EGMO Camp 2019 - Miscellanea

$\boxed{M1}$

$$\sum_{\substack{1\le p<q\le n\\ (p,q)=1\\ p+q>n}} \frac{1}{pq} = \frac{1}{2} \qquad n>1$$

Passo base: $n=2$ $\qquad (p,q)=(1,2)$

Dimostriamo che $n-1 \Rightarrow n$

$$\Sigma_n = \sum_{(p,q)\in S_n} \frac{1}{pq}$$

In Σ_n conto tutte le coppie di Σ_{n-1} tranne quelle con $p+q=n$

In Σ_{n-1} conto tutte le coppie di Σ_n tranne quelle con $q=n$

$$\Rightarrow \quad \Sigma_n = \Sigma_{n-1} - \underbrace{\sum_{\substack{p+q=n\\ (p,q)=1\\ 1\le p<q\le n-1}} \frac{1}{pq}}_{\{p\le n/2\}} + \underbrace{\sum_{\substack{q=n\\ (p,q)=1\\ 1\le p<n}} \frac{1}{pq}}_{\{p<n\}}$$

$$\Sigma_n = \underbrace{\boxed{\Sigma_{n-1}}}_{=\frac{1}{2}} \underbrace{- \sum_{\substack{(p,n-p)=1\\ 1\le p<n-p}} \frac{1}{p(n-p)} + \sum_{\substack{(n,p)=1\\ 1\le p<n}} \frac{1}{np}}$$

Mostriamo $\displaystyle \sum \frac{1}{p(n-p)} = \sum \frac{1}{np}$

$(p, n-p) = 1 \quad e \quad (n, p) = 1$

$$\frac{1}{np} + \frac{1}{n(n-p)} = \left(\frac{n}{p(n-p)}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{p(n-p)}$$

$\blacksquare$

$\boxed{M3}$

a) Dimostrare che $\exists\, a \neq b$ tale che
$P(x)$ bilanciato $\forall x \in \{1, \dots 50\}$

$$P(x) = (x-a)(x-b)$$

$\forall x$ in $\{1, 2, \dots 50\}$ $\begin{cases} \text{se } x-a \text{ bilanciato, } x-b \text{ deve essere bilanciato} \\ \text{se } x-a \text{ no bilanciato, } x-b \text{ dev'essere non b.} \end{cases}$

Definiamo $f: \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è bilanciato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} 1-a & a & 50-a \\ & = & \\ 1-b & a & 50-b \end{array}$$

Abbiamo solo 2^{50} stringhe diverse ma infinite "traslazioni" dei nostri 50 numeri

b) Se $P(n)$ bilanciato $\forall n$, allora $a = b$

$$P(n) = (n-a)(n-b)$$

$n = 2b - a$

$$P(n) = (2b-2a)(b-a)$$

$$P(n) = 2(b-a)^2$$

$P(n)$ è bilanciato
$(b-a)^2$ è bilanciato $\Rightarrow$ assurdo

Dunque $a = b$

$\boxed{M2}$

$$S = \bigsqcup_{k=1}^{N} [a_k, b_k]$$

Fatto possiamo assumere che gli intervalli siano chiusi.

$$(a_k, b_k] \supseteq [a_k+\varepsilon, b_k]$$

lunghezza tot $> 1+\delta$

Fatto 2 se $b_k \geq a_k + 1$, allora troviamo in $[a_k, b_k]$ due numeri a distanza intera

Quindi WLOG $b_k < a_k + 1$

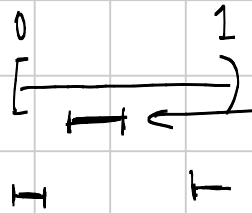
Vogliamo $t, r \in S$ t.c. $\underbrace{\{t\}}_{\substack{\| \\ t - \lfloor t \rfloor}} = \{r\}$

↳ parte frazionaria

Idea: spostarci su $[0,1)$ prendendo la parte frazionaria di $t \in S$

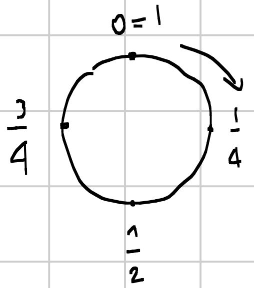
$$\{\{t\} : t \in S\} \subseteq [0,1)$$

$[a_k, b_k] \rightsquigarrow$

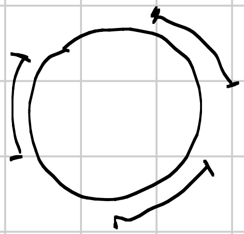


se $\{a_k\} < \{b_k\}$

altrimenti



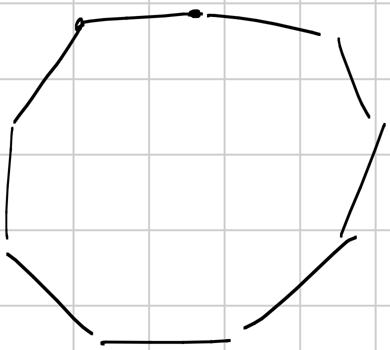
$\{\{t\} : t \in [a_k, b_k]\}$ sono un intervallo su ○ di lunghezza $= [a_k, b_k]$.



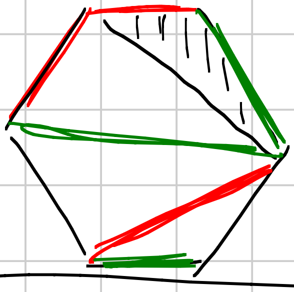
$\longrightarrow$ intervalli disgiunti di lunghezza > 1

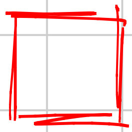
ASSURDO!

$\boxed{M4}$



colorazioni dei lati esterni t.c. possono essere completate ad una colorazione patriottica.

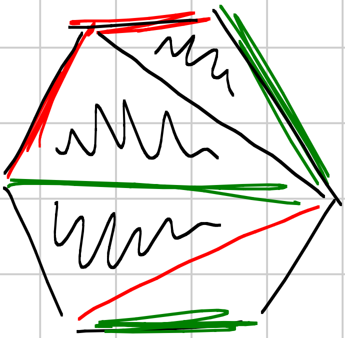




No!

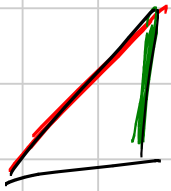
Thm Data una triangolazione di un poligono (regolare) $\exists$ 2 orecchie

Dim X induzione



mosse possibili	#R	#B	#V
	-1	$+1$	-1
	1	-1	-1
	-1	-1	$+1$

Alla fine



$\#R = \#B = \#V = 1$.

$3 \quad 1 \quad 1$ disp

$-1 \quad +1 \quad -1$

$2 \quad 2 \quad 0$ pari

$1 \quad 1 \quad 1$ disp

PARITÀ