Algebra

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

1. Determinare per quali valori reali di k il polinomio
$$P(x,y,z) = x^5 + y^5 + z^5 + k(x^3 + y^3 + z^3)(x^2 + y^2 + z^2)$$
è divisibile per $(x + y + z)^2$.

2. Siano a, b, c numeri reali tali che
$$a^2 + b^2 + c^2 = 2.$$
Dimostrare che
$$\left|a^3 + b^3 + c^3 - abc\right| \leq 2\sqrt{2}$$
e determinare quando si ha uguaglianza.

3. Sia $p(x)$ un polinomio di grado maggiore o uguale a 2. Definiamo per ricorrenza
$$p_1(x) = p(x), \qquad p_{n+1}(x) = p(p_n(x)).$$
Sia r_n la media aritmetica delle radici (eventualmente complesse) di $p_n(x)$.

   Sapendo che $r_{200} = 4$, determinare r_{2004}.

4. Sia $n \geq 2$ un intero. Determinare la più grande costante c_1 e la più piccola costante c_2 per cui si ha che
$$c_1 \leq \frac{x_1^2}{x_1 + y_1} + \ldots + \frac{x_n^2}{x_n + y_n} \leq c_2,$$
qualunque siano i numeri reali positivi $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_n$ tali che $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n = 1$.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

5. Siano a, b, c numeri reali positivi tali che $a+b+c=1$. Dimostrare che
$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\geq\frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}.$$

6. Siano a, b, c le lunghezze dei lati di un triangolo di perimetro 2. Dimostrare che
$$abc+1\leq ab+bc+ca\leq abc+\frac{28}{27}.$$
Determinare inoltre se e quando si hanno le uguaglianze.

7. Determinare tutte le funzioni $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ tali che
$$f(x+y)=f(x)f(y)-f(xy)+1$$
per ogni coppia di numeri interi x e y.

   Determinare quindi tutte le funzioni $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ che verificano la stessa relazione per tutte le coppie di numeri razionali x e y.

8. (a) Determinare se esistono funzioni $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tali che
$$f(g(x))=x^2 \qquad g(f(x))=x^3$$
per ogni x reale.

   (b) Determinare se esistono funzioni $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tali che
$$f(g(x))=x^2 \qquad g(f(x))=x^4$$
per ogni x reale.

Combinatoria

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

1. La commissione olimpiadi è composta da 8 persone. Determinare se è possibile formare dei comitati con i membri di tale commissione in modo da soddisfare entrambe le seguenti condizioni:

   - ogni comitato è composto da quattro membri;
   - comunque si scelgano tre membri della commissione, esiste uno ed un solo comitato di cui fanno parte tutti e tre.

2. In una nazione ci sono n città. Ogni coppia di città è collegata (andata e ritorno) o da una linea di autobus, o da una linea ferroviaria. Un turista vuole organizzare un tour che visiti una ed una sola volta tutte le città per poi tornare al punto di partenza. Determinare se il turista può scegliere il punto di partenza e l'itinerario in modo da dover cambiare mezzo al più una volta.

3. Inizialmente una pedina è posizionata nel punto $(1,1)$ del piano cartesiano. Successivamente è possibile spostare la pedina secondo le seguenti regole:

   - se la pedina si trova nel punto (a,b), è possibile spostarla nel punto $(2a,b)$ o nel punto $(a,2b)$;
   - se la pedina si trova nel punto (a,b), con $a>b$, è possibile spostarla nel punto $(a-b,b)$;
   - se la pedina si trova nel punto (a,b), con $b>a$, è possibile spostarla nel punto $(a,b-a)$.

   Determinare tutte le posizioni raggiungibili con la pedina.

4. Determinare quante sono le permutazioni σ dell'insieme $\{1,\ldots,n\}$ tali che

$$|\{x \in \{1,\ldots,n\} : \ \sigma(x) > x\}| \leq 1.$$

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

5. (a) Determinare il più piccolo intero n con questa proprietà: comunque si scelgano n interi in $\{1, 2, \ldots, 2004\}$, ve ne sono 2 che differiscono di 10.

   (b) Determinare quanti sono i sottoinsiemi di $\{1, 2, \ldots, 2004\}$, contenenti $n-1$ elementi, in cui nessuna coppia di elementi differisce di 10 (n è il minimo intero di cui al punto precedente).

6. Una *tripletta additiva* è una terna (a, b, c) di numeri interi distinti tali che $a + b = c$. Determinare il massimo numero di triplette additive che sono contenute in un insieme di 2004 interi positivi.

7. Sia $M = \{(a, b, c, d) : \ a, b, c, d \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ e } abcd > 1\}$.

   Determinare tutte le coppie (x, y) per cui esiste una successione
   $$(a_1, b_1, c_1, d_1), (a_2, b_2, c_2, d_2), \ldots, (a_{255}, b_{255}, c_{255}, d_{255})$$
   che contiene una sola volta tutti gli elementi di M, tale che $(a_1, b_1, c_1, d_1) = (x, y, 1, 1)$ e
   $$|a_{n+1} - a_n| + |b_{n+1} - b_n| + |c_{n+1} - c_n| + |d_{n+1} - d_n| = 1$$
   per ogni $n = 1, 2, \ldots, 254$.

8. Siano $n \geq 3$ e $c \geq 1$ due interi positivi. Determinare quanti sono i modi di colorare i vertici di un n-agono, usando al più c colori, in modo che vertici adiacenti abbiano colori distinti (due colorazioni ottenibili l'una dall'altra mediante rotazione del poligono sono considerate distinte).

Geometria

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

1. Siano P, Q, R, S punti distinti presi nell'ordine su una circonferenza di centro O in modo tale che PS sia un diamentro parallelo alla corda QR. Sia A l'intersezione tra PR e QS, e sia B un punto scelto in modo che $POAB$ sia un parallelogrammo.

   Dimostrare che $BP = BQ$.

2. Siano date tre circonferenze con una corda AB in comune, e con i centri dalla stessa parte rispetto alla retta AB. Una retta passante per A, e diversa dalla retta AB, incontra nuovamente la circonferenza più piccola nel punto X, la circonferenza intermedia nel punto Y, e la circonferenza più grande nel punto Z.

   Dimostrare che il rapporto XY/YZ non dipende dalla retta scelta.

3. Diciamo che due circonferenze secanti sono *ortogonali* se in ciascuno dei punti di intersezione hanno rette tangenti ortogonali. Sono assegnate due circonferenze α e β, tangenti esternamente nel punto T. Supponiamo che esse abbiano raggi differenti e sia O il punto in comune alle due rette (non passanti per T) che sono tangenti ad entrambe le circonferenze. Detta γ la circonferenza di centro O e raggio OT, dimostrare che γ è ortogonale a qualsiasi circonferenza che sia tangente ad entrambe le circonferenze α e β e non passi per T.

4. Determinare tutti i triangoli in cui vi sono due altezze che hanno lunghezza maggiore o uguale delle rispettive basi.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

5. Sia ABC un triangolo e sia D un punto del lato AB tale che $4AD = AB$. Sia P un punto della circonferenza circoscritta ad ABC, dalla stessa parte di C rispetto ad AB, e tale che $A\widehat{D}P = A\widehat{C}B$.

   Dimostrare che $PB = 2PD$.

6. Sia A un punto appartenente ad una circonferenza di centro O, e sia B il punto medio del raggio OA. Siano C e D due punti sulla circonferenza, dalla stessa parte rispetto alla retta OA, e tali che $C\widehat{B}O = D\widehat{B}A$. Sia M il punto medio di CD.

   Dimostrare che il simmetrico di M rispetto al punto B giace sulla circonferenza.

7. (a) Sia I l'incentro di un triangolo ABC. Le rette AI, BI, CI incontrano nuovamente la circonferenza circoscritta nei punti A', B', C'.

   Dimostrare che
   $$\text{Area}(A'B'C') \geq \text{Area}(ABC)$$
   e determinare in quali casi si ha l'uguaglianza.

   (b) Stessa domanda del punto precedente sostituendo l'incentro con il baricentro.

8. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso e sia K il punto d'incontro delle diagonali. Sono dati un punto L su AD, un punto M su AC, ed un punto N su BC in modo tale che KL è parallelo ad AB, LM è parallelo a DC ed MN è parallelo ad AB.

   Dimostrare che
   $$\frac{\text{Area}(KLMN)}{\text{Area}(ABCD)} < \frac{8}{27}.$$

Teoria dei numeri

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

1. Determinare tutte le coppie (m, n) di numeri interi tali che
$$(m^2 + n)(m + n^2) = (m + n)^3.$$

2. Determinare tutte le terne di numeri primi (p, q, r) tali che $p^q + p^r$ è un quadrato perfetto.

3. Siano $1 < p_1 < p_2 < \cdots < p_{31}$ numeri primi tali che $p_1^4 + p_2^4 + \cdots + p_{31}^4$ è divisibile per 30. Dimostrare che nell'insieme $\{p_1, p_2, \ldots, p_{31}\}$ ci sono tre primi consecutivi.

4. Determinare il minimo valore possibile per la somma delle cifre di un multiplo positivo di 59.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

5. Determinare tutti i numeri naturali $n > 1$ con la seguente proprietà: esiste una base $b \geq 5$ tale che ogni numero di tre cifre $(xyz)_b$ è divisibile per n se e solo se $z + 3y - 4x$ è divisibile per n.

6. Sia $\mathcal{P}$ l'insieme dei numeri primi e sia M un sottoinsieme di $\mathcal{P}$ con almeno 3 elementi tale che, per ogni sottoinsieme $A \subseteq M$, tutti i fattori primi di
$$\left(\prod_{p \in A} p\right) - 1$$
appartengano ad M. Dimostrare che $M = \mathcal{P}$.

7. Sia m un intero positivo. Dimostrare che, se $2^{m+1} + 1$ divide $3^{2^m} + 1$, allora $2^{m+1} + 1$ è primo.

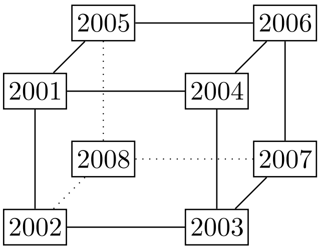
8. Un intero positivo è *bello* se si può rappresentare come media aritmetica di numeri, non necessariamente distinti, che sono tutti potenze di 2. Si dice *stupendo* se può essere rappresentato come media aritmetica di numeri distinti che sono tutte potenze di 2.
   - Dimostrare che tutti gli interi positivi sono belli.
   - Dimostrare che esistono infiniti interi positivi che non sono stupendi.

Team selection test

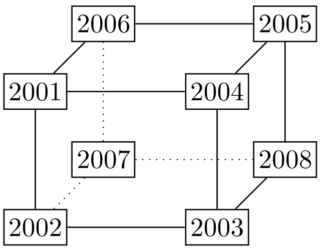
1. Un formicaio comprende 8 cavità disposte come i vertici di un cubo, collegate da 12 cunicoli disposti come gli spigoli del cubo. Le formiche si spostano in modo estremamente organizzato; sono infatti possibili solo due tipi di mosse:

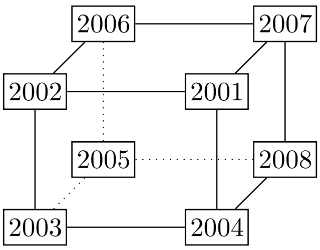
   - o tre formiche escono contemporaneamente da un vertice e si spostano ognuna in uno dei tre vertici adiacenti;
   - o in un vertice arrivano contemporaneamente tre formiche, una da ciascuno dei tre vertici adiacenti.

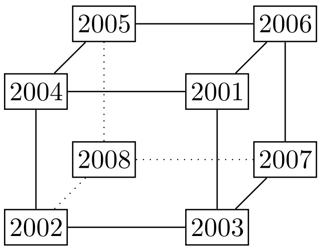
   Inizialmente ciascuna cavità contiene il numero di formiche indicato nello schema seguente.



   Determinare quali delle seguenti configurazioni sono raggiungibili.







2. Consideriamo la successione $1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, 32, 32 \ldots$. Sia $\mathcal{P}$ un poligono (convesso, non intrecciato) che ha un numero $n > 3$ di lati, le cui lunghezze sono, procedendo in senso orario a partire dal vertice A_1, i primi n termini della successione.

   Consideriamo il poligono $\mathcal{P}_1$, che è il simmetrico di $\mathcal{P}$ rispetto ad A_1. Poi, su $\mathcal{P}_1$, prendiamo il vertice successivo (in senso orario) e consideriamo il poligono $\mathcal{P}_2$, simmetrico di $\mathcal{P}_1$ rispetto a tale vertice. Ancora, su $\mathcal{P}_2$ prendiamo il vertice successivo (sempre in senso orario) e disegniamo il poligono $\mathcal{P}_3$, simmetrico di $\mathcal{P}_2$ rispetto a tale vertice, e così via.

   Determinare in quali casi ritroveremo infinite volte un poligono coincidente con $\mathcal{P}$.

3. Determinare tutte le funzioni f, che mandano interi positivi in interi positivi, e tali che
$$(2^m + 1)f(n)f(2^m n) = 2^m[f(n)]^2 + [f(2^m n)]^2 + (2^m - 1)^2 n$$
   per ogni coppia di interi positivi m ed n.

4. Due circonferenze C_1 e C_2 si intersecano in due punti A e B. Sia M un punto di C_2, diverso da A e B, tale che, dette H e K le ulteriori intersezioni tra C_1 e le rette AM e BM, rispettivamente, si abbia che A appartiene al segmento HM e B appartiene al segmento KM (estremi esclusi). Sia R il punto di C_1, situato dalla parte opposta di B rispetto ad AM, tale che la tangente r a C_1 in R sia parallela alla retta HA. La retta AR interseca nuovamente C_2 in S. Sia s la tangente a C_2 in S.

   (a) Dimostrare che s è parallela ad AK.

   (b) Dimostrare che r, s e la retta KM passano per uno stesso punto.

5. Un intero positivo si dice *potenza* se è della forma a^b, con a e b interi maggiori di 1.

   (a) Determinare se esistono progressioni aritmetiche di 2004 elementi distinti che sono tutti potenze.

   (b) Determinare se esistono progressioni aritmetiche formate da infiniti elementi distinti che sono tutti potenze.

6. Siano $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_n$ numeri reali. Sia $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice i cui elementi sono
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i + y_j \geq 0, \\ 0 & \text{se } x_i + y_j < 0 \end{cases}$$
Sia B una matrice $n \times n$ i cui elementi sono 0 o 1, in cui la somma degli elementi in ogni riga ed in ogni colonna coincide con la corrispondente somma per la matrice A.

   Dimostrare che $A = B$.

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

Risposte

A1. Solo per $k = -5/6$.

A2. Si ha uguaglianza se e solo se due delle variabili sono uguali a 0, e l'altra è uguale a $\pm\sqrt{2}$.

A3. $r_{2004} = 4$

A4. Per ogni $n \geq 2$ si ha che $c_1 = 1/2$ e $c_2 = 1$

A6. La disuguaglianza di sinistra è sempre stretta, in quella di destra vale il segno di uguale se e solo se il triangolo è equilatero.

A7. Vi sono tre funzioni $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ che soddisfano l'equazione funzionale. Esse sono

$$f_1(x) \equiv 1, \qquad f_2(x) = x + 1, \qquad f_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } n \text{ pari,} \\ 0 & \text{per } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Vi sono due funzioni $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ che soddisfano l'equazione funzionale. Esse sono le ovvie estensioni a $\mathbb{Q}$ di f_1 ed f_2.

A8. (a) Non esistono (b) Esistono

C1. È possibile.

C2. È possibile.

C3. Le posizioni raggiungibili sono tutte quelle rappresentate da una coppia (a, b) di interi positivi il cui massimo comun divisore sia una potenza di 2.

C4. Sono $2^n - n$.

C5. (a) 1005 (b) 66^6

C6. $1001 \cdot 1002$

C7. Tutte le coppie (x, y) con $x, y \in \{1, 2, 3, 4\}$ e $x + y$ dispari.

C8. $(c - 1)^n + (c - 1) \cdot (-1)^n$

G4. Sono i triangoli rettangoli isosceli.

G7. In entrambi i casi si ha uguaglianza se e solo se il triangolo è equilatero.

N1. $(11, 4), (7, 5), (-5, 2), (-1, 1)$ e simmetriche, più le infinite soluzioni del tipo $(0, a)$ e $(a, 0)$ per ogni $a \in \mathbb{Z}$.

N2. $(2, 2, 5)$, $(2, 5, 2)$, $(3, 3, 2)$, $(3, 2, 3)$, e tutte le terne del tipo $(2, q, q)$ con q primo dispari.

N3. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$.

N4. 2

N5. Solo $n = 13$.

TST1. La configurazione centrale è raggiungibile, le altre due no.

TST2. Si ottiene infinite volte il poligono di partenza se e solo se n è dispari.

TST3. Le soluzioni sono tutte e sole le funzioni ottenibili con la seguente costruzione: dato un intero positivo dispari d, siano d_1 e d_2 interi positivi tali che $d = d_1 \cdot d_2$, e si ponga $f(2^k d) = 2^k d_1 + d_2$ per ogni $k \geq 0$ (il 2^k moltiplica sempre lo stesso fattore d_1 per tutti i valori di k).

TST5. (a) Esistono (b) Non esistono

“Aiutini”

A1. Ci sono almeno due approcci complementari possibili:

- provare ad assegnare valori opportuni ad alcune variabili (ad esempio $y = 1$, $k = 0$);
- dimostrare che il quoziente deve essere un polinomio simmetrico ed omogeneo e determinarne i coefficienti.

A2. Omogeneizzare la disuguaglianza ponendo $2\sqrt{2} = (a^2 + b^2 + c^2)^{3/2}$, quindi elevare al quadrato e usare le disuguaglianze di raccoglimento. Attenzione: le disuguaglianze di raccoglimento valgono solo se a, b, c sono positivi. Occorre quindi distinguere i casi a seconda dei segni.

A3. Scrivere r_k in funzione dei due coefficienti di grado più alto in $p_k(x)$. Dimostrare quindi per induzione che r_k rimane costante.

A4. Per la disuguaglianza di sinistra utilizzare Cauchy-Schwarz, per quella di destra la disuguaglianza $x_i^2/(x_i + y_i) < x_i$. Attenzione: non basta dimostrare che le costanti $1/2$ ed 1 soddisfano la disuguaglianza, ma bisogna anche fare vedere che sono quelle ottimali.

A5. Considerare a due a due gli addendi a sinistra applicando poi HM-AM.

A6. Considerare il prodotto $(1 - a)(1 - b)(1 - c)$. Questo porta ad una soluzione breve. In alternativa si può utilizzare la sostituzione per i lati di un triangolo per la disuguaglianza di sinistra, mentre per quella di destra si può procedere con omegeneizzazione, raggruppamento e Schur.

A7. Trovato $f(0)$, si pone $f(1) = a$ e si ottiene una formula che lega $f(x)$ ad $f(x + 1)$. A questo punto si cerca di calcolare un certo valore in due modi diversi (ad esempio $f(4)$, utilizzando $4 = 3 + 1$ e $4 = 2 + 2$). Si ottiene così un'equazione le cui soluzioni sono i possibili valori di a. Noti quelli, su $\mathbb{Z}$ si conclude facilmente (attenzione: è probabile che una semplice induzione porti a concludere in $\mathbb{N}$ e non in $\mathbb{Z}$). Alle frazioni m/n si può arrivare ponendo $x = m/n$ e $y = n$.

A8. Per la parte (a) conviene cercare informazioni sulla iniettività e/o surgettività di f e g, e poi cercare di capire chi potrebbero essere $f(-1)$, $f(0)$ e $f(1)$.

Per la parte (b) potrebbe essere utile “riscaldarsi” risolvendo equazioni collegate del tipo $f(x^4) = [f(x)]^2$, o ancora più semplicemente $f(4x) = [f(x)]^2$. Dopo un po' si è portati a considerare funzioni del tipo $a^{\sqrt{\log_b x}}$ e $a^{\log_b^2 x}$. Scegliendo opportunamente i parametri, si risolve il problema per $x > 1$. Non resta ora che estendere opportunamente le funzioni trovate.

C1. Visto che $8 = 2^3$, potrebbe essere utile pensare gli 8 commissari disposti ai vertici di un'opportuna figura geometrica.

C2. Induzione su n.

C3. Studiare come può variare il massimo comun divisore tra le due coordinate quando si fanno le mosse ammesse. Attenzione: l'invariante dimostra che alcune configurazioni sono impossibili. Bisogna poi dimostrare che le rimanenti sono effettivamente raggiungibili. Per far questo può convenire procedere a ritroso.

C4. Sono possibili diversi approcci alternativi.

- Si può considerare la decomposizione in cicli della permutazione, dimostrando che deve contenere un solo ciclo, il quale deve poi essere percorso in un modo opportuno.
- Fissati due interi $1 \leq a < b \leq n$ si possono contare quante sono le permutazioni del tipo previsto che lasciano fissi tutti gli $i < a$ e che mandano a in b. Considerando le possibili coppie a, b, si arriva ad una sommatoria del tipo

$$(n-1) \cdot 2^0 + (n-2) \cdot 2^1 + (n-3) \cdot 2^3 + \ldots$$

di cui si trova facilmente una formula chiusa per induzione. Non bisogna infine dimenticarsi della permutazione identica.

C5. (a) Considerare gli insiemi disgiunti

$$\{1, 11, 21, \ldots, 2001\}, \ \{2, 12, 22, \ldots, 2002\}, \ \ldots, \ \{9, 19, 29, \ldots, 1999\},$$

in cui applicare opportuni pigeonhole.

(b) Considerare nuovamente gli insiemi del punto precedente. Può essere utile dimostrare in generale che i modi di scegliere k elementi in $\{1, 2, \ldots, n\}$ in modo che non ve ne siano due consecutivi sono

$$\binom{n-k+1}{k}.$$

C6. Supponendo che gli interi siano $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2004}$, quante sono al massimo le triplette additive che hanno x_i come elemento centrale? Attenzione: in questo modo si ottiene una maggiorazione. Occorre poi esibire un esempio in cui è ottimale.

C7. Pensare alla successione come un percorso e colorare i punti attraversati in modo che ogni tratto congiunga un punto bianco ed un punto nero. Attenzione: in questo modo si dimostra che certi punti di partenza non vanno bene. Bisogna poi dimostrare che i rimanenti invece vanno bene.

C8. Detto x_n il numero di colorazioni richieste, conviene cercare una formula ricorrente per x_n. Si ottiene alla fine che $x_n = (c-2)x_{n-1} + (c-1)x_{n-2}$.

G1. Gli approcci possibili sono molti. Una possibilità è dimostrare che POB è congruente a QOB, cosa che segue se si fa vedere che $P\widehat{O}Q = 2P\widehat{O}B$.

G2. Si possono calcolare le lunghezze di AX, AY e AZ in funzione della lunghezza di AB, dei tre raggi, e dell'angolo tra la corda e la retta.

G3. Ci sono almeno due approcci.

- Inversione rispetto a T. Dove va a finire la circonferenza γ?
- Inversione rispetto ad O. Come cambia in questo caso la figura?

G4. Gli approcci possibili sono tanti, ma sostanzialmente basati sul fatto che ogni altezza è minore o uguale dei due lati che partono dallo stesso vertice e che le altezze sono inversamente proporzionali alle basi.

G5. Usare la similitudine tra ADP e APB.

G6. L'approccio più semplice è quello analitico.

In alternativa, sia E l'intersezione tra le rette OA e CD: allora CBE è simile ad ODE e la circonferenza di centro A e raggio AO passa per E ed M.

G7. (a) Esprimere l'area in funzione di R e dei tre angoli. Calcolando gli angoli del nuovo triangolo in funzione di quelli del vecchio si giunge ad una disuguaglianza algebrica.

(b) Esprimere l'area in funzione di R e dei lati. Determinare i rapporti tra le lunghezze dei lati del triangolo iniziale e di quello finale usando AG, BG, CG e la potenza di G rispetto alla circonferenza circoscritta. Queste quattro quantità si calcolano in funzione dei lati (per la potenza può essere utile utilizzare i vettori o i numeri complessi) e si ottiene una disuguaglianza algebrica.

G8. Il quadrilatero $KLMN$ è un parallelogrammo (si dimostra che KL è parallelo e uguale ad MN. Indicato con O il punto d'incontro tra le rette AB e CD (volendo si può supporre che siano anche ortogonali), si pone $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OD = d$ e si calcola tutto in funzione di queste quattro quantità. Si ottiene una disuguaglianza algebrica abbastanza asimmetrica, che va trattata confrontando i termini che contengono potenze cubiche di una variabile.

N1. Svolgendo i calcoli si arriva ad un'equazione che è di primo grado sia in m che in n. Si ricava una delle due variabili e si procede con la divisione di polinomi.

N2. Si esclude il caso in cui p, q, r sono tutti dispari. Si trattano poi in casi in cui almeno uno dei tre è uguale a 2.

N3. Considerare i residui delle potenze quarte modulo 2, 3, 5.

N4. Considerare la congruenza $10^n \equiv -1$ modulo 59. È quindi sufficiente dimostrare che 10 è un generatore modulo 59.

N5. Ridursi ad un sistema del tipo $b^2 \equiv -4$ e $b \equiv 3$ modulo n. Attenzione: quello dato è un criterio di divisibilità e non di congruenza, quindi non è possibile ridursi al sistema semplicemente uguagliando i coefficienti di x e y. Occorre sostituire a x, y e z dei valori opportuni.

N6. Dimostrare che M è infinito. Se ora M non contiene un certo primo q, cercare di ottenere un assurdo mediante il piccolo teorema di Fermat.

N7. Posto $M = 2^{m+1} + 1$, determinare l'ordine di 3 modulo M.

N8. (a) Per ottenere n basta utilizzare opportunamente la potenza di 2 precedente e quella successiva.

(b) Studiare le relazioni tra la "stupendità" di k e quella di $2k$.

TST1. Per la configurazione centrale basta provare, per le altre due occorre trovare opportuni invarianti.

TST2. In notazione vettoriale, trovare una formula per la trasformazione che manda $\mathcal{P}$ in $\mathcal{P}_k$, in funzione dei vertici del poligono. Si noti in particolare che la composizione di un numero pari di simmetrie risulta una traslazione di un vettore opportuno, che può essere o no il vettore nullo.

TST3. Posto $x = f(2^m n)$, si può vedere l'equazione funzionale come un'equazione di secondo grado in x. Si tratta poi il caso in cui $n = d$ è dispari, ed infine si lega $f(2^k d)$ ad $f(2d)$ ponendo $n = 2d$ ed $m = k - 1$.

TST4. Per la parte (a) conviene dimostrare preliminarmente che KR è parallelo a SM.

Per la parte (b) si indica con P_1 l'intersezione tra r e KM, con P_2 l'intersezione tra s e KM, e con O l'intesezione tra AS e KM, ed infine si dimostra che $OP_1 = OP_2$.

TST5. Per la parte (a) ci sono almeno due approcci:

- far vedere che per ogni n esistono n potenze in progressione aritmetica (il punto fondamentale è costruire una progressione lunga $n + 1$ partendo da una lunga n);
- trovare un k tale che la progressione $k, 2k, 3k, \ldots, 2004k$ sia costituita da tutte potenze.

Per la parte (b) si può far vedere che le potenze tra 1 ed n sono, per valori grandi di n, troppo poche per formare una progressione di ragione r fissa.

TST6. L'osservazione fondamentale è che la matrice A ha o una riga di tutti 1 o una colonna di tutti 0.

Team Selection Test – Soluzioni

Per ogni problema della gara finale riportiamo

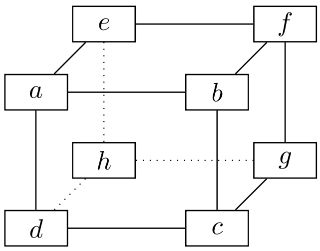
- una soluzione completa, come dovrebbe essere scritta durante una gara;
- alcune idee e osservazioni su possibili soluzioni alternative (spesso non complete);
- alcuni modi classici di perdere punti pur avendo capito come si risolveva il problema.

Soluzione problema 1

La configurazione centrale è raggiungibile, mentre le altre due non lo sono.

Per ottenere la configurazione centrale basta far uscire 3 formiche dalla cavità che inizialmente ne conteneva 2004, e far uscire altre 3 formiche dalla cavità che inizialmente ne conteneva 2008.

Per dimostrare che le altre due configurazioni non sono raggiungibili, introduciamo un opportuno invariante. Consideriamo la somma delle formiche contenute in una cavità e nelle tre adiacenti: tale somma, modulo 2, è invariante. Ad esempio, rappresentando il formicaio nella forma



abbiamo che

$$e + a + h + f \pmod 2$$

è invariante. Infatti tale somma non cambia quando 3 formiche entrano od escono dalle cavità e o c, mentre aumenta o diminuisce di 2 quando 3 formiche entrano od escono dalle rimanenti cavità.

Nella configurazione iniziale tale somma è pari, mentre nelle configurazioni finali di destra e di sinistra è dispari. Questo dimostra che tali configurazioni non sono raggiungibili.

Soluzioni alternative

Citiamo brevemente altri invarianti che possono essere utilizzati per dimostrare l'impossibilità di raggiungere le configurazioni finali di destra e di sinistra.

- Coloriamo le cavità con due colori, in modo che cavità adiacenti abbiano colori diversi. Allora la somma delle formiche contenute in cavità dello stesso colore, modulo 3, è invariante. Con riferimento alla figura di sopra, otteniamo così due invarianti:

  $$a + c + f + h \pmod 3, \qquad\qquad b + d + e + g \pmod 3.$$

  Questi invarianti permettono di dimostrare l'irraggiungibilità della configurazione di sinistra, ma non hanno effetto su quella di destra.

- La somma delle formiche contenute in un "piano diagonale", modulo 2, è invariante. Otteniamo così 6 invarianti, uno dei quali è

  $$a + d + f + g \pmod 2.$$

  Questo permette di dimostrare l'irraggiungibilità della configurazione di destra. Tuttavia nessuno di questi 6 invarianti ha effetto sulla configurazione di sinistra.

- Consideriamo la somma delle formiche contenute in due cavità opposte, ad esempio $a+g$. Tale somma è alternativamente pari o dispari. Considerando quindi le quattro coppie di cavità opposte, le quattro somme corrispondenti hanno, in una configuarazione raggiungibile, o tutte la stessa parità che avevano all'inizio, o tutte parità opposta rispetto a quella che avevano all'inizio. Questo permette di escludere la configuarazione di destra, ma non ha effetto su quella di sinistra.

Come perdere punti

Il modo più semplice di farlo è asserire che una certa quantità è invariante, senza dimostrarlo.

Soluzione problema 2

Dimostreremo che si ottiene infinite volte un poligono coincidente con quello iniziale se e solo se n è dispari. Per semplicità, utilizzeremo la notazione vettoriale per i punti del piano.

Step 1. Siano $P_1, P_2, \ldots, P_k$ punti del piano, e sia

$$v_k = P_k - P_{k-1} + P_{k-2} - P_{k-3} + \ldots - (-1)^k P_1. \tag{2.1}$$

Allora partendo da un punto x e applicando successivamente le simmetrie rispetto a P_1, P_2, $\ldots$, P_k, si ottiene il punto $2v_k + (-1)^k x$. Tale formula si dimostra facilmente per induzione [in una gara sarebbe forse opportuno farlo esplicitamente per sicurezza].

In particolare

- per k dispari il poligono $\mathcal{P}_k$ su può pensare ottenuto da $\mathcal{P}$ mediante una simmetria centrale rispetto al vettore v_k;
- per k pari il poligono $\mathcal{P}_k$ è il traslato di $\mathcal{P}$ mediante il vettore $2v_k$.

Step 2. Dimostriamo che per k dispari il poligono $\mathcal{P}_k$ è diverso da $\mathcal{P}$.

Infatti, dallo step precedente, se fosse $\mathcal{P}_k = \mathcal{P}$ vorrebbe dire che la simmetria centrale rispetto a v_k manda $\mathcal{P}$ in se stesso. Questo è però impossibile, visto che in questo caso tale simmetria dovrebbe lasciare fisso sia il vertice che separa i 2 lati lunghi 1, sia il vertice che separa i 2 lati lunghi 2, mentre è evidente che le simmetrie centrali hanno un solo punto fisso.

Step 3. Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ i vertici del poligono, e sia k un intero positivo. Allora

$$v_k = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \ldots + (-1)^{k+1} A_k, \tag{2.2}$$

con la convenzione che gli indici dei vertici vanno interpretati modulo n, nel senso che $A_{n+1} = A_1$, $A_{n+2} = A_2$, e così via. In particolare per valori di k maggiori di n si ha che

- se n è pari, ogni vertice del poligono compare nella (2.2) sempre con lo stesso segno;
- se n è dispari, ogni vertice del poligono compare nella (2.2) ogni volta con il segno opposto rispetto alla volta precedente.

Dimostriamo tale formula per induzione. Essendo $P_1 = A_1$, la (2.2) è banalmente vera per $k = 1$. Supponiamo ora che valga per un certo k. Osserviamo intanto che dalla (2.1) segue che $v_{k+1} = P_{k+1} - v_k$, e che il punto P_{k+1}, rispetto al quale si fa la $(k+1)$-esima simmetria, è il trasformato del vertice A_{k+1} mediante la trasformazione che manda $\mathcal{P}$ in $\mathcal{P}_k$, e quindi, per lo step 1, $P_{k+1} = 2v_k + (-1)^k A_{k+1}$. Ma allora

$$v_{k+1} = P_{k+1} - v_k = 2v_k + (-1)^k A_{k+1} - v_k = v_k + (-1)^k A_{k+1},$$

che è esattamente quello che volevamo dimostrare.

Step 4. Dimostriamo che, se n è dispari, allora $v_k = 0$, e di conseguenza $\mathcal{P}_k$ coincide con $\mathcal{P}$, per ogni k che sia multiplo di $2n$, dunque infinite volte.

Infatti nel caso $k = 2nh$ si ha che

$$\begin{aligned} v_{2nh} &= A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \ldots + A_{2n-1} - A_{2n} + \\ &\quad + A_{2n+1} - A_{2n+2} + A_{2n+3} - A_{2n+4} + \ldots + A_{4n-1} - A_{4n} + \\ &\quad + \ldots \\ &\quad + A_{2(h-1)n+1} - A_{2(h-1)n+2} + \ldots + A_{2hn-1} - A_{2hn}, \end{aligned}$$

e tale somma è nulla perché, essendo n dispari, per quanto osservato allo step 3, ogni vertice del poligono vi compare h volte con il segno positivo ed h volte con il segno negativo.

Step 5. Nel caso in cui $n = 2m$ è pari, poniamo per semplicità $w_i = A_{2i-1} - A_{2i}$, e dimostriamo che

$$v_{2m} = w_1 + w_2 + \ldots + w_m \neq 0.$$

Infatti per ipotesi si ha che $\|w_i\| = 2^{i-1}$ per $i = 1, \ldots, m-1$, da cui per la disuguaglianza triangolare

$$\|w_m\| = 2^{m-1} > 2^{m-1} - 1 = \sum_{i=1}^{m-1} 2^{i-1} = \sum_{i=1}^{m-1} \|w_i\| \geq \|\sum_{i=1}^{m-1} w_i\|.$$

Questo dimostra che l'ultimo addendo è un vettore la cui norma è maggiore della norma della somma dei rimanenti addendi, per cui la somma totale non può essere il vettore nullo.

Step 6. Dimostriamo ora che se $n = 2m$ è pari, allora $\mathcal{P}_k$ non può coincidere con $\mathcal{P}$ per infiniti k. Dimostriamo addirittura un risultato più forte: $\mathcal{P}_k$ non può coincidere con $\mathcal{P}$ per più di m valori di k.

Supponiamo infatti per assurdo che esistano $k_1, k_2, \ldots, k_{m+1}$ tali che $\mathcal{P}_{k_1} = \mathcal{P}_{k_2} = \ldots = \mathcal{P}_{k_{m+1}} = \mathcal{P}$. Per lo step 2 sappiamo che nessuno di tali valori è dispari. Ne segue che questi $(m+1)$ valori appartengono, modulo n, alle m classi $2, 4, \ldots, 2m$. Per il principio del pigeonhole, esisteranno quindi $i, j \in \{1, 2, \ldots, m+1\}$, ed un intero positivo h tali che $k_j = k_i + hn$ e $\mathcal{P}_{k_i} = \mathcal{P}_{k_j} = \mathcal{P}$.

Tuttavia, $\mathcal{P}_{k_j}$ si ottiene traslando $\mathcal{P}_{k_i}$ del vettore hv_n, che dallo step 5 sappiamo non essere il vettore nullo. Abbiamo così trovato un assurdo.

Soluzioni alternative

Vale forse la pena osservare che lo step 2, per quanto interessante, non è strettamente necessario nella dimostrazione, se non per limitare ad m, anziché a $2m$, il numero di "ritorni" nel caso $n = 2m$. In tal caso però avremmo avuto, nello step 6, che $\mathcal{P}_{k_j}$ si ottiene traslando $\mathcal{P}_{k_i}$ del vettore $\pm hv_n$, a seconda che k_i sia pari o dispari.

Come perdere punti

Ci sono molti modi di farlo: ad esempio non facendo notare a sufficienza la differenza fondamentale tra il caso n pari ed il caso n dispari (cioè il fatto che i vertici ricompaiano con segni uguali o diversi nella formula che esprime v_k per k maggiore di n), oppure asserendo che per k dispari $\mathcal{P}_k$ non può coincidere con $\mathcal{P}$, senza dimostrarlo chiaramente.

Soluzione problema 3

Dimostreremo che le soluzioni dell'equazione funzionale sono tutte e sole le funzioni ottenibili con la seguente costruzione: dato un intero positivo dispari d, siano d_1 e d_2 interi positivi tali che $d = d_1 \cdot d_2$, e si ponga

$$f(2^k d) = 2^k d_1 + d_2 \qquad \forall k \geq 0.$$

Si noti che ogni intero può essere scritto in modo unico nella forma $2^k d$, con d dispari, e che il 2^k moltiplica sempre lo stesso fattore d_1 per tutti i valori di k.

Vale la pena notare i seguenti due casi particolari.

- Se n è un numero primo dispari, allora necessariamente $f(n) = n + 1$.
- Se n è una potenza di due, allora necessariamente $f(n) = n + 1$.

Step 1. Interpretando l'equazione funzionale come un'equazione di secondo grado nella variabile $x = f(2^m n)$ si ha che

$$f(2^m n) = \frac{(2^m + 1)f(n) \pm (2^m - 1)\sqrt{[f(n)]^2 - 4n}}{2}. \tag{3.1}$$

Poiché $f(2^m n)$ è intero, esisterà un intero $\Delta \geq 0$ tale che

$$[f(n)]^2 - 4n = \Delta^2 \tag{3.2}$$

Step 2. Trattiamo il caso in cui $n = d$ è dispari. Riscriviamo la (3.2) nella forma

$$(f(d) + \Delta)(f(n) - \Delta) = 4d.$$

Il primo fattore a sinistra è positivo, dunque lo è anche il secondo; inoltre i due fattori hanno la stessa parità, essendo la loro somma un numero pari. Poiché il loro prodotto è pari, i due fattori saranno entrambi pari. Ne segue che esistono interi positivi $d_1 \geq d_2$ tali che $d_1 \cdot d_2 = d$ e

$$\begin{cases} f(d) + \Delta = 2d_1, \\ f(d) - \Delta = 2d_2. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo che

$$f(d) = d_1 + d_2 \tag{3.3}$$

e

$$\Delta = d_1 - d_2. \tag{3.4}$$

Step 3. Determiniamo ora $f(2^m d)$.

Se $n = d$, sostituendo la (3.3) e la (3.4) nella (3.1) otteniamo che

$$f(2^m d) = 2^m d_1 + d_2 \qquad \text{oppure} \qquad f(2^m d) = d_1 + 2^m d_2 \tag{3.5}$$

Step 4. Per quanto dimostrato finora, può accadere che $f(2^k d) = 2^k d_1 + d_2$ per alcuni valori di k e $f(2^k d) = d_1 + 2^k d_2$ per altri valori di k. Mostriamo ora invece che la scelta fatta per $k = 1$ condiziona la scelta per tutti i k successivi.

Supponiamo, senza perdita di generalità, che sia

$$f(2d) = 2d_1 + d_2. \tag{3.6}$$

Ponendo $n = 2d$ ed $m = k - 1$ nella (3.1) otteniamo

$$f(2^k d) = \frac{(2^{k-1}+1)f(2d) \pm (2^{k-1}-1)\sqrt{[f(2d)]^2 - 4d}}{2},$$

da cui, utilizzando la (3.6), con qualche calcolo si ricava che

$$f(2^k d) = 2^k d_1 + d_2 \qquad \text{oppure} \qquad f(2^k d) = 2d_1 + 2^{k-1} d_2.$$

Tuttavia, dalla (3.5) noi già sappiamo che $f(2^k d)$ è dispari, dunque la seconda possibilità è da scartare.

Abbiamo quindi dimostrato che, se $f(2d) = 2d_1 + d_2$, allora $f(2^k d) = 2^k d_1 + d_2$ per ogni k successivo.

Step 5. Resta solo da verificare che tutte le funzioni così definite soddisfano l'equazione funzionale.

Posto $n = 2^k d$, con d dispari, supponiamo senza perdita di generalità che sia $f(2^k d) = 2^k d_1 + d_2$. Dobbiamo verificare che

$$(2^m + 1) f(2^k d) f(2^{m+k} d) = 2^m [f(2^k d)]^2 + [f(2^{m+k} d)]^2 + (2^m - 1)^2 2^k d$$

per ogni m, e cioè che

$$(2^m + 1)(2^k d_1 + d_2)(2^{m+k} d_1 + d_2) = 2^m (2^k d_1 + d_2)^2 + 4(2^{m+k} d_1 + d_2)^2 + (2^m - 1)^2 2^k d_1 d_2.$$

Svolti tutti i calcoli, si ottiene un'identità [in una gara sarebbe meglio farlo esplicitamente].

Soluzioni alternative

Un approccio alternativo consiste nel riscrivere l'equazione funzionale nella forma

$$[f(2^m n) - 2^m f(n)] \cdot [f(2^m n) - f(n)] = -(2^m - 1)^2 n.$$

Ponendo $m = 1$ e $n = d$ dispari si ricavano agevolmente le espressioni per $f(d)$ e $f(2d)$. Noto $f(d)$, si passa al caso $n = d$ ed m generico: poiché sono noti il prodotto e la differenza dei due fattori, non è difficile determinare $f(2^m d)$. Si tratta ora di legare $f(2d)$ a $f(2^k d)$, e ancora una volta questo si ottiene ponendo $n = 2d$ ed $m = k - 1$.

Come perdere punti

Il modo classico di perdere un punto è di saltare lo Step 5, cioè di non fare la verifica. Non fare lo Step 4, o non porsi nemmeno il problema di doverlo fare, costa invece un numero maggiore di punti. È anche facile perdere punti trascurando i segni dei vari fattori.

Soluzione problema 4

Step 1. Dimostriamo che RK è parallelo ad MS.

Per farlo ci basta dimostrare che $K\widehat{R}S = R\widehat{S}M$, in quanto angoli alterni interni rispetto alla trasversale RS. Posto $R\widehat{S}M = \beta$, si ha che

- $A\widehat{B}M = \beta$ (insiste sulla stessa corda AM di C_2);
- $A\widehat{B}K = 180° - \beta$ (banale);
- $K\widehat{R}A = K\widehat{R}S = \beta$ (insiste sulla corda AK di C_1, ma dalla parte opposta rispetto a $A\widehat{B}K$).

Step 2. Detto α l'angolo tra SM e la retta s, si ha che $R\widehat{K}A = \alpha$. Infatti

- $S\widehat{A}M = \alpha$ (angolo alla circonferenza e sua posizione limite);
- $H\widehat{A}R = \alpha$ (opposto al vertice);
- l'angolo tra RA e la retta r è uguale ad α (alterni interni rispetto alla parallele r ed AM);
- $R\widehat{K}A = \alpha$ (angolo alla circonferenza e sua posizione limite).

Step 3. Le rette AK ed s sono parallele.

Infatti per lo step 2 esse formano angoli α uguali (e dalla stessa parte) rispetto alle parallele KR ed SM (step 1), dunque sono a loro volta parallele.

Step 4. Sia ora L l'intersezione tra AS e BM, e sia P_1 l'intersezione tra r ed MK. Dalla similitudine dei triangoli RLP_1 ed ALM segue che $RL : LP_1 = AL : LM$, da cui

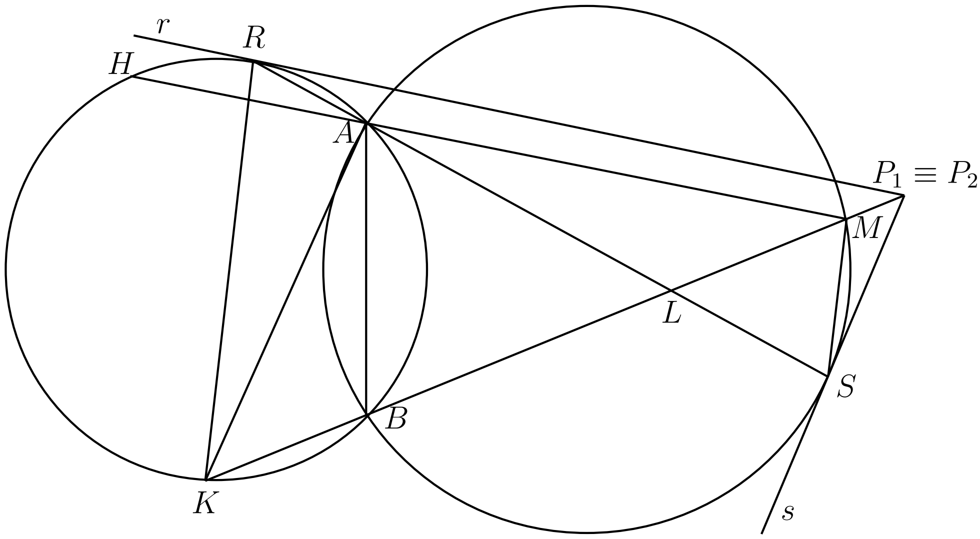
$$LP_1 = \frac{RL \cdot LM}{AL}.$$

Step 5. Sia ora P_2 l'intersezione tra KM ed s. Dalla similitudine dei triangoli LAK e LSP_2 (si usa qui il parallelismo tra AK ed s) segue che $LA : LK = LS : LP_2$, da cui

$$LP_2 = \frac{LK \cdot LS}{AL}.$$

Step 6. Dimostriamo che $RL \cdot LM = LK \cdot LS$. Infatti dalla similitudine dei triangoli LRK ed LSM (si usa qui il parallelismo tra RK ed SM dimostrato allo step 1) segue che $LR : LK = LS : LM$, da cui l'uguaglianza voluta.

Step 7. Dagli step 4, 5, 6 segue immediatamente che $LP_1 = LP_2$, dunque $P_1 = P_2$, e quindi le rette r, s e KM sono concorrenti.



Soluzioni alternative

Soluzioni alternative del punto (b) si possono ottenere sfruttando quella che a posteriori sarà la ciclicità del quadrilatero $BSPR$, dove P è il punto in cui concorrono r, s e KM. Ad esempio, se si definisce P_2 come l'intersezione tra KM ed s, si ha che $P_2\widehat{B}R = P_2\widehat{S}R = \alpha+\beta$, dunque BSP_2R è ciclico. Ma allora, essendo $P_2\widehat{B}S = \alpha$, dovrà essere pure $P_2\widehat{R}S = \alpha$. Poichè già sappiamo che α è l'angolo tra la retta RS e la retta r, possiamo concludere che la retta P_2R e la retta r coincidono.

Come perdere punti

Facendo calcoli di angoli che coinvolgano i centri delle due circonferenze. In questo caso è facile incappare in problemi di configurazione (i centri possono essere disposti in vario modo rispetto alle altre rette tracciate).

Molto più cara può costare la mancanza di chiarezza nella definizione dei punti tipo P_1 e P_2.

Soluzione problema 5

Parte (a). Dimostriamo per induzione che per ogni $n \geq 2$ esistono n potenze distinte in progressione aritmetica. Il caso $n = 2004$ sarà la tesi richiesta.

Il caso $n = 2$ è ovvio, in quanto basta prendere due potenze distinte qualsiasi. Supponiamo ora che

$$a_1^{b_1}, \qquad a_2^{b_2}, \qquad \ldots, \qquad a_n^{b_n}$$

(con tutti gli a_i e tutti i b_i interi maggiori di uno) formino una progressione aritmetica di ragione r. Sia $k = a_n^{b_n} + r$ il termine successivo della progressione. In generale k non è una potenza, ma se moltiplichiamo tutti gli $n+1$ termini per $k^{b_1 \cdot \ldots \cdot b_n}$, otteniamo la progressione di $n+1$ termini

$$a_1^{b_1} k^{b_1 \cdot \ldots \cdot b_n}, \qquad a_2^{b_2} k^{b_1 \cdot \ldots \cdot b_n}, \qquad \ldots, \qquad a_n^{b_n} k^{b_1 \cdot \ldots \cdot b_n}, \qquad k^{b_1 \cdot \ldots \cdot b_n + 1},$$

in cui il primo è una potenza b_1-esima, il secondo è una potenza b_2-esima, e così via fino all'n-esimo che è una potenza b_n-esima, mentre l'$(n+1)$-esimo è una potenza di esponente $b_1 \cdot \ldots \cdot b_n + 1$. Questo completa il passo induttivo.

Parte (b). Dimostriamo che non esiste una progressione aritmetica costituita da infinite potenze. Supponiamo per assurdo che a_0, $a_0 + r$, $a_0 + 2r$, $a_0 + 3r$, …, sia una progressione aritmetica di ragione r costituita da tutte potenze. Per ogni intero $n \geq 2$, indichiamo con $\mathrm{Prog}(n)$ il numero di termini della progressione che sono $\leq n$, e con $\mathrm{Pot}(n)$ il numero di potenze che sono $\leq n$. Essendo la progressione costituita da tutte potenze si deve avere che

$$\mathrm{Pot}(n) \geq \mathrm{Prog}(n).$$

Andiamo ora a stimare separatamente le due quantità.

- Poiché dopo a_0 un intero ogni r appartiene alla progressione, si avrà che

$$\mathrm{Prog}(n) \geq \frac{n - a_0}{r}.$$

- Se una potenza a^b è $\leq n$, allora necessariamente $a \leq \sqrt{n}$ e $b \leq \log_2 n$. Ne segue che

$$\mathrm{Pot}(n) \leq \sqrt{n} \log_2 n.$$

Mettendo insieme le disuguaglianze trovate, per ogni $n \geq 2$ si avrebbe che

$$\frac{n - a_0}{r} \leq \mathrm{Prog}(n) \leq \mathrm{Pot}(n) \leq \sqrt{n} \log_2 n,$$

la quale non è possibile per valori di n sufficientemente grandi, in quanto il termine di sinistra cresce più velocemente del termine di destra. Per dimostrarlo formalmente, si può ad esempio utilizzare il fatto che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{r}{n - a_0} \cdot \sqrt{n} \log_2 n = 0.$$

Volendo usare un argomento più elementare, si può partire dalla disuguaglianza $2^k \geq k^2$ (vera per $k \geq 4$, come si dimostra facilmente per induzione); ponendo $n = 4^k$ con $k \geq 4r$ si avrebbe che

$$\frac{4^k - a_0}{r} \leq \sqrt{4^k} \log_2 4^k = 2^k \cdot 2k = \frac{2^k}{2r} \cdot 4kr \leq \frac{2^k}{2r} \cdot k^2 \leq \frac{4^k}{2r},$$

la quale è chiaramente impossibile non appena $4^k > 2a_0$.

Soluzioni alternative

Per la parte (a) si può dimostrare che esiste un intero k tale che k, $2k$, $3k$, ..., $2004k$ siano tutte potenze. Più precisamente, scelti 2004 primi distinti p_1, p_2, ..., p_{2004}, è possibile fare in modo che ik sia una potenza p_i-esima per ogni $i = 1, 2, \ldots, 2004$. Cerchiamo un tale k della forma

$$k = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 4^{a_4} \cdot \ldots \cdot 2004^{a_{2004}},$$

per un'opportuna scelta degli esponenti a_2, a_3, ..., a_{2004}. Affinché k sia una potenza p_1-esima, è sufficiente che tutti gli esponenti siano multipli di p_1. Per $i = 2, 3, \ldots, 2004$, affinché ik sia una potenza p_i-esima, è sufficiente che tutti gli esponenti siano multipli di p_i, tranne l'i-esimo che deve essere congruo a -1 modulo p_i.

Mettendo insieme queste informazioni, per ogni $i = 2, 3, \ldots, 2004$ ci basta trovare un esponente a_i che sia congruo a -1 modulo p_i e congruo a 0 modulo p_j per ogni $j \neq i$. Poiché i primi considerati sono tutti distinti, tale esponente esiste per il teorema cinese.

Una soluzione alternativa del punto (b) si ottiene applicando il teorema di Dirichlet, il cui utilizzo in ambito olimpico non è standard. Il Teorema di Dirichlet dice che, se a ed r sono primi tra di loro, allora la progressione aritmetica a, $a + r$, $a + 2r$, ..., contiene infiniti numeri primi. Questo dimostra che una progressione infinita in cui il primo termine e la ragione hanno massimo comun divisore uguale a 1 non può essere costituita da tutte potenze. Nel caso generale, sia $d = (a, r)$, e sia $a = d\alpha$ ed $r = d\rho$. La progressione si può scrivere nella forma

$$d\alpha, \quad d(\alpha + \rho), \quad d(\alpha + 2\rho), \quad d(\alpha + 3\rho), \quad \ldots$$

Poiché α e ρ sono primi tra di loro, per il teorema di Dirichlet la progressione $\alpha + n\rho$ contiene infiniti numeri primi, e quindi prima o poi un primo p che non compare nella fattorizzazione di d. Il corrispondente termine dp della progressione originaria non potrà quindi essere una potenza.

Come perdere punti

Tralasciando dettagli importanti, ad esempio, nella soluzione alternativa del punto (a), il fatto che i primi devono essere tutti distinti per verificare le ipotesi del teorema cinese. Utilizzare in maniera scorretta un teorema non standard, ad esempio il teorema di Dirichlet senza dire che a ed r sono primi tra di loro, può compromettere l'intera parte dell'esercizio.

Soluzione problema 6.

Dimostriamo il seguente enunciato più generale (il caso particolare $m = n$ è quello richiesto dal problema).

> Siano $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_m$ numeri reali. Sia $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ la matrice i cui elementi sono
> $$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i + y_j \geq 0, \\ 0 & \text{se } x_i + y_j < 0 \end{cases}$$
> Sia B una matrice $n \times m$ i cui elementi sono 0 o 1, in cui la somma degli elementi in ogni riga ed in ogni colonna coincide con la corrispondente somma per la matrice A.
>
> Allora $A = B$.

L'osservazione fondamentale è la seguente. Sia $i_{\max}$ un indice (potrebbe infatti esisterne più di uno) tale che
$$x_{i_{\max}} \geq x_i \qquad \forall i = 1, \ldots, n, \tag{6.1}$$
e sia $j_{\min}$ un indice tale che
$$y_{j_{\min}} \leq y_j \qquad \forall j = 1, \ldots, m. \tag{6.2}$$
Allora si ha che

- se $a_{i_{\max}, j_{\min}} = 1$, allora la riga $i_{\max}$-esima contiene tutti 1;
- se $a_{i_{\max}, j_{\min}} = 0$, allora la colonna $j_{\min}$-esima contiene tutti 0.

Se infatti $a_{i_{\max}, j_{\min}} = 1$, questo vuol dire che $x_{i_{\max}} + y_{j_{\min}} \geq 0$, ma allora per la (6.2) si avrà pure che $x_{i_{\max}} + y_j \geq 0$, e dunque $a_{i_{\max}, j} = 1$, per ogni $j = 1, \ldots, m$. In maniera del tutto analoga, se $a_{i_{\max}, j_{\min}} = 0$, questo vuol dire che $x_{i_{\max}} + y_{j_{\min}} < 0$, ma allora per la (6.1) si avrà pure che $x_i + y_{j_{\min}} < 0$, e dunque $a_{i, j_{\min}} = 0$, per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Abbiamo così dimostrato che la matrice A contiene o una riga di tutti 1 o una colonna di tutti 0.

Possiamo ora procedere per induzione su $m + n$. Se $m + n = 2$, siamo di fronte ad una matrice 1×1, e non c'è molto da dimostrare. L'enunciato è banalmente vero anche nel caso in cui $n = 1$ oppure $m = 1$. Se infatti la matrice è costituita da una sola riga, allora è univocamente determinata dalle somme nelle varie "colonne" (costituite in questo caso da un solo elemento); discorso analogo se la matrice ha una sola colonna.

Supponiamo ora di aver dimostrato l'enunciato per tutte le matrici con $m + n = k - 1$, e supponiamo di avere una matrice A di dimensione $m \times n$ con $m \geq 2$, $n \geq 2$ e $m + n = k$. Per quanto abbiamo detto precedentemente, si hanno due casi.

- Caso 1: A ha una colonna di tutti 0. Allora necessariamente la matrice B dovrà avere tutti 0 nella colonna corrispondente (infatti la somma degli elementi in quella colonna di B è zero, così come in A). Possiamo allora cancellare quella colonna in A e B, ottenendo due nuove matrici A' e B' di dimensione $n \times (m-1)$. Avendo eliminato solo una colonna di 0, le somme degli elementi nelle righe e nelle colonne di A' e B' sono uguali alle corrispondenti somme in A e B. Inoltre la matrice A' si ottiene in modo analogo alla matrice A, usando gli stessi x_i, e gli stessi y_j, meno quello corrispondente alla colonna cancellata. Poiché $n + (m - 1) = k - 1$, per ipotesi induttiva abbiamo che $A' = B'$, dunque anche $A = B$.

- Caso 2: A ha una riga di tutti 1. Allora necessariamente la matrice B dovrà avere tutti 1 nella riga corrispondente (infatti la somma degli elementi in quella riga di B è uguale ad m, così come in A, cosa che si può ottenere soltanto con una riga di tutti 1). Possiamo allora cancellare quella riga in A e B, ottenendo due nuove matrici A' e B' di dimensione $(n - 1) \times m$. Avendo eliminato solo una riga di 1, le somme degli elementi nelle righe di A' e B' sono uguali alle corrispondenti somme in A e B, mentre le somme degli elementi nelle colonne di A' e B' sono uguali alle corrispondenti somme in A e B, diminuite di 1. Inoltre la matrice A' si ottiene in modo analogo alla matrice A, usando gli stessi x_i, meno quello corrispondente alla riga cancellata, e gli stessi y_j. Poiché $n + (m - 1) = k - 1$, per ipotesi induttiva abbiamo che $A' = B'$, dunque anche $A = B$.

Questo completa l'induzione.

Soluzioni alternative

Più che una soluzione alternativa, presentiamo un'osservazione che poteva semplificare la situazione.

Senza perdita di generalità, pur di permutare in modo opportuno le righe e le colonne di A, e di permutare allo stesso modo le righe e le colonne di B, possiamo assumere che $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$ e $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_m$. In questo caso in ogni riga gli 1 sono tutti a sinistra e in ogni colonna gli 1 sono tutti in alto. In particolare, quella che abbiamo chiamato "osservazione fondamentale" diventa in questo caso che "o la prima riga contiene tutti 1 o l'ultima colonna contiene tutti 0".

Si noti come questo sia un problema in cui conviene prima generalizzare, e poi dimostrare la generalizzazione.

Come perdere punti

Non facendo notare che le somme nelle righe e nelle colonne di A' e B' coincidono, o che A' è ancora una matrice definita allo stesso modo, per poter applicare il passo induttivo. Si noti inoltre che il caso $m = 1$ o $n = 1$ va trattato da qualche parte per evitare nell'induzione di trovarsi con matrici con 0 righe o 0 colonne.