Test A – Teoria dei numeri e Combinatoria

Problemi a risposta secca

1. Determinare con quanti zeri termina la scrittura in base 12 del fattoriale di 2002.
2. Determinare quante sono le coppie (x, y) di interi positivi tali che $x^2 = 12^{12} + y^2$.
3. Determinare il coefficiente di xy nello sviluppo di $(x + y + 2)^7$.
4. Determinare il più piccolo intero positivo n tale che $513n$, diviso per 2002, dà come resto 1.
5. Determinare quale resto si ottiene quando si divide 2002^{2002} per 19.
6. Determinare gli elementi che hanno ordine 3 modulo 13.
7. Trovare (se esiste) il più piccolo intero positivo che diviso per 4 dà resto 1, diviso per 5 dà resto 2, diviso per 6 dà resto 3.
8. Determinare quanti sono i residui delle potenze 2002-esime modulo 31.

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

9. Determinare quante sono le permutazioni $a_1, \ldots, a_n$ di $1, \ldots, n$ con la proprietà che per ogni $i > 1$ esiste $j < i$ con $|a_i - a_j| = 1$.
10. Sia a_n una successione di interi positivi tali che

$$a_{n+1} = a_n^3 + 1999$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare il numero dei quadrati perfetti contenuti in questa successione è minore o uguale ad uno.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

11. Dimostrare che per ogni intero positivo n esiste un intero positivo k tale che gli n interi

$$k, 2k, 3k, \ldots, nk$$

sono tutte potenze perfette (cioè della forma a^b con a, b interi e $b > 1$).

12. Trovare tutte le coppie (x, y) di interi positivi tali che

$$x^{x+y} = y^{y-x}.$$

13. Dato un intero positivo a, definiamo la funzione $\mathrm{Torre}_a(n)$ ponendo

$$\mathrm{Torre}_a(1) = a, \quad \mathrm{Torre}_a(2) = a^a, \quad \mathrm{Torre}_a(3) = a^{a^a}, \quad \mathrm{Torre}_a(4) = a^{a^{a^a}},$$

e così via.

Dimostrare che per ogni a e per ogni intero $m \geq 2$, si ha che $\mathrm{Torre}_a(n)$, modulo m, è costante da un certo valore di n in poi.

14. Ad uno stage partecipano 9 ragazzi, ciascuno dei quali parla al più 3 lingue. Sapendo che ogni coppia di ragazzi riesce a comunicare (dunque i suoi due componenti hanno una lingua in comune), si dimostri che almeno una lingua è parlata da almeno 5 ragazzi.

Test B – Algebra e Combinatoria

Problemi a risposta secca

1. Scrivere la fattorizzazione reale del polinomio $x^4 + 1$ e disegnare le sue radici nel piano di Gauss.

2. Sapendo che $p(x)$ è un polinomio a coefficienti interi tale che $p(0) = p(1) = p(2) = 0$ e $p(5) > 0$, determinare il minimo valore possibile per $p(5)$.

3. Determinare il più grande intero n per cui
$$\frac{n^2+3}{n+8}$$
è un intero.

4. Sapendo che x e y sono numeri (complessi) tali che $xy = 6$ e $x^2y + xy^2 + x + y = 63$, determinare $x^2 + y^2$.

5. Sapendo che $a_0 = 1$ e $a_{n+1} = 2a_n + 3$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, determinare il resto che si ottiene dividendo a_{2002} per 7.

6. Sapendo che x e y sono numeri reali positivi tali che $x + y = 3$, determinare il massimo valore che può assumere x^2y.

7. Sapendo che a, b, c sono numeri reali positivi tali che $a+b+c = 3$, e x, y, z sono numeri reali tali che $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, determinare il massimo valore possibile dell'espressione
$$x\sqrt{a} + y\sqrt{b} + z\sqrt{c}.$$

8. Una scacchiera 10×10 viene piastrellata, seguendo la quadrettatura, usando mattonelle 3×1, senza creare sovrapposizioni. In questo modo un quadratino del bordo superiore rimane scoperto.

   Determinare quali sono le posizioni possibili di questo buco.

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

9. Determinare tutti i polinomi $p(x)$ a coefficienti reali tali che
$$p(x^2) = (p(x))^2 = p(p(x)).$$

10. Per ogni intero positivo n, trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che
$$f(xf(y)) = xy + (f(x) - x)^n$$
per ogni $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

11. Dimostrare che
$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1$$
per ogni terna (a, b, c) di numeri reali positivi.

12. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tali che
$$f(m + f(n)) = n + f(m + 100)$$
per ogni $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.

13. Trovare tutte le funzioni $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per cui esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente crescente tale che
$$f(x + y) = f(x)g(y) + f(y)$$
per ogni x, y reali.

14. Determinare se è possibile ricoprire una scacchiera 5×7 con delle mattonelle a forma di L (ottenute rimuovendo un quadratino ad una mattonella 2×2), eventualmente con delle sovrapposizioni, in modo che ogni quadratino della scacchiera risulti ricoperto dallo stesso numero di mattonelle.

Test C – Geometria

Problemi a risposta secca

1. Nel piano cartesiano, un triangolo non degenere ha un vertice in $(0,0)$, un vertice in $(3,3)$ ed il terzo vertice in un altro punto a coordinate intere. Determinare la minima area possibile per tale triangolo.

2. Sia A un vertice di un quadrato, e siano M ed N i punti medi dei due lati opposti ad A. Calcolare il coseno dell'angolo $M\widehat{A}N$.

3. In un triangolo ABC si ha che $AB = 8$, $BC = 9$, $CA = 10$. Detto D il piede della bisettrice dell'angolo in A, determinare la lunghezza di CD.

4. Calcolare l'espresione

$$\log_{10}(\tan 1^\circ) + \log_{10}(\tan 2^\circ) + \ldots + \log_{10}(\tan 89^\circ).$$

5. Un triangolo equilatero ABC è inscritto in una circonferenza Γ. Determinare dove viene mandata la retta BC dall'inversione rispetto a Γ.

6. Siano P e Q due punti distinti del piano. Determinare i punti fissi della trasformazione del piano ottenuta facendo prima una rotazione di 90° in senso orario intorno a P e poi una rotazione di 90° in senso antiorario intorno a Q.

7. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico, e sia E il punto di incontro delle diagonali. Sapendo che $AE \cdot EC = 8$ e $BE = 9$, determinare la lunghezza della diagonale BD.

8. In un cerchio di centro O, AD è un diametro, AC una corda, B un punto di AC. Sapendo che $BO = 5$, e che $A\widehat{B}O = C\widehat{O}D = 60^\circ$, determinare la lunghezza di BC.

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

9. Sia dato un triangolo rettangolo ABC, con angolo retto in B. Sia M un punto sul lato AB tale che $AM = BC$, e sia N un punto sul lato BC tale che $CN = MB$. Determinare l'angolo fra le rette AN e CM.

10. (a) Siano Γ_1, Γ_2, Γ_3 tre circonferenze sul piano che si intersecano a due a due in A_1 e A_2, B_1 e B_2, C_1 e C_2 (sei punti distinti).
    Dimostrare che le rette A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sono concorrenti.

    (b) Siano date, su una circonferenza di centro O, due corde AB e CD che si intersecano in un punto M interno al cerchio. Sia E il punto di incontro delle tangenti alla circonferenza in A e B, e sia F il punto di incontro delle tangenti alla circonferenza in C e D.
    Dimostrare che la retta OM è perpendicolare alla retta EF.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

11. Sia ABC un triangolo acutangolo scaleno, e siano D e V, rispettivamente, il piede dell'altezza e della bisettrice uscenti da A. La circonferenza circoscritta al triangolo ADV incontra i lati AC ed AB (oltre che in A) nei punti E ed F, rispettivamente.

    Dimostrare che le rette AD, BE, CF sono concorrenti.

12. In una circonferenza sia data una corda AB, di lunghezza minore del raggio. Sia C un punto interno al cerchio tale che il triangolo ABC sia equilatero. Sia D il punto sulla circonferenza, diverso da A, tale che $AB = BD$. Sia E la seconda intersezione della retta DC con la circonferenza.

    Dimostrare che la lunghezza di CE è uguale al raggio della circonferenza.

13. Sia r una retta che passa per l'ortocentro di un triangolo.

    Dimostrare che le tre simmetriche di r rispetto ai tre lati sono concorrenti.

14. I vertici di un triangolo stanno sui lati di un esagono a simmetria centrale.

    Dimostrare che l'area del triangolo è minore o uguale di metà dell'area dell'esagono.

Team selection test

1. In un triangolo ABC si ha che $AB = 3$ e $BC = 4$.

   Sapendo che i punti medi delle altezze di ABC sono allineati, determinare le possibili lunghezze di AC.

2. Dimostrare che per ogni primo p e ogni intero positivo n si ha che

   $$\binom{p^n}{p} - p^{n-1}$$

   è multiplo di p^n.

3. Determinare tutte le funzioni f che mandano i reali positivi in reali positivi e soddisfano le seguenti due condizioni

   (i) $f(x + yf(x)) = f(x)f(y)$ per ogni $x > 0$, $y > 0$;

   (ii) esiste al più un numero finito di $x > 0$ tali che $f(x) = 1$.

4. Sia ABC un triangolo scaleno, e sia Γ la sua circonferenza circoscritta. La bisettrice dell'angolo in A incontra BC in E. Sia M il punto medio dell'arco BC dalla stessa parte di A, e sia D l'altro punto di intersezione tra Γ e la retta ME.

   Dimostrare che il centro della circonferenza circoscritta al triangolo AED è il punto di incontro tra la tangente a Γ in D e la retta BC.

5. Ad un torneo di calcio hanno partecipato n squadre (con n intero maggiore od uguale a 3). Al termine del programma risulta che, scelte comunque tre squadre, almeno due si sono incontrate.

   (a) Nel caso $n = 7$, determinare il minimo numero di incontri disputati.

   (b) Determinare il minimo numero di incontri disputati in funzione di n.

6. Dimostrare che, per ogni intero positivo m, esistono infinite coppie (x, y) di interi positivi tali che

   (i) x e y sono primi tra di loro;

   (ii) x divide $y^2 + m$;

   (iii) y divide $x^2 + m$.

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.