

Algebra

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

1. Siano $a_1, a_2, \dots, a_n$ numeri interi tali che l'equazione

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

ha n radici intere distinte, a due a due relativamente prime.

Dimostrare che a_{n-1} e a_n sono relativamente primi.

2. Siano a, b, c numeri reali positivi tali che $abc = 1$. Dimostrare che

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

3. Siano x e y numeri reali positivi tali che $x + y = 2$. Dimostrare che

$$x^2y^2(x^2 + y^2) \leq 2.$$

4. Determinare tutti i polinomi $p(x)$, a coefficienti reali, tali che

$$1 + p(x) = \frac{1}{2}(p(x-1) + p(x+1))$$

per ogni x reale.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

5. Sia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una funzione iniettiva.

- (a) Dimostrare che esiste una progressione aritmetica di 3 termini $a, a + d, a + 2d$ tale che

$$f(a) < f(a + d) < f(a + 2d).$$

- (b) Determinare se esiste necessariamente una progressione aritmetica di 4 termini $a, a + d, a + 2d, a + 3d$ tale che

$$f(a) < f(a + d) < f(a + 2d) < f(a + 3d).$$

6. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi con le seguenti proprietà:

- $p(n) > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- per ogni intero positivo m esiste un termine della successione

$$p(1), p(p(1)), p(p(p(1))), \dots$$

che è divisibile per m .

Dimostrare che $p(x) = x + 1$.

7. Dimostrare che

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leq \frac{1}{abc}$$

per ogni terna di numeri reali positivi a, b, c tali che $ab + bc + ca = 1$.

8. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ tali che

$$f(x)f(y) = f(xy + 1) + f(x - y) - 2$$

per ogni x e y razionali.

Combinatoria

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

1. Determinare in quanti modi possiamo scegliere 3 sottoinsiemi A, B, C di $\{1, 2, \dots, n\}$ in modo che

$$A \cap B \cap C = \emptyset, \quad A \cap B \neq \emptyset, \quad A \cap C \neq \emptyset.$$

Due terne di sottoinsiemi che differiscano per l'ordine sono considerate distinte.

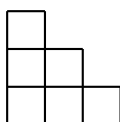
2. Ad un torneo di pallavolo hanno partecipato almeno 3 squadre. Ogni squadra ha incontrato ogni altra squadra una ed una sola volta, e ogni squadra ha vinto almeno una partita (nella pallavolo non c'è il pareggio).

Dimostrare che esistono 3 squadre A, B, C , tali che A ha battuto B , B ha battuto C , e C ha battuto A .

3. La pianta di un palazzo è una tabella suddivisa in 2005×2005 caselle (le stanze). Dall'esterno si accede alla stanza all'estremità nord-ovest; ogni coppia di stanze con una lato in comune è collegata da una porta. Un tizio è entrato nel palazzo, ha girato per un po' e, appena è tornato alla stanza all'estremità nord-ovest, è uscito dal palazzo. La persona è stata esattamente 100 volte in ogni stanza, tranne le due stanze a nord-ovest e a sud-est.

Determinare quante volte la persona è stata nella stanza a sud-est.

4. Determinare tutti i rettangoli $m \times n$ tassellabili con pezzi della seguente forma



Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

5. Un formicaio comprende 8 cavità disposte come i vertici di un cubo, collegate da 12 cunicoli disposti come gli spigoli del cubo. Le formiche si spostano in modo estremamente organizzato; sono infatti possibili solo due tipi di mosse:
- o tre formiche escono contemporaneamente da un vertice e si spostano ognuna in uno dei tre vertici adiacenti;
 - o in un vertice arrivano contemporaneamente tre formiche, una da ciascuno dei tre vertici adiacenti.

Inizialmente ciascuna cavità contiene il numero di formiche indicato nello schema di sinistra. Determinare se la configurazione indicata nello schema a destra è raggiungibile.



6. In una università ci sono 10001 studenti. Alcuni studenti si sono riuniti per formare dei club (uno studente può far parte di più di un club). Alcuni club si sono riuniti per formare delle società (un club può far parte di più di una società). A priori, un club potrebbe avere un solo studente iscritto, e una società potrebbe essere formata da un solo club.

Sappiamo che in tutto ci sono k società, e che sono soddisfatte le seguenti 3 condizioni.

- Per ogni coppia di studenti, esiste esattamente un club di cui fanno parte entrambi.
- Per ogni studente e per ogni società, lo studente fa parte di esattamente un club di quella società.
- Ogni club ha un numero dispari di studenti, e ogni club con $2m + 1$ studenti appartiene ad esattamente m società.

Determinare i possibili valori di k .

7. Siano $a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ numeri reali tali che $a_0 = a_{n+1} = 0$.

Dimostrare che esiste un numero k ($0 \leq k \leq n$) tale che

- $a_{k+1} + \dots + a_{k+i} \geq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n - k + 1$;
- $a_j + \dots + a_k \leq 0$ per ogni $j = 0, \dots, k$.

8. Dato un intero positivo n , sia p_n il numero delle parole di n lettere costruite usando solo le lettere A e B, in cui non vi sono né 4 A consecutive, né 3 B consecutive.

Calcolare

$$\frac{p_{2005} - p_{2003} - p_{2000}}{p_{2002} + p_{2001}}.$$

Geometria

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

1. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso e siano K, L, M, N i punti medi di AB, BC, CD, DA , rispettivamente. Sia T l'intersezione di NL e KM .

Dimostrare che

$$\frac{8}{3}\text{Area}(DNTM) < \text{Area}(ABCD) < 8\text{Area}(DNTM).$$

2. Siano J, K, L i piedi delle altezze di un triangolo acutangolo ABC .

(a) Dimostrare che l'incentro del triangolo JKL coincide con l'ortocentro del triangolo ABC .

(b) Dimostrare che A, B, C sono gli ex-centri del triangolo JKL .

3. In un triangolo acutangolo la distanza del punto medio di ogni lato dal vertice opposto è uguale alla somma delle distanze del punto medio stesso dagli altri due lati.

Dimostrare che il triangolo è equilatero.

4. Sia ABC un triangolo acutangolo e sia D un punto sul lato BC . Siano E ed F le proiezioni di D sui lati AB ed AC , rispettivamente. Sia P l'intersezione di BF e CE .

Dimostrare che AD biseca l'angolo $\widehat{BAC}$ se e solo se AP è perpendicolare a BC .

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

5. In un quadrilatero $ABCD$ si ha che $\widehat{ABD} = 60^\circ$, $\widehat{DBC} = 20^\circ$, $\widehat{DAC} = 10^\circ$ e $\widehat{CAB} = 70^\circ$.

Determinare gli angoli del quadrilatero.

6. Sia O il circocentro di un triangolo acutangolo ABC , in cui $\widehat{ABC} < \widehat{ACB}$. La retta AO interseca il lato BC in D . Siano E ed F i circocentri dei triangoli ABD e ACD , rispettivamente. Sia G il punto sul prolungamento di AB , dalla parte di A , tale che $AG = AC$. Sia H il punto sul prolungamento di AC , dalla parte di A , tale che $AH = AB$.

(a) Dimostrare che il quadrilatero $EFGH$ è un trapezio.

(b) Dimostrare che il quadrilatero $EFGH$ è un rettangolo se e solo se $\widehat{ACB} - \widehat{ABC} = 60^\circ$.

7. Sia ABC un triangolo acutangolo, e sia P un punto sul lato AB . La parallela a BC passante per P incontra AC in X . La parallela ad AC passante per P incontra BC in Y .

(a) Determinare (costruire con riga e compasso) il punto P per cui il segmento XY ha lunghezza minima.

(b) Dimostrare che il segmento XY di lunghezza minima è perpendicolare alla mediana di ABC uscente dal vertice C .

8. Siano a , b , c i lati di un triangolo ABC . Dimostrare che la circonferenza inscritta divide la mediana uscente da B in tre parti uguali se e solo se

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{10} = \frac{c}{13}.$$

Teoria dei numeri

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

1. Determinare tutte le coppie (p, q) di numeri primi per cui

$$p^2 + q^2 + p^2q^2$$

risulta un quadrato perfetto.

2. Dimostrare che per ogni intero positivo k esistono infiniti quadrati perfetti della forma $2^k n - 7$, con n intero.
3. (a) Trovare tutte le coppie (x, y) di interi positivi tali che

$$7^x - 4^y = 3.$$

- (b) Trovare tutte le coppie (x, y) di interi positivi tali che

$$7^x - 3^y = 4.$$

4. Determinare tutte le coppie (m, n) di interi positivi tali che la rappresentazione decimale di 2^m si ottiene aggiungendo una cifra (non nulla) a sinistra alla rappresentazione decimale di 2^n .

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

5. Sia p un numero primo e sia $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$.

(a) Determinare i numeri primi q per cui esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $q|f(n)$.

(b) Determinare i numeri primi q per cui esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $q^2|f(n)$.

6. Sia $k > 1$ un intero, e sia $m = 4k^2 - 5$. Dimostrare che, scegliendo opportunamente gli interi positivi a e b , tutti i termini della successione x_n definita per ricorrenza da

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \quad x_0 = a, \quad x_1 = b,$$

risultano relativamente primi con m .

7. Sia $d(n)$ il numero dei divisori di un intero positivo n . Dimostrare che esistono infiniti interi positivi a per cui l'equazione

$$d(an) = n$$

non ha soluzioni intere positive.

8. Determinare tutti i numeri primi p per i quali esistono due interi x, y tali che

$$\begin{cases} p + 1 = 2x^2, \\ p^2 + 1 = 2y^2. \end{cases}$$

Team selection test

1. Ad uno stage partecipano n studenti ($n \geq 4$). Il giorno prima della gara finale, ogni terna di studenti cospira contro un altro studente, per metterlo fuori combattimento per il giorno successivo.

Dimostrare che esiste uno studente contro il quale ci sono almeno

$$\sqrt[3]{(n-1)(n-2)}$$

cospiratori.

2. (a) Dimostrare che in ogni triangolo la somma delle distanze del baricentro dai lati è maggiore o uguale del triplo del raggio della circonferenza inscritta. Determinare anche in quali casi si ha l'uguaglianza.
- (b) Determinare il punto (o i punti) di un triangolo per cui risulta minima la somma delle distanze dalle rette che contengono i lati.
3. Per ogni intero positivo n poniamo

$$\psi(n) = \sum_{k=1}^n (k, n),$$

dove (k, n) indica il massimo comun divisore tra k ed n .

- (a) Dimostrare che la funzione ψ è moltiplicativa, cioè che $\psi(mn) = \psi(m)\psi(n)$ per ogni coppia di interi positivi m ed n relativamente primi.
- (b) Dimostrare che, per ogni intero positivo a , l'equazione $\psi(x) = ax$ ha almeno una soluzione.
4. Sia f una funzione da $\{1, 2, \dots, 1600\}$ in sé, tale che
- $f^{(2005)}(x) = x$ per ogni $x = 1, 2, \dots, 1600$ (con $f^{(2005)}$ intendiamo la funzione f composta con se stessa 2005 volte);
 - $f(1) = 1$.
- (a) Dimostrare che f ha almeno un altro punto fisso.
- (b) Determinare gli interi $n > 1600$ per cui la conclusione del punto precedente resta vera se sostituiamo 1600 con n .
5. Una circonferenza γ ed una retta l non si intersecano. Sia AB il diametro di γ perpendicolare ad l , con B più vicino ad l di A . Sia C un punto di γ diverso da A e B . La retta AC interseca l in D . La retta DE è tangente a γ in E , con B ed E che stanno dalla stessa parte di AC . La retta BE interseca l in F , e la retta AF incontra nuovamente γ in G . Sia infine H il simmetrico di G rispetto ad AB .

Dimostrare che F , C ed H sono allineati.

6. Sia N un intero positivo. Alberto e Barbara scrivono a turno un numero sulla lavagna, secondo le seguenti regole: inizia Alberto scrivendo 1 sulla lavagna; poi, se ad un certo turno un giocatore ha scritto un intero n sulla lavagna, al turno successivo l'altro giocatore scrive $n + 1$ o $2n$ a sua scelta, a patto di non scrivere un numero maggiore di N . Il primo giocatore che scrive N sulla lavagna ha vinto.
- (a) Determinare quale giocatore ha una strategia vincente per $N = 2005$.
 - (b) Determinare quale giocatore ha una strategia vincente per $N = 2004$.
 - (c) Determinare quanti sono gli interi $1 \leq N \leq 2005$ per cui Barbara ha una strategia vincente.

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

Risposte

A1. ...

A2. ...

A3. ...

A4. Tutti e soli i polinomi di secondo grado monici.

A5. (a) ...; (b) Non esiste.

A6. ...

A7. ...

A8. L'unica soluzione è la funzione $f(x) = x^2 + 1$.

C1. $7^n - 2 \cdot 6^n + 5^n$.

C2. ...

C3. 99 volte.

C4. Tutti quelli del tipo $4h \times 3k$ (con h e k interi positivi) e quelli del tipo $12h \times k$ (con h intero positivo e k intero ≥ 3 e diverso da 5).

C5. Non è raggiungibile.

C6. L'unico valore possibile è 5000.

C7. ...

C8. 2

G1. ...

G2. ...

G3. ...

G4. ...

G5. $\widehat{DAB} = 80^\circ$, $\widehat{ABC} = 80^\circ$, $\widehat{BCD} = 50^\circ$, $\widehat{CDA} = 150^\circ$.

G6. ...

G7. Posto $AP = x$, il minimo si ottiene per $x = \frac{bc(b + a \cos \gamma)}{a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma}$.

G8. ...

N1. $(2, 3)$ e $(3, 2)$.

N2. ...

N3. Solo la coppia $(1, 1)$ in entrambi i casi.

N4. $(5, 1)$ e $(6, 2)$.

N5. (a) p e tutti i primi congrui a 1 modulo p (quindi tutti i primi se $p = 2$).

(b) Tutti i primi congrui a 1 modulo p se p è dispari, tutti i primi se $p = 2$.

N6. ...

N7. ...

N8. Solo per $p = 7$.

TST1. ...

TST2. (a) ...; (b) Se il triangolo è equilatero la somma è costante, dunque ogni punto è di minimo; se il triangolo è isoscele e la base è il lato più corto, allora i punti di minimo sono tutti e soli i punti della base; in tutti gli altri casi il punto di minimo è il vertice da cui parte l'altezza più corta (cioè il vertice opposto al lato più lungo).

TST3. ...

TST4. (a) ...; (b) Non è più vera per nessun intero maggiore di 1600.

TST5. ...

TST6. (a) Alberto; (b) Alberto; (c) 31.

“Aiutini”

- A1. Usare le relazioni tra le radici e i coefficienti! Se un primo p divide a_n , allora divide una delle radici, ma allora divide tutti i termini che danno a_{n-1} tranne uno, e quindi non divide a_{n-1} .
- A2. Ci sono vari approcci:
- considerare 2 volte il primo addendo più il secondo e applicare AM–GM; ripetere l’operazione ciclicamente;
 - eliminare la condizione $abc = 1$ ponendo $a = x/y$, $b = y/z$, $c = z/x$ (trucco standard da ricordare!) e poi svolgere i calcoli (si può concludere usando 3 volte una AM–GM pesata, o la disuguaglianza di riarrangiamento);
 - detti x, y, z i 3 termini al primo membro, il secondo membro è somma di termini del tipo $x^{2/3}y^{1/3}$: la disuguaglianza risultante si dimostra facilmente con Hölder.
- A3. Ci sono vari approcci:
- omogenizzare, quindi porre $z = x/y$ e studiare il polinomio in z che si trova: è di grado alto, ma conosciamo la radice $z = 1$, di molteplicità almeno 2;
 - porre $S = x + y$ e $P = xy$: ci si riduce facilmente ad una disuguaglianza di terzo grado in P , di cui già conosciamo la radice (di molteplicità almeno 2) $P = 1$;
 - porre $x = 1 + \alpha$, $y = 1 - \alpha$.
- A4. Portare il $p(x)$ a destra. Cercare quindi di ridursi ad un’equazione del tipo $q(x+1) - q(x) = 2$. Qual è il grado di $q(x+1) - q(x)$ rispetto al grado di $q(x)$?
- A5. (a) È possibile costruirla a partire da ogni a . Usando d abbastanza grandi si ha sempre che $f(a) < f(a+d)$. Infine le progressioni che partono da a e hanno ragione $d, 2d, 4d, 8d, \dots$ non possono andare tutte male.
In alternativa si può utilizzare il principio del minimo intero. Dato a , consideriamo i valori $f(n)$, con $n > a$, che sono maggiori di $f(a)$ (ce ne sono perché altrimenti f non sarebbe iniettiva). Di questi ce ne sarà uno più piccolo di tutti, diciamo $f(m)$. Posto $d = m - a$, abbiamo finito.
- (b) Cercare di costruire un controesempio (si può fare con una funzione iniettiva e surgettiva) “a blocchi”, sfruttando le potenze di 3.
- A6. Usare ripetutamente che $a - b$ divide $p(a) - p(b)$ (fatto importante da ricordare!). Chi può essere $p(1)$? Se fosse dispari, tutti i termini della successione sarebbero dispari. Se fosse $2k$, con $k > 1$, tutti i termini della successione sarebbero congrui tra di loro modulo $\dots$. Ora si procede induttivamente: chi può essere $p(2)$?

- A7. Usando AM–CM trasformare la somma di radici nella radice di una somma; quindi elevare al cubo e omogenizzare. Si ottiene una disuguaglianza di grado alto la quale è il prodotto di due disuguaglianze che si dimostrano abbastanza facilmente.
- Un approccio alternativo consiste nell'applicare la disuguaglianza tra media $1/3$ -esima e media $1/2$ -esima, poi Cauchy-Schwarz e quindi concludere utilizzando in vario modo la disuguaglianza tra media armonica e aritmetica.
- A8. Trovare $f(0)$ e $f(1)$, dimostrare che f è pari, trovare una relazione che leghi $f(x+1)$ a $f(x)$ e $f(x-1)$. A questo punto si capisce come è fatta f su $\mathbb{Z}$. Per arrivare a $\mathbb{Q}$, porre $x = m/n$ e $y = n$: si trova un'altra frazione, sempre con denominatore n . Ponendo $x =$ la nuova frazione (eventualmente cambiata di segno) e $y = n$, si ritrova nuovamente la frazione m/n . Le due relazioni scritte danno un sistema lineare che permette di calcolare $f(m/n)$.
- C1. Alla fine l'insieme $\{1, \dots, n\}$ risulterà suddiviso in 7 parti, di cui 2 non vuote per ipotesi. Applicando il principio di inclusione-esclusione ...
- C2. Consideriamo la squadra che ha meno vittorie ...
- In alternativa si può anche procedere per induzione. Data una squadra, consideriamo l'insieme di quelle che essa ha battuto: se queste sono almeno 3, allora formano un sotto-torneo che verifica le ipotesi; se sono una o due, allora occorre procedere direttamente.
- Prestare particolare attenzione alle dimostrazioni ottenute “aggiungendo squadre”: spesso si rischia che siano per lo meno incomplete.
- C3. Colorando le stanze a scacchiera ...
- C4. Per prima cosa si dimostra che il numero dei pezzi deve essere pari (ad esempio colorando a scacchiera). Poi si dimostra che almeno un lato deve essere multiplo di 4 (questo si può fare in vari modi: colorando le caselle con “coordinate dispari”; con una colorazione a righe del tipo B-N-B-R; oppure con una colorazione a righe del tipo B-B-N-N seguita da una colorazione a righe del tipo N-B-B-N). Infine si dimostra che i casi rimanenti si possono comporre usando blocchi 4×3 .
- C5. In ogni “piano diagonale” si riesce ad individuare un invariante modulo 4.
- C6. Considerare l'insieme costituito dalle terne (s, c, S) in cui s è uno studente che è membro del club c , il quale a sua volta è membro della società S . Contare in due modi diversi il numero degli elementi di tale insieme.
- C7. Considerare l'indice k per cui la somma $a_1 + \dots + a_k$ risulta minima.
- C8. Indicare in vari modi il numero di parole di n lettere che terminano nei vari modi possibili (A, AA, AAA, ...). Scrivere le relazioni ricorrenti che le legano e cercare di semplificarle ...
- G1. Il quadrilatero $KLMN$ è un ... di area A questo punto basta suddividere $DNTM$ in due triangoli e ...

- G2. Ci sono almeno tre quadrilateri ciclici da sfruttare. Calcolando tutti gli angoli si vede che le altezze di ABC sono le bisettrici di JKL .
- G3. Ci sono almeno due approcci.
- L'ipotesi è equivalente a dire che ogni mediana è uguale alla semisomma delle due altezze uscenti dagli altri due vertici. Sommando su tutti i vertici ...
 - Consideriamo la mediana AM , e siano φ e ψ i due angoli in cui viene suddiviso l'angolo in A . L'ipotesi data dice che $\sin \varphi + \sin \psi = 1$. Usando la concavità della funzione seno si ha che $\varphi + \psi \geq \dots$
- G4. Ceva.
- G5. Sia F l'intersezione tra AC e l'asse del segmento AB . Sia E l'intersezione tra BD e l'asse del segmento AB . Sia G l'intersezione tra la retta AE e BC . Allora il triangolo EDG è equilatero, E è il circocentro di ABC (oppure il quadrilatero $EFCE$ è ciclico), i triangoli AEC , EFC , EGC sono isosceli, così come il triangolo DGC .
- G6. Intanto E ed F stanno uno dentro e uno fuori il triangolo originario. Poi si calcolano tutti gli angoli possibili e si ricava che HG ed FE formano angoli alterni interni uguali rispetto alla trasversale HB . Infine si osserva che AFE è simile al triangolo di partenza.
- G7. Porre $AP = x$ e calcolare tutto in funzione di a , b e $\cos \gamma$! La formula per il valore di x che realizza il minimo permette facilmente di ottenere una costruzione. Per la seconda domanda conviene usare i vettori, e sfruttare tutte le lunghezze che sono state calcolate.
- G8. Scrivere due equazioni calcolando la potenza dei due estremi della mediana rispetto alla circonferenza inscritta (le lunghezze dei segmenti di tangenza si calcolano tutte).
- N1. È possibile che p e q siano entrambi dispari (ragionare modulo 4)? Poi fattorizzare.
- N2. La tesi è equivalente a dimostrare che -7 è un residuo quadratico modulo 2^k , cioè che esiste a_k tale che $a_k^2 \equiv -7$ modulo 2^k . Per i k bassi a_k si trova a mano. Poi si procede induttivamente: a_{k+1} risulta uguale ad a_k oppure ad a_k più qualcosa di opportuno. In questo modo si dimostra che i residui quadratici modulo 2^k sono tutte e sole le classi congrue a 1 modulo 8 (per $k \geq 3$).
- In alternativa questo risultato può essere dimostrato osservando che i residui quadratici sono al più un quarto di tutte le classi dispari e che per ogni residuo k il numero degli elementi dispari a tali che $a^2 \equiv k$ modulo 2^k è sempre lo stesso (dunque è 4 come nel caso $k = 1$): da qui si conclude facilmente che tutte le classi congrue a 1 modulo 8 sono residui quadratici.
- N3. (a) Modulo 16 (o anche solo modulo 8). (b) Modulo 9 e 13.
- N4. I casi in cui 2^n ha una sola cifra si fanno a mano. Se 2^n ha almeno 2 cifre, allora deve essere $2^n \equiv 2^m$ modulo 100, quindi modulo 25, ma allora $m - n$ deve essere un multiplo di $\dots$, e pertanto m è molto più grande di n .

- N5. Intanto $f(x) = (x^p - 1)/(x - 1)$. Quali sono i primi che possono dividere sia il numeratore, sia il denominatore? Quali sono i primi che possono dividere il numeratore, ma non il denominatore? Affrontando questo punto ci si riduce alla congruenza $n^p \equiv 1$ modulo q , la quale, con ragionamenti sull'ordine moltiplicativo, porta alla tesi. Occorre poi verificare che tutti i primi congrui a 1 modulo p vanno bene, e qui può tornare utile il generatore. Per la seconda domanda si procede in modo analogo: l'unica differenza sta nel mostrare che se $n \equiv 1$ modulo p , allora $f(n) \equiv p$ modulo p^2 .
- N6. Utilizzare la formula generale per le successioni per ricorrenza, la quale vale anche modulo m . Le ipotesi fatte su m sono quelle che permettono di calcolare la radice di 5 modulo m , e di dividere per due il risultato ottenuto. Non resta ora che fare in modo che nella formula risolutiva ci sia un solo addendo.
- N7. Fare in modo che a ed n abbiano necessariamente un primo in comune, poi mostrare che quello che c'è a sinistra è troppo piccolo rispetto a quello che c'è a destra.
- N8. Sottrarre, poi usare che x e y non possono essere troppo grandi rispetto a p per capire chi sono $x + y$ e $x - y$.
- TST1. Dimostrare che esiste uno studente contro cui cospirano almeno ...terne. Se le terne che cospirano contro il poveretto coinvolgono k studenti, allora ...
- TST2. (a) Dimostrare che le distanze del baricentro dai lati sono uguali ad un terzo delle altezze, quindi usando la formula per il raggio della circonferenza inscritta ...
 (b) Indicate con d_a, d_b, d_c le tre distanze, allora si ha il vincolo che $ad_a + bd_b + cd_c = 2S$. Supponendo ora che $a > b > c$ dimostrare che deve essere $d_b = d_c = 0$. Ragionare in modo analogo per il triangolo isoscele ed equilatero.
- TST3. (a) Occorre cercare qualche formula alternativa per ψ , ad esempio calcolando quanti sono i k per cui $(k, n) = d$.
 (b) Trovata la formula per $\psi(p^k)$ basta applicarla alle potenze di 2.
- TST4. Intanto f è una permutazione. Ogni punto che non è fisso deve appartenere ad un ciclo la cui lunghezza è un divisore di 2005.
- TST5. Dimostrare che EDF è isoscele, che DFC e DAF sono simili, quindi che $H\hat{C}A = D\hat{C}F$.
- TST6. È abbastanza semplice vedere che tutti gli N dispari sono favorevoli ad Alberto. Per i pari si consiglia di giocare un po' di partite con N bassi e cercare di collegare l'andamento della partita alla scrittura di N in base 2. Il punto fondamentale della dimostrazione consiste poi nel collegare la strategia nel caso N alla strategia nei casi $4N$ e $4N + 2$.

Team Selection Test – Soluzioni

Per ogni problema della gara finale riportiamo

- una soluzione completa, come dovrebbe essere scritta durante una gara;
- alcune idee e osservazioni su possibili soluzioni alternative (spesso non complete);
- alcuni modi classici di perdere punti pur avendo capito come si risolveva il problema.

SOLUZIONE PROBLEMA 1

Le cospirazioni sono tante quante le terne di studenti, quindi

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6},$$

e pertanto esisterà uno studente che è vittima di almeno

$$\frac{(n-1)(n-2)}{6}$$

cospirazioni. Sia k il numero degli studenti coinvolti nelle cospirazioni contro questo poveretto. Allora le terne composte da questi k studenti sono almeno tante quante le cospirazioni di cui il poveretto è vittima, e quindi

$$\frac{k^3}{6} \geq \frac{k(k-1)(k-2)}{6} \geq \frac{(n-1)(n-2)}{6},$$

da cui la tesi.

SOLUZIONI ALTERNATIVE

Boh...

COME PERDERE PUNTI

Studiando male la disequazione $k(k-1)(k-2) \geq (n-1)(n-2)$.

SOLUZIONE PROBLEMA 2

Parte (a). Sia ABC il triangolo (notazioni standard), sia M il punto medio di BC , G il baricentro, K la proiezione di G su BC , e H il piede dell'altezza uscente da A . Per la similitudine tra i triangoli AHM e GKM e la nota proprietà del baricentro, si avrà che

$$\frac{GK}{AH} = \frac{GM}{AM} = \frac{1}{3},$$

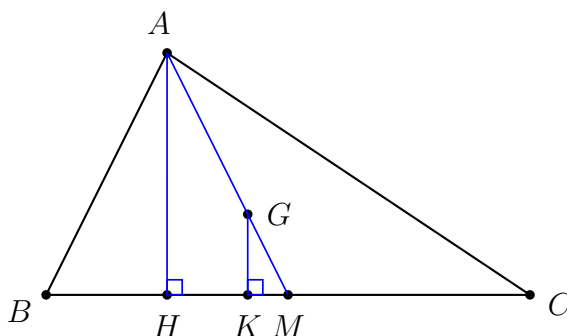
da cui

$$GK = \frac{AH}{3} = \frac{2S}{3a}.$$

Calcolando il modo analogo le distanze di G dai rimanenti lati, e ricordando che il raggio della circonferenza inscritta è uguale all'area divisa per il semiperimetro, la disuguaglianza da dimostrare si riduce a

$$\frac{2S}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 2S \frac{3}{a+b+c},$$

la quale è sostanzialmente l'usuale disuguaglianza tra media aritmetica e media armonica. Si ha uguaglianza se e solo se $a = b = c$, cioè se e solo se il triangolo è equilatero.



Parte (b). Sia ora P un punto interno, o sul bordo del triangolo, e siano d_a , d_b , d_c le sue distanze dai lati BC , CA , AB , rispettivamente. Poiché ABC è l'unione dei 3 triangoli ABP , BCP , CAP , si avrà che

$$a \cdot d_a + b \cdot d_b + c \cdot d_c = 2S. \quad (2.1)$$

Il problema si riduce quindi a minimizzare $d_a + d_b + d_c$ sotto il vincolo dato dalla (2.1). A questo punto distinguiamo 3 casi.

- Supponiamo che il triangolo sia equilatero. Detta l la lunghezza del lato, la (2.1) si riduce a

$$l(d_a + d_b + d_c) = 2S.$$

Ne segue che la somma delle distanze dai lati è costante all'interno del triangolo (cioè non dipende da P), ed è uguale alla lunghezza dell'altezza.

- Supponiamo che il triangolo sia isoscele, ma non equilatero. Allora si hanno due ulteriori casi, a seconda che la base sia lunga più o meno degli altri due lati.

– Se $a > b = c$, allora dalla (2.1) si ricava che

$$a(d_a + d_b + d_c) \geq a \cdot d_a + b \cdot d_b + c \cdot d_c = 2S,$$

e quindi la somma delle distanze è sempre maggiore o uguale di $2S/a$, dunque dell'altezza relativa alla base (quella più corta), e si ha uguaglianza se e solo se $d_b = d_c = 0$, e cioè se e solo se il punto P è il vertice.

– Se $a < b = c = l$, allora dalla (2.1) si ricava che

$$l(d_a + d_b + d_c) \geq a \cdot d_a + b \cdot d_b + c \cdot d_c = 2S,$$

e quindi la somma delle distanze è sempre maggiore o uguale di $2S/l$, dunque dell'altezza relativa ai lati uguali (quella più corta), e si ha uguaglianza se e solo se $d_a = 0$, e cioè se e solo se il punto P sta sulla base.

- Supponiamo che il triangolo sia scaleno. Senza perdita di generalità supponiamo che sia $a < b < c$. Allora dalla (2.1) si ricava che

$$c(d_a + d_b + d_c) \geq a \cdot d_a + b \cdot d_b + c \cdot d_c = 2S,$$

e quindi la somma delle distanze è sempre maggiore o uguale di $2S/c$, dunque ancora una volta dell'altezza più corta, e si ha uguaglianza se e solo se $d_a = d_b = 0$, e cioè se e solo se $P = C$.

SOLUZIONI ALTERNATIVE

Una soluzione molto rapida, anche se “professionistica”, della parte (b) si ottiene osservando che la distanza da una retta è una funzione affine (cioè ha come grafico un piano) in ciascuno dei due semipiani delimitati dalla retta. Di conseguenza la somma delle distanze dalle rette che contengono i lati è una funzione affine nel triangolo e pertanto, essendo sia concava sia convessa, assumerà il suo minimo (ed anche il suo massimo) in un punto estremale, cioè in uno dei tre vertici. Poichè il valore della funzione in un vertice è uguale alla lunghezza dell'altezza uscente da quel vertice, abbiamo che il minimo si realizza nel vertice da cui esce l'altezza più corta. Se tale vertice è unico (caso del triangolo scaleno o del triangolo isoscele in cui la base è il lato più lungo) il punto di minimo è unico; se da due vertici esce l'altezza più corta (caso del triangolo isoscele in cui la base è il lato più corto), allora l'insieme dei punti di minimo è l'involuppo convesso dei due punti di minimo (cioè la base del triangolo); se le altezze sono tutte uguali (caso del triangolo equilatero), allora l'insieme dei punti di minimo è l'involuppo convesso dei tre vertici, cioè tutto il triangolo.

Una soluzione più “geometrica” si può ottenere applicando ripetutamente il lemma per il quale “la somma delle distanze di un qualunque punto della base di un triangolo isoscele dai rimanenti lati è uguale alla lunghezza dell'altezza rispetto ai lati stessi”. Mediante tale lemma si può diminuire la somma spostando il punto prima sul bordo, poi nel vertice desiderato.

COME PERDERE PUNTI

Nella prima parte non trattando correttamente il caso dell'uguaglianza, cosa molto delicata per dimostrazioni basate sulla disuguaglianza di riarrangiamento.

Nella seconda parte non descrivendo correttamente la casistica dei punti di minimo nel caso del triangolo equilatero ed isoscele.

SOLUZIONE PROBLEMA 3

Parte (a). Indichiamo con ϕ la funzione di Eulero. Per ogni divisore d di n , esistono esattamente $\phi(n/d)$ interi positivi $k \leq n$ tali che $(k, n) = d$. Infatti tali k si ottengono tutti e soli moltiplicando d per un intero positivo, minore o uguale a n/d , e che non abbia fattori primi in comune con n/d . Possiamo pertanto riscrivere la definizione di ψ come

$$\psi(n) = \sum_{d|n} d\phi\left(\frac{n}{d}\right). \quad (3.1)$$

Sia ora d un divisore di mn . Se m ed n sono relativamente primi, allora possiamo scrivere in modo unico $d = d_1d_2$, dove d_1 è un divisore di m e d_2 è un divisore di n . Pertanto, sfruttando la moltiplicatività della funzione ϕ , avremo che

$$\begin{aligned} \psi(mn) &= \sum_{d|mn} d\phi\left(\frac{mn}{d}\right) \\ &= \sum_{d_1|m, d_2|n} d_1d_2\phi\left(\frac{mn}{d_1d_2}\right) \\ &= \sum_{d_1|m, d_2|n} d_1\phi\left(\frac{m}{d_1}\right) d_2\phi\left(\frac{n}{d_2}\right) \\ &= \left(\sum_{d_1|m} d_1\phi\left(\frac{m}{d_1}\right)\right) \left(\sum_{d_2|n} d_2\phi\left(\frac{n}{d_2}\right)\right) \\ &= \psi(m)\psi(n). \end{aligned}$$

Parte (b). Se p è un numero primo, dalla (3.1) segue che

$$\begin{aligned} \psi(p^k) &= \phi(p^k) + p\phi(p^{k-1}) + p^2\phi(p^{k-2}) + \dots + p^{k-1}\phi(p) + p^k \\ &= (p^k - p^{k-1}) + p(p^{k-1} - p^{k-2}) + \dots + p^{k-1}(p - 1) + p^k \\ &= (k+1)p^k - kp^{k-1} \end{aligned}$$

per ogni intero positivo k .

Dato un intero positivo a , ponendo $x = 2^{2a-2}$ con facili calcoli avremo pertanto che

$$\psi(x) = \psi(2^{2a-2}) = (2a-1)2^{2a-2} - (2a-2)2^{2a-3} = a2^{2a-2} = ax.$$

SOLUZIONI ALTERNATIVE

Una soluzione alternativa del punto (a) può essere la seguente. Osserviamo intanto che se m ed n sono relativamente primi, allora $(k, mn) = (k, m) \cdot (k, n)$. Ora (k, mn) dipende solo dalla classe di congruenza di k modulo mn , e analogamente per (k, m) e (k, n) . Gli interi $k = rm + sn$, con $1 \leq r \leq n$ e $1 \leq s \leq m$, rappresentano tutte e sole le classi di

congruenza modulo mn , ed inoltre $(rm + sn, m) = (sn, m) = (s, m)$, sempre perché m ed n sono relativamente primi. Pertanto

$$\begin{aligned}
 \psi(mn) &= \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^m (rm + sn, m)(rm + sn, n) \\
 &= \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^m (sn, m)(rm, n) \\
 &= \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^m (s, m)(r, n) \\
 &= \psi(m)\psi(n).
 \end{aligned}$$

COME PERDERE PUNTI

Non dicendo chiaramente che ogni divisore di mn si scrive in modo unico come prodotto di un divisore di m ed un divisore di n (in una gara, per sicurezza, due righe di dimostrazione non guasterebbero).

SOLUZIONE PROBLEMA 4

Parte (a). Poiché f , composta con se stessa 2005 volte, è iniettiva e surgettiva, allora anche f è iniettiva e surgettiva, dunque è una permutazione. Consideriamo ora un ciclo che compare nella decomposizione di tale permutazione: la sua lunghezza dovrà essere un divisore di 2005 minore di 1600, quindi o 1, o 5, o 401. Se per assurdo 1 fosse l'unico punto fisso di f , allora i restanti 1599 elementi dovrebbero far parte o di un ciclo di lunghezza 5 o di un ciclo di lunghezza 401. Si avrebbe pertanto che

$$5a + 401b = 1599,$$

per opportuni interi non negativi a (il numero dei cicli di lunghezza 5) e b (il numero dei cicli di lunghezza 401). Tuttavia si vede facilmente che non esistono a e b con questa proprietà: b infatti può essere solo 0, 1, 2, 3, e in tutti i casi $1599 - 401b$ non risulta divisibile per 5.

Parte (b). Se sostituiamo 1600 con un qualunque intero n più grande, allora la permutazione f può avere solo 1 come punto fisso. In tal caso infatti ci riduciamo a risolvere l'equazione

$$5a + 401b = n - 1,$$

la quale ha soluzioni intere e non negative per ogni $n \geq 1601$: basta infatti prendere $b = 0, 1, 2, 3, 4$ a seconda della classe di congruenza di $n - 1$ modulo 5. Possiamo così fare in modo che 1 sia un punto fisso di f , ed i restanti $n - 1$ elementi appartengano a cicli di lunghezza 5 o 401.

SOLUZIONI ALTERNATIVE

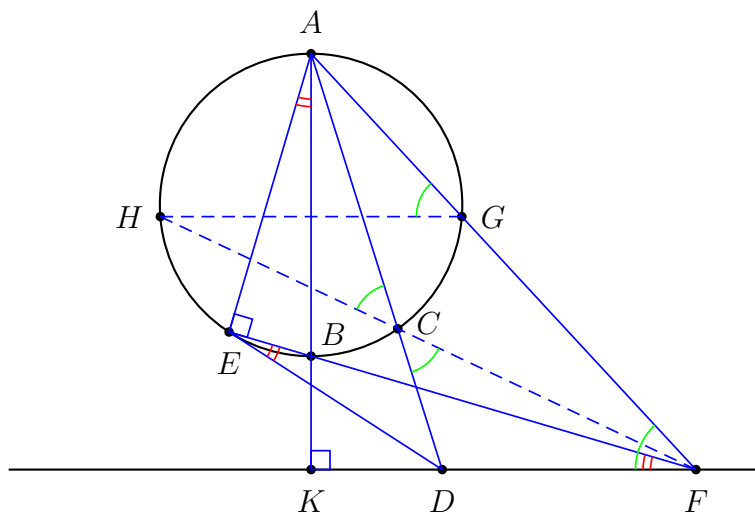
Si poteva usare il seguente fatto generale, utile da ricordare: “se m ed n sono interi positivi relativamente primi, allora il più grande intero che *non* si può esprimere nella forma $am + bn$, con a e b interi non negativi, è $mn - m - n$ ”.

COME PERDERE PUNTI

Usando strumenti tipici della teoria delle permutazioni, tipo la decomposizione in cicli, senza aver prima verificato che f è una permutazione, cioè iniettiva e surgettiva.

SOLUZIONE PROBLEMA 5

Indichiamo con K l'intersezione tra AB e la retta l .



Step 1. Dimostriamo intanto che il triangolo EDF è isoscele. Infatti

$$D\hat{E}F = E\hat{A}K, \quad (5.1)$$

in quanto angolo alla circonferenza e sua posizione limite. Inoltre i triangoli EBA e KBF sono simili in quanto hanno l'angolo in B opposto al vertice e sono rettangoli (ricordiamo che AB è un diametro): di conseguenza

$$E\hat{A}K = E\hat{F}D. \quad (5.2)$$

Mettendo insieme la (5.1) e la (5.2) abbiamo la tesi.

Step 2. Dimostriamo che i triangoli DFC e DAF sono simili. Avendo l'angolo in D in comune, ci basta dimostrare che $DC : DF = DF : DA$, e cioè che $DF^2 = DC \cdot DA$. Poiché dal punto precedente sappiamo che $DF = DE$, ci basta dimostrare che $DE^2 = DC \cdot DA$, e questo è vero perché entrambe i membri sono la potenza di D rispetto alla circonferenza.

Step 3. Dimostriamo che $H\hat{C}A = D\hat{C}F$, il che permette di concludere che H , C , ed F sono allineati. Infatti dalla similitudine dello step 2 possiamo concludere che $D\hat{C}F = D\hat{F}A$; a sua volta $D\hat{F}A = H\hat{G}A$, in quanto corrispondenti rispetto alle parallele HG e DF tagliate dalla trasversale AF ; infine $H\hat{G}A = H\hat{C}A$, poiché entrambe insistono sulla corda HA . Questo completa la dimostrazione.

SOLUZIONI ALTERNATIVE

Nella soluzione presentata la (5.2) segue anche, più brevemente, dalla ciclicità del quadrilatero $FKEA$.

Un'altra tesi equivalente all'allineamento è che $C\hat{H}G = C\hat{F}D$. Questa uguaglianza di angoli si dimostra esattamente come nella soluzione presentata, mostrando che entrambi questi angoli sono uguali a $D\hat{A}F$.

Tra le proprietà della costruzione, che potrebbero essere alla base di approcci alternativi, notiamo che DG è tangente alla circonferenza e i punti H , E , K sono allineati.

L'approccio analitico utilizzando le coordinate di C come parametro (scritto nella forma $(\cos \theta, \sin \theta)$ avendo posto l'origine nel centro della circonferenza) sembra portare a calcoli intrattabili. Le cose sembrano andare relativamente meglio se si usa come parametro il coefficiente angolare di DE , dopo aver notato che tale coefficiente determina univocamente la figura.

COME PERDERE PUNTI

Una fonte classica di errori consiste nel fare la figura troppo bene, ed usare strada facendo che $\widehat{HCA} = \widehat{DCF}$ in quanto opposti al vertice, oppure che $\widehat{CHG}$ e $\widehat{CFD}$ sono alterni interni. L'unico problema è che tali angoli sono uguali solo se abbiamo già dimostrato che H , C , F sono allineati. In questo modo si finisce per dimostrare la tesi avendola assunta come ipotesi, e questo modo uno si gioca praticamente tutti i punti!

SOLUZIONE PROBLEMA 6.

Dimostriamo più in generale che Barbara ha una strategia vincente se e solo se N , scritto in base 2, ha tutte le cifre di posto dispari (a partire da sinistra) uguali a 0.

Sulla base di questo è facile rispondere alle 3 domande. Infatti tutti i numeri dispari (quindi in particolare 2005) terminano in base 2 con la cifra 1, dunque sono favorevoli ad Alberto; analogamente, tutti i numeri congrui a 4 modulo 8 (quindi in particolare 2004) hanno la scrittura in base 2 che termina con le cifre 100 e dunque, avendo la terza cifra uguale a 1, sono favorevoli ad Alberto. Ricordando che 2005 è compreso tra 2^{10} e 2^{11} , gli interi positivi minori di 2005 si scrivono in base 2 utilizzando al più 11 cifre; di questi, quelli favorevoli a Barbara sono tutti e soli quelli che in base 2 si scrivono nella forma (si noti che l'undicesima cifra è necessariamente nulla, dunque sono tutti numeri minori di 1024)

$$* 0 * 0 * 0 * 0 * 0,$$

in cui ogni $*$ può essere uno 0 o un 1, con la condizione che almeno una cifra 1 ci sia. È quindi evidente che ci sono 31 possibilità favorevoli a Barbara.

Per dimostrare l'enunciato generale rappresentiamo N in base 2, poi suddividiamo le cifre a blocchi di 2 a partire da sinistra, e ragioniamo per induzione sul numero dei blocchi. In questa forma si tratta di dimostrare che N è favorevole a Barbara se e solo se tutti i suoi blocchi sono del tipo 00 o del tipo 10.

Se c'è un solo blocco, cioè per $N = 1, 2, 3$ la partita non ha molta storia, ed è evidente che Alberto vince per $N = 1$ e per $N = 3$ (cioè se l'unico blocco è 01 o 11), mentre Barbara vince per $N = 2$ (cioè se l'unico blocco è 10).

Sia ora N un numero che si scrive usando $k + 1$ blocchi, e sia M il numero ottenuto da N eliminando il blocco più a sinistra. Allora N può essere solo $4M$, $4M + 1$, $4M + 2$, $4M + 3$. Dobbiamo ora dimostrare che

- *claim 1*: se M è favorevole ad Alberto, allora $4M$, $4M + 1$, $4M + 2$, $4M + 3$ sono tutti favorevoli ad Alberto;
- *claim 2*: se M è favorevole a Barbara, allora $4M + 1$, e $4M + 3$ sono favorevoli ad Alberto, mentre $4M$ e $4M + 2$ sono favorevoli a Barbara.

Questo basterebbe per concludere la dimostrazione: infatti N risulterebbe favorevole a Barbara se e solo se M è favorevole a Barbara (cioè per ipotesi induttiva se tutti i suoi blocchi sono 10 o 00) e l'ultimo blocco aggiunto a sinistra è 10 o 00.

Per dimostrare il claim 1 ed il claim 2, osserviamo intanto che per N dispari Alberto ha una strategia vincente: se infatti si limita ad aggiungere 1 al numero scritto da Barbara, Alberto scriverà sempre numeri dispari, costringendo Barbara a scrivere sempre solo numeri pari.

Per completare il claim 1, ci resta da dimostrare che, se M è favorevole ad Alberto, allora anche $4M$ e $4M + 2$ lo sono. In questo caso Alberto può giocare così: finché sulla lavagna ci sono numeri minori o uguali ad M , Alberto gioca come se dovesse arrivare ad M ; appena Barbara scrive un numero maggiore di M (e sarà lei la prima a farlo), Alberto risponde raddoppiando. In questo modo egli avrà scritto un numero pari maggiore o uguale di $2M + 2$:

pertanto non saranno più possibili raddoppi e la partita proseguirà con aggiunte di uno fino alla vittoria finale di Alberto (che scriverà sempre un numero pari).

Per completare il claim 2, ci resta da dimostrarre che, se M è favorevole a Barbara, allora anche $4M$ e $4M + 2$ lo sono. La dimostrazione è ovviamente analoga al caso precedente, solo con Alberto e Barbara scambiati.

SOLUZIONI ALTERNATIVE

Il caso $N = 2004$ poteva anche essere trattato direttamente, senza ricorrere alla caratterizzazione generale. Infatti una strategia vincente per Alberto è la seguente: Alberto aggiunge sempre 1 al numero scritto da Barbara finché sulla lavagna sono scritti numeri minori o uguali a 501; appena Barbara scrive un numero maggiore (e sarà lei per forza a farlo in quanto Alberto, scrivendo numeri dispari, può arrivare fino a 501) Alberto lo raddoppia immediatamente, scrivendo quindi un numero pari maggiore o uguale a 1004 (e minore di 2004); da quel punto il poi non sono più possibili raddoppi e Alberto, che d'ora in poi scrive solo numeri pari, arriva alla vittoria. Si noti come questo ragionamento sia un caso particolare di quello che interviene nel punto principale della dimostrazione.

Gli interi N favorevoli a Barbara si potevano anche caratterizzare come tutti e soli quelli che in base 4 si scrivono usando solo cifre 0 o cifre 2.

COME PERDERE PUNTI

Con ragionamenti di questo tipo: “chi scrive 2004 vince, dunque chi scrive 1002 perde, dunque chi scrive 501 vince, dunque chi scrive 500 perde, ...”, e così via compilando liste di numeri vincenti e perdenti fino ad arrivare a numeri bassi noti. Il problema è che la partita potrebbe seguire binari diversi, e non passare mai per i numeri indicati.