MISCELLANEA - Basic

Note Title 02/11/2019

Nota M1 Per "Trovare" si intende "Contare tutti i $p(x)$ di grado $n \in \mathbb{N}$ fissato"

M1 $p(x)$ coeff ± 1, $\deg p = n-1$ t.c. $\exists k \in \mathbb{Z} : p(k) = 0$

Oss $k \mid p(0)$ (termine noto) $\Longrightarrow k = \pm 1$.

① $p(1) = 0$ $\quad p(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \rightsquigarrow a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 = 0$

Tutti gli a_i sono $\in \{-1, 1\}$ Dunque c'è lo stesso numero di "1" e "-1".

OSS: n è pari (ossia per n dispari non esistono questi pol.)

$$\text{Num pol} = \binom{n}{\frac{n}{2}} = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}$$

② $p(-1) = 0$. $\quad (-1)^{n-1} a_{n-1} + (-1)^{n-2} a_{n-2} + \dots + (-1) a_1 + a_0 = 0$.

OSS: n è pari.

OSS: se $a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ha sol -1
ho che $(a_{n-1}(-1)^{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1(-1)^1)x + a_0$ ha sol 1.
(cioè cambio di segno i coeff dei termini di grado disp).
Ho trovato una corrispondenza biunivoca fra i pol che hanno radice 1 e quelli che hanno radice -1!
$\longrightarrow$ Sono anche loro $\binom{n}{\frac{n}{2}}$!

③ $p(1) = p(-1) = 0$. $\quad P :=$ somma dei coeff di grado pari
$D :=$ " " " " dispari.

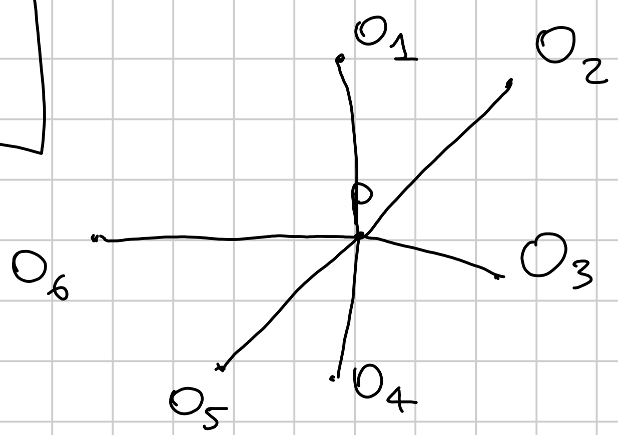
$$\begin{aligned} p(1) = 0 &\Longrightarrow P + D = 0 \\ p(-1) = 0 &\Longrightarrow P - D = 0 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ D = 0 \end{cases}$$

OSS numero di coeff di grado pari/dispari è pari (altrimenti non c'è nessun p con $p(1)=p(-1)=0$).
Prendiamo i coeff pari. Deve esserci lo stesso numero di "1" e "-1" $\rightsquigarrow$ ci sono $\binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{4}}$ possibilità.
Stesso sui coeff dispari.
Dato che posso scegliere indipendentemente pari e dispari, in totale ci sono $\binom{n/2}{n/4}^2$ possibilità.

INCLUSIONE-ESCLUSIONE: ① + ② - ③

$$\begin{cases} 2 \nmid n \Rightarrow 0 \\ 2 \mid n \quad 4 \nmid n \Rightarrow ③ = 0 \Rightarrow ① + ② - ③ = 2\binom{n}{n/2} \\ 4 \mid n \Rightarrow 2\binom{n}{n/2} - \binom{n/2}{n/4}^2 \end{cases}$$

M2

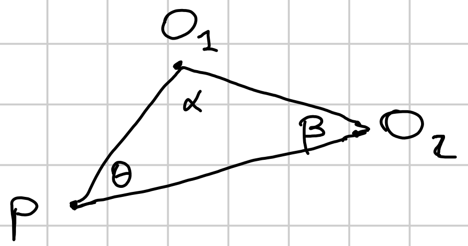


r_i raggio di ω_i

$PO_i \le r_i$

Per Pigenhole $\exists i,j \;\; i \neq j$ t.c $O_i\hat{P}O_j \le 60°$

wlog $O_1\hat{P}O_2 \le 60°$

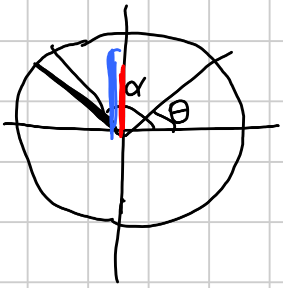


Per Pigenhole $\exists$ angolo tra $\{\alpha, \beta\}$ t.c angolo $\geq 60°$

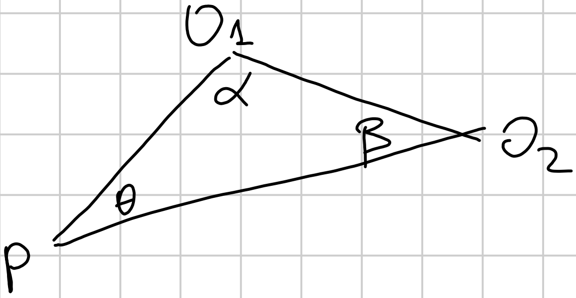
wlog $\alpha \geq 60°$

$\theta \le 60° \quad \alpha \geq 60° \Rightarrow \theta \le \alpha \le 180° - \theta$

$\sin\theta \le \sin\alpha$



$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sin\theta} \geq \frac{1}{\sin\alpha}} \quad ☆$$



P.A $\quad O_1 \notin \omega_2 \qquad\qquad O_1O_2 > r_2$

Inoltre $\quad PO_2 \leq r_2 \qquad\qquad O_1O_2 > r_2 \geq PO_2$

$$\Rightarrow \boxed{O_1O_2 > PO_2} \quad ☆$$

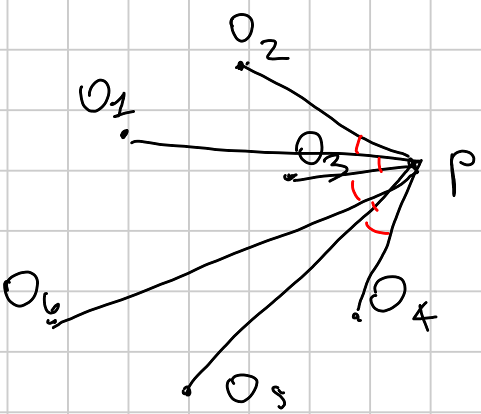
$$☆ + ☆ \Rightarrow \frac{O_1O_2}{\sin\theta} > \frac{PO_2}{\sin\alpha}$$

Ma per il thm dei seni su $P\hat{O_1}O_2$

$$\frac{O_1O_2}{\sin\theta} = \frac{PO_2}{\sin\alpha} \qquad ↯$$

$$\Rightarrow O_1 \in \omega_2$$

Esiste un caso 2



$\Sigma \triangle \leq 180°$

$\Rightarrow \exists$ angolo $\leq 60°$

$\Rightarrow$ il resto è uguale !

M3 (a). $n(n-1)\dots(n-5)$.

(1): $k^2 \mid \frac{7!}{1!}$ in particolare $\Rightarrow k \mid 12$

(2). $p=2$. Ci sono almeno (esattamente) 3 numeri tra $n,\dots,n-5$ multipli di 2. Inoltre, almeno uno di questi è multiplo di 4 $\Rightarrow$ Il loro prodotto è multiplo di 16.

$p=3$. Ci sono almeno (esattamente) 2 numeri tra $n,\dots,n-5$ multipli di 3 $\Rightarrow$ Il loro prodotto è multiplo di 9

$n\dots(n-5)$ è multiplo di $16\cdot 9 = 12^2$ $(\forall n)$.

Oss $\binom{n}{6}$ è un numero intero. In particolare:

$\frac{n!}{(n-6)!\,6!} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 6! \mid \frac{n!}{(n-6)!}$. Si vede che $12^2 \mid 6!$

(b). OSS: Il punto (a2) si ricicla $\Rightarrow 6! = 720 \mid \frac{n!}{(n-6)!}$

(1). p primo $\geq 7 \Rightarrow \exists\, n : p \nmid \frac{n!}{(n-6)!} \Rightarrow p \nmid k$

Prendiamo $n = p\cdot 1000000000 - 1 \Rightarrow n, n-1, \dots, n-5$ non sono multipli di p. $i \in \{0,\dots,5\}$.

$n-i = p\cdot 10\dots0 - (i+1)$. $p \mid p\cdot 10\dots0$, ma $p \nmid i+1 \Rightarrow p \nmid n-i$.

(2). $p=2$ $n-6$ multiplo di 8.

$n-i = (n-6) + (6-i)$ Quante volte viene diviso da 2?

$$\begin{cases} 6-i=1 \rightsquigarrow 0 \\ \quad\;\; =2 \rightsquigarrow 1 \\ \quad\;\; =3 \rightsquigarrow 0 \\ \quad\;\; =4 \rightsquigarrow 2 \\ \quad\;\; =5 \rightsquigarrow 0 \\ \quad\;\; =6 \rightsquigarrow 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Il prodotto $n(n-1)\dots(n-5)$ viene diviso da 2 $0+1+0+2+0+1=4$ volte, ossia 16 lo divide ma 32 no!

$16 \mid k$ $32 \nmid k$.

Ripetiamo per i vari primi ($p=3$ e $p=5$).

$n-6$ multiplo di 3^3 ... $9 \mid k$, $27 \nmid k$

$n-6$ multiplo di 5^2 ... $5 \mid k$, $25 \nmid k$

$k = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 6!$

(c). $m = n-6$. $\mathrm{MCD}\big(n(n-1)\dots(n-5), (n-6)(n-7)\dots(n-11)\big) = D$.

(1) $p \geq 13$ Se p divide uno dei primi 6 termini (n, o $n-1$, o $n-2$, ...) non può dividere nessuno degli altri 6, perché la distanza tra due qualsiasi di questi termini è al più $11 < p \Rightarrow p \nmid D$

②. $p=11$ chiediamo che $11 \mid n-6 \rightsquigarrow$ così $11 \nmid n$, $11 \nmid n-1$... $11 \nmid n-5$
$\Rightarrow$ 11 non divide il primo termine $\Rightarrow 11 \nmid D$ (Vogliamo $n \equiv 6 (11)$)
$p=7$. chiediamo $7 \mid n-6$. Stesso ragionamento $\rightsquigarrow 7 \nmid D$.
$p=5,3,2$, chiedendo le divisibilità opportune (ad esempio $16 \mid n-6$)
si ottiene che D viene diviso da 2 esattamente 4 volte,
da 3 esattamente 2 volte e da 5 esattamente 1 volta.
La condizione finale sarà del tipo $11 \cdot 7 \cdot 16 \cdot \ldots \mid n-6$.
Esiste n fatto così e lo posso prendere grande a piacere.