito

Ci mostra che Altezza, TK, MP concorrono.

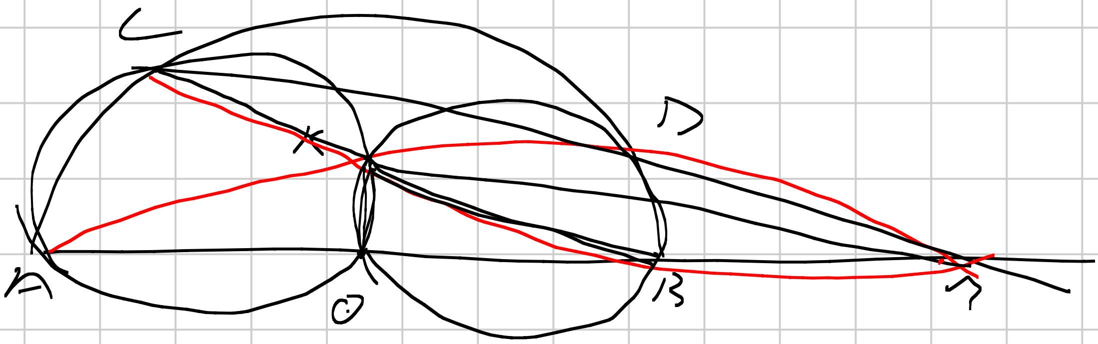


$E = MI \cap h$

ΔEDM

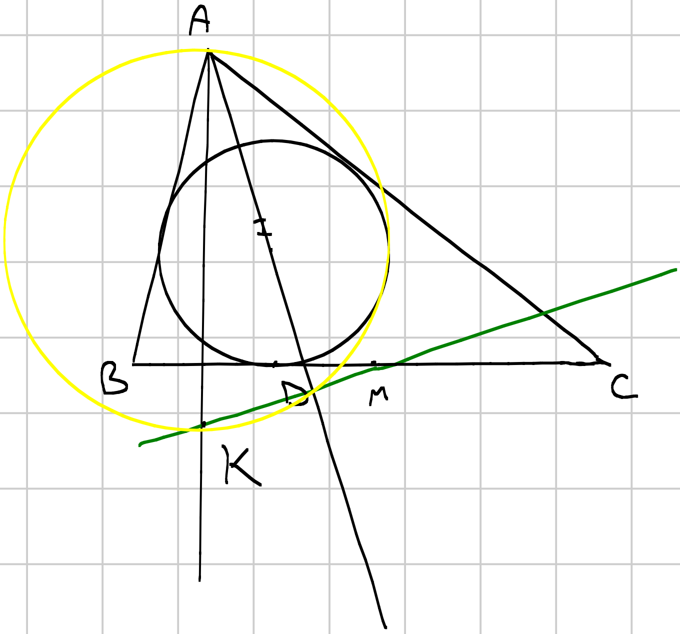
le altezze di EDM sono le rette che dovevo concorrere.

Altra dimostrazione



MBKC e MDKA ciclici

$\angle OKM = \angle OKB + \angle BKM$ poi conti con angoli


A
I
B
D
M
C
K