COMBINATORIA BASIC

Note Title 31/10/2019

PIGEONHOLE

Enunciati

- "$k+1$ piccioni, k buchi" $\Rightarrow \exists$ buco con almeno 2 piccioni.
- "$mk+1$ piccioni, k buchi" $\Rightarrow \exists$ buco con almeno $m+1$ piccioni

IMPLICAZIONI ABUSIVE

"$k+2$ piccioni, k buchi" $\cancel{\Rightarrow}$ • c'è almeno un piccione in ogni buco

• ci sono almeno 3 piccioni in una buca.

Esempio

55 numeri $\in \{1, \dots, 100\} \overset{?}{\Rightarrow} \exists$ almeno 2 numeri a distanza 9

OSS: 18 interi consecutivi, quanti ne posso scegliere in modo che possano non esserecene 2 a distanza 9?

Possibili resti della div per 9: $\underbrace{0, \dots, 8}_{9 \text{ numeri}}$

Per PG se ne scelgo 10 allora almeno 2 danno lo stesso resto div. per 9.

$18 \cdot 5$

$1, \dots, 18 \mid 19, \dots, 36 \mid \dots\, 90 \mid 91, 92, \dots, 100$

$\underbrace{1, \dots, 18}_{\text{al più } 9}$ $\underbrace{19, \dots, 36}_{\text{al più } 9}$

blocchi

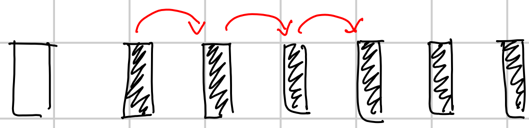
$\Rightarrow$ POSSO SCEGLIERE $9 \cdot 6 = 54$

Per PG ci sarà almeno un blocco con 10 numeri

INDUZIONE

Una proprietà $\forall n \in \mathbb{N}$ da dimostrare $\rightarrow P(n)$

IDEA: "Se dimostro "$P(n) \Rightarrow P(n+1)$" ho quasi finito"

$\Rightarrow$ 

n_0

PASSO BASE: lo dimostro per n_0 $P(n_0)$

PASSO INDUTTIVO: DIMOSTRO "$P(n) \Rightarrow P(n+1)$"

Esempio

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Esercizio: $\dfrac{n(n+1)}{2}$ è intero.

DIM

- DICHIARARE L'INDICE SU CUI SI FA INDUZIONE
- PASSO BASE: $n_0 = 1$

$$1 \overset{?}{=} \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

- PASSO INDUTTIVO: ASSUMIAMO

"$P(n)$: $1 + 2 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$"

IPOTESI INDUTTIVA

VOGLIO DIMOSTRARE

$$\text{“}P(n+1): \quad 1+2+\dots+n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\text{”}$$

$$\underbrace{1+2+3+\dots+n}_{\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$(n+1) \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)}{\cancel{2}}[\cancel{n}+\cancel{2}-\cancel{n}] = n+1 \quad \boxed{\checkmark}$$

Esempio (del passo base)

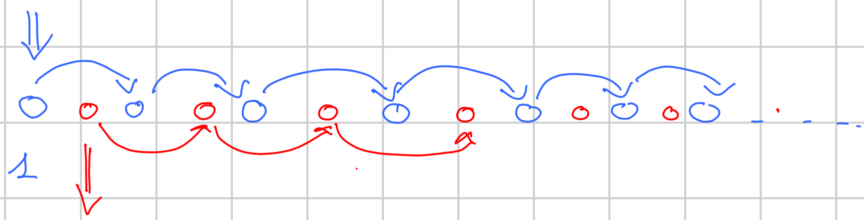
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 3 \nmid 5^n - 1$$

DIM

PASSO INDUTTIVO: Assumo che $3 \nmid 5^n - 1$ e mi chiedo $3 \nmid 5^{(n+2)} - 1$? $\quad P(n) \Rightarrow P(n+2)$

$$5^{n+2} - 1 = 25\underbrace{(5^n - 1)}_{\text{non è multiplo di 3}} + \underbrace{24}_{\text{è multiplo di 3}} \Rightarrow 3 \nmid 5^{n+2} - 1$$

PASSO BASE: $n=1$: $5^n - 1 \underset{n=1}{=} 5 - 1 = 4$



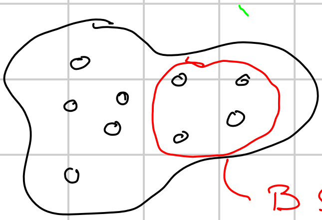
MI MANCA UN PASSO BASE

P.B.: $n=2$ $\qquad 5^n - 1 \underset{n=2}{=} 25 - 1 = 24$

CONTEGGI

* NUMERO DI SOTTOINSIEMI

A



$B \subseteq A$

$|A| = n$

a_1	a_2	$\dots$	a_n
0	0		0
1	1		1
$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$
2	2 per	$\dots$	2 per

$\Rightarrow \quad \#\{\text{sottoinsiemi di } A\} = 2^n$

* ANAGRAMMI

AIUOLE :

$$\underset{6}{\uparrow}\ \underset{5}{\uparrow}\ \underset{4}{\uparrow}\ \dots\ \underset{1}{\uparrow}$$

$\#\{\text{anagrammi AIUOLE}\} = 6!$

NOTAZIONE: $k! = k \cdot (k-1) \cdot \_\_\_ \cdot 1$

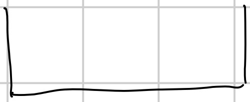
ARA $\qquad \dfrac{3!}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

ARA
AAR
RAA $\longrightarrow$ $A_1RA_2 \qquad A_2RA$

ANAGRAMMI $\qquad \dfrac{9!}{\underset{3 \text{ "A"}}{3!}\ \underset{2 \text{ "M"}}{2!}}$

BINOMIALI

n palline numerate da 1 a n



$$\begin{array}{cccccc} ① & ② & ③ & \dots & ⓝ \\ \underbrace{0 & 0 & 1 & & 1}_{k \text{ "1"} \Rightarrow n-k \text{ "0"}} \end{array}$$

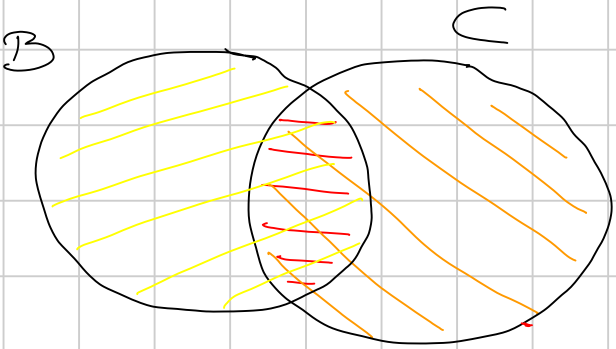
$$\#\{\text{estrazioni di } k \text{ palline}\} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

NOTAZIONE

PRINCIPIO DI INCLUSIONE-ESCLUSIONE (PIE)

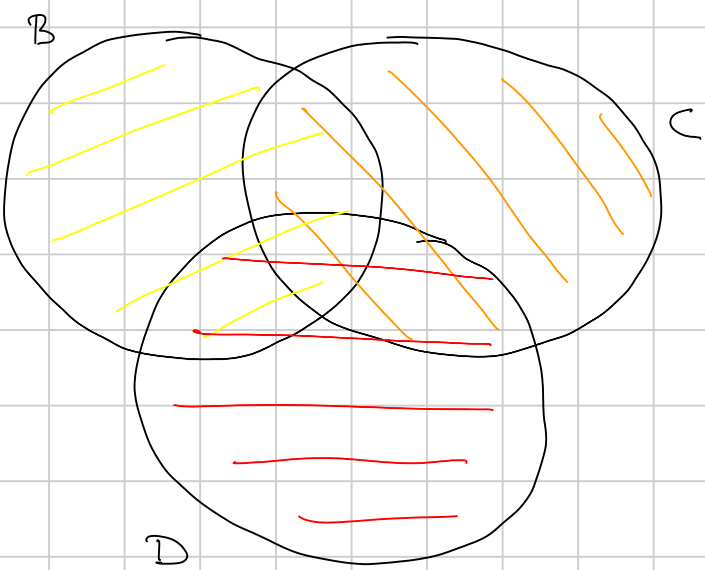
Quanti multipli di 2 o 5 in $\{1, \dots, 100\}$?

$$\underbrace{\#\{\text{mult. di } 2\}}_{\frac{100}{2}=50} + \underbrace{\#\{\text{multipli di } 5\}}_{\frac{100}{5}=20} - \underbrace{\#\{\text{multipli di } 10\}}_{\frac{100}{10}=10} = 60$$



$$A = (B \cup C)$$

$$|A| = |B| + |C| - |B \cap C|$$



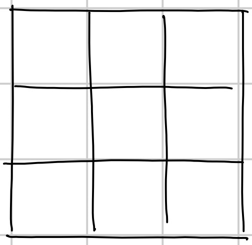
$$A = B \cup C \cup D$$

$$|A| = |B| + |C| + |D| +$$

$$-\left(|B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D|\right) +$$

$$+ |B \cap C \cap D|$$

Esempio

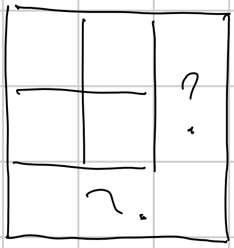
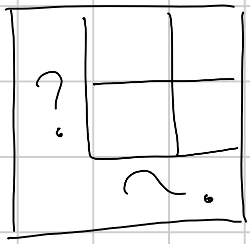


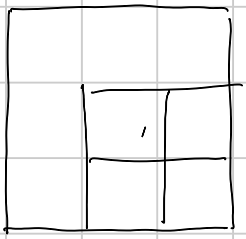
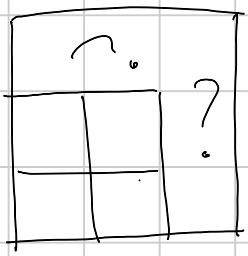
B o N

Quante colorazioni senza sottoquadrati 2×2 bianchi?

DIM

- OSS: $2^9 = \#\{\text{colorazioni totali}\}$

$B_1 =$  $B_2 =$ 

$B_3 =$  $B_4 =$ 

$$A = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$$

$$|A| = |B_1| + |B_2| + |B_3| + |B_4| + \qquad 2^5 \cdot 4$$

$$-\big[|B_1 \cap B_2| + |B_1 \cap B_3| + |B_1 \cap B_4| + \qquad -(4 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2)$$

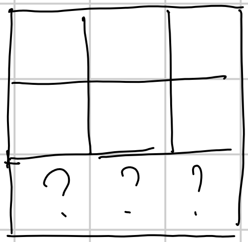
$$+ |B_2 \cap B_3| + |B_2 \cap B_4| + |B_3 \cap B_4|\big] +$$

$$+ |B_1 \cap B_2 \cap B_3| + |B_1 \cap B_2 \cap B_4| + |B_1 \cap B_3 \cap B_4| + \qquad +(2 \cdot 4)$$

$$+ |B_2 \cap B_3 \cap B_4| \quad +$$

$$- |B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4| = 2^5 \cdot 4 - (4 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2) + 8 - 1 \quad - 1$$

$\{B_1 \cap B_2\}$:

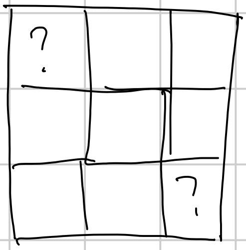


$2^3 \cdot 4$

$\uparrow$

4 intersezioni a 2 a 2

$\{B_2 \cap B_4\}$

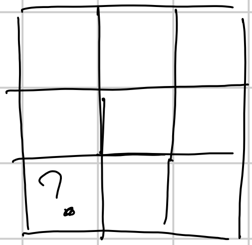


2 intersezioni a 2 a 2

$\downarrow$

$2 \cdot 2$

$B_1 \cap B_2 \cap B_3$

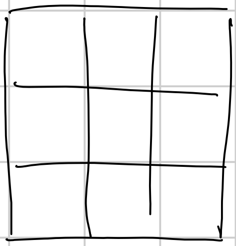


$2 \cdot 4$

$\uparrow$

4 intersezioni a 3 a 3

$B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4$



$1 \cdot 1$

$\uparrow$

1 sola int a 4 a 4

DOUBLE - COUNTING (D-C)

IDEA : Conto in 2 modi diversi una certa Q

$$\underbrace{\quad\dots\quad}_{\text{I modo}} = Q = \underbrace{\qquad\quad}_{\text{II modo}}$$

Esempio

$$\forall n \qquad 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{array}{ccccccc} n+1 & n+1 & \cdots & & & & \\ \uparrow & \uparrow & & & & & \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ \hline n & n-1 & n-2 & n-3 & & 2 & 1 \\ \hline \end{array}}_{n \text{ colonne}}$$

$Q = \{\text{somma delle entrate}\}$

$$2\cdot(1+2+\_\_\_+n) \underset{\text{per righe}}{=} Q \underset{\text{per colonne}}{=} (n+1)\,n$$

Esempio 2.

n persone

ci sono amicizie (simmetriche)

"A è amico di B" $\Rightarrow$ "B è amico di A"

TESI: $\#\{\text{persone con un n. dispari di amici}\}$ è pari

DIM

$$Q = \#\{\text{coppie } (A,B) \text{ tali che } A \text{ è amico di } B\}$$

OSS: (A,B) c'è $\Rightarrow$ (B,A)

$$2\cdot\#\{\text{amicizie}\} = Q = \#\{\text{amici di } A_1\} + \#\{\text{amici di } A_2\} + \dots + \#\{\text{amici di } A_n\}$$

$$= \underbrace{\cdots\cdots}_{\text{numeri pari}} + \underbrace{\cdots}_{\text{numeri dispari}}$$

$\Downarrow$

Ci sono un numero pari di addendi dispari $\Leftarrow$ DEVE ESSERE PARI (perché Q è pari)

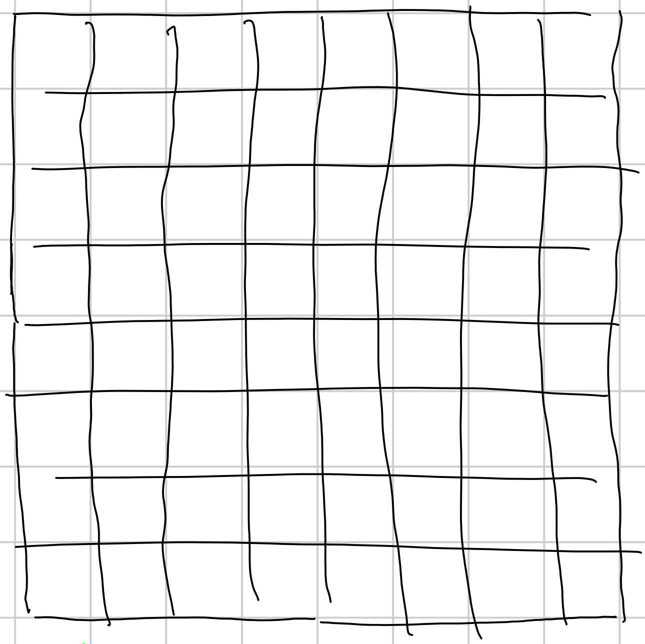
INVARIANTI (STATICHE)

IDEA: situazione dinamica, nuova a causa di mosse

INVARIANTE: una quantità Q che **non** cambia da mossa a mossa

Posso passare da A a B? Se dimostro $Q(A) \neq Q(B)$ mostro che non posso passare da A a B

Esempio 1



B o N a scacchiera

MOSSE:

- invertire una riga
- invertire una colonna
- invertire un sotto quadrato 2×2

DOMANDA: Posso passare dalla col. a scacchiera a $\boxed{B}$?

No! Q = parità del numero di caselle B

È invariante?

1) b caselle B, $8-b$ N $\xrightarrow{\text{MOSSA 1}}$ $8-b$ B, b N $\boxed{\checkmark}$

$8-b$ e b hanno la stessa parità

2) ANALOGO $\boxed{\checkmark}$

3) $\left.\begin{array}{ll} b \text{ caselle} & B \\ 4-b & N \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\text{MOSSA 3}}$ $\left\{\begin{array}{ll} 4-b & B \\ b & N \end{array}\right.$

$4-b$ e b hanno la stessa parità $\boxed{\checkmark}$

Q (inizio) = pari $\neq$ Q (finale) = dispari

Esempio 2

2019	2019	2019
R	B	V

MOSSA: tolgo 2 dello stesso colore e ne riaggiungo 1 per ciascuno degli altri 2 colori

DOMANDA: Posso arrivare a 2018 R 2019 B 2020 V

No!

Q = "la differenza $\#R - \#B$ è multiplo di 3"

- $$(\#R - \#B)_{\text{inizio}} \xRightarrow{\text{MOSSA R}} (\#R' - \#B')_{\text{fine}} = \#R - 2 - (\#B + 1) = (\#R - \#B)_{\text{inizio}} - 3 \quad \boxed{\checkmark}$$
- $$(\#R - \#B)_{\text{inizio}} \xRightarrow{\text{MOSSA B}} (\#R' - \#B') = \#R + 1 - (\#B + 2) = \#R - \#B + 3 \quad \boxed{\checkmark}$$
- $$(\#R - \#B)_{\text{inizio}} \xRightarrow{\text{MOSSA V}} (\#R' - \#B') = \#R + 1 - (\#B + 1) = \#R - \#B \quad \boxed{\checkmark}$$

Q (inizio) = V $\neq$ Q (fine) = F

- **INVARIANTI MONOTONE**: qt. che aumenta o diminuisce sempre

IDEA: Serve a dimostrare che a un certo punto passerò per una certa config.

Esempio

12 gnomi, 1 per mese, ci sono amicizie con case 🟥 🟦
ogni mese lo gnomo ancevato si adatta alla maggioranza dei suoi amici

TESI: A un certo punto nessuno ridipinge più

DIM

$Q = \#\{$coppie di amici con case di colore diverso$\}$

Ad ogni mossa Q diminuisce se ci sono ridipingimenti

Però $Q \geq 0 \implies \#\{$ridiping.$\}$ è finito.

INVARIANTI CONTROLATE: qt. che varia in modo controllato

IDEA: possiamo usarla per stimare il numero di mosse.

Esempio

A e B giocano e n monete in una pila

MOSSA:
- scegliere una pila e toglierla
- dividere una pila in 4, ciascuna con >0 monete

PERDE chi toglie l'ultima moneta; A gioca per primo?

CHI VINCE?

DIM

$Q = \#$pile

Q cambia parità ad ogni mossa

$Q(\text{inizio}) = 1$ $\qquad Q(\text{fine}) = 0$

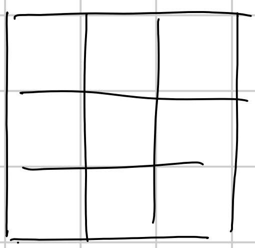
$\#\{$mosse$\}$ è dispari $\implies$ A gioca per ultimo e perde.

Esercizio: dimostrare che il gioco finisce.

COLORAZIONI

IDEA: utile per dimostrare che qualcosa NON si può fare

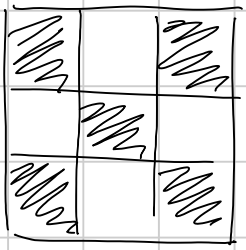
Esempio 1



mettere i $1, \dots, 9$ in modo che n. consecutivi siano in caselle adiacenti.

DOMANDA: che numeri vanno al centro?

DIM

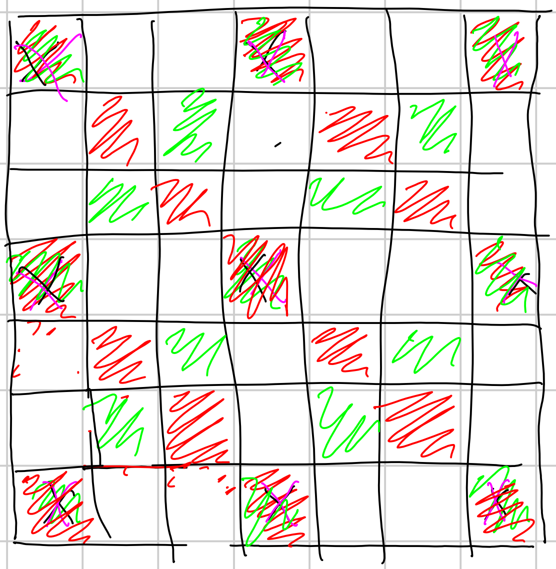


oss: numeri della stessa parità stanno in caselle dello stesso colore

=> sui bianchi vanno i pari
sui neri vanno i dispari } => nella centrale non posso mettere i pari

Esercizio: trovare gli esempi.

Esempio 2



16 tessere 3×1

Copro tutto lasciando un buco: dov'è?

OSS: Ogni tessera copre esattamente 1R
Ma ci sono 17 R => il buco sta su un ROSSO
OSS 2: Vale anche per le caselle V.
Esercizio: finire (trovando gli esempi)

SCHEMINO TECNICHE COMBINATORICHE

ESISTENZA

NON ESISTENZA

* ESISTENZA :

1) Esistenza costruttiva

- mostrare l'esempio
- induzione
- algoritmi { uso invarianti (false) / greedy *

2) Non costruttiva

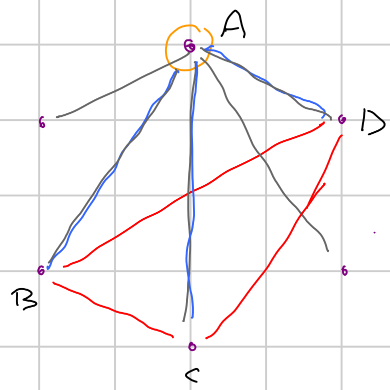
- ragiono per assurdo
- pigeonhole
- estremale *
- DOUBLE - COUNTING

* NON ESISTENZA

- invarianti (vere)
- colorazioni
- DOUBLE - COUNTING

CORREZIONE

$\boxed{C1}$



th: $\exists$ triangolo tutto B o tutto R

per pigeonhole, da A escono almeno 3 segmenti dello stesso colore

1) se uno fra BC, BD, CD è blu :)

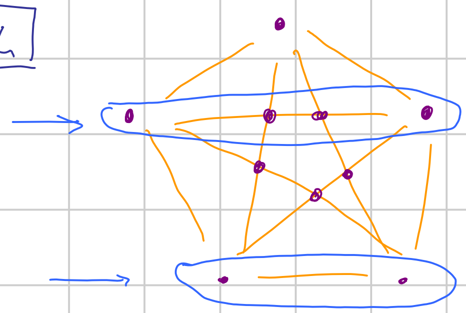
2) se BC, BD, CD sono rossi :)

$\boxed{C3}$ coloro a scacchiera

oss $32 \times$ ▩ $30 \times$ □

oss ogni ▭ copre $1 \times$ ▩ e $1 \times$ □ } NO!

$\boxed{C4}$



(a) $\varphi = \begin{cases} \text{lampadine accese} \\ \text{lampadine interne accese} \end{cases}$

la parità di φ non cambia

(b) φ = lampadine interne accese

$\boxed{C5}$ $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

(a) sommare somma(Y) al variare di $Y \subseteq X$

fisso $k \in X$. a quanti sottoinsiemi appartiene k?

2^{n-1}. la risposta è

$$1 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} + \dots + n \cdot 2^{n-1} =$$

$$2^{n-1}(1+2+3+\dots+n) = 2^{n-1}\frac{n(n+1)}{2} = 2^{n-2} \cdot n \cdot (n+1)$$

(b) sommare $\min(Y)$ al variare di $Y \subseteq X$ non vuoto.

fisso $k \in X$. quanti sono gli Y con $\min(Y)=k$

- $k=1 \rightsquigarrow 2^{n-1}$
- $k=2 \rightsquigarrow 2^{n-2}$
- in generale $\rightsquigarrow 2^{n-k}$

$$1\cdot 2^{n-1} + 2\cdot 2^{n-2} + 3\cdot 2^{n-3} + \dots + (n-1)2^{1} + n\cdot 2^{0} \stackrel{?}{=} 2^{n+1}-n-2$$

- induzione su n
- DC su $Q=$ # modi di colorare una $1\times(n+1)$ con B/N tranne