Algebra

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

1. Siano p e q interi positivi, e sia

$$P(x) = (x+1)^p(x-3)^q = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

   Determinare tutte le coppie (p, q) di interi positivi per cui si ha che $a_1 = a_2$.

2. Sia $P(x)$ il polinomio di grado n tale che $P(k) = 1/k$ per $k = 1, 2, \ldots, n+1$.
   Determinare $P(n+2)$.

3. Siano x, y, z numeri reali non negativi tali che $x + y + z = 1$. Determinare il massimo valore possibile per ciascuna delle seguenti espressioni

$$\sum_{\text{sym}} x^2y, \qquad \sum_{\text{cyc}} x^2y.$$

4. Siano a, b, c numeri reali positivi tali che

$$a + b + c \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

   (a) Dimostrare che

$$a + b + c \geq \frac{3}{abc}.$$

   (b) Determinare se necessariamente si ha che $abc \geq 1$.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

5. Siano a, b, c le lunghezze dei lati di un triangolo, e siano m_a, m_b, m_c le lunghezze delle relative mediane.

   Dimostrare che
   $$\left(\frac{a}{m_a}+\frac{b}{m_b}+\frac{c}{m_c}\right)^2 \geq 4\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

6. Siano $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numeri reali positivi.

   Dimostrare che
   $$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_1+x_2}+\ldots+\frac{1}{1+x_1+\ldots+x_n} < \sqrt{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}.$$

7. Determinare tutte le quaterne di interi (a, b, m, n), con $m > n > 1$, per cui il polinomio $x^n + ax + b$ divide il polinomio $x^m + ax + b$.

8. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che
   $$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + 2xy + 1$$
   per ogni coppia di numeri reali x e y.

Combinatoria

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

1. Nei 35 giorni che hanno preceduto questo stage un partecipante si è allenato secondo il seguente programma: ogni giorno ha lavorato un numero intero di ore, maggiore od uguale a 1, ed in tutto ha lavorato un numero di ore minore od uguale di 60.

   Dimostrare che esiste un gruppo di giorni consecutivi in cui ha lavorato in totale per 13 ore.

2. Le caselle di una tabella $n \times n$ sono colorate a scacchiera nel modo usuale. Ad ogni mossa è possibile scegliere un quadratino 2×2 ed invertire il colore delle caselle in esso contenute.

   Determinare per quali n è possibile arrivare ad avere una tabella monocromatica.

3. Sia $n \geq 2$ un intero, e sia $M = \{1, 2, \ldots, n\}$. Per ogni $k = 1, 2, \ldots, n-1$ definiamo

$$x_k = \frac{1}{n+1} \sum_A (\min A + \max A),$$

   dove la somma si intende estesa a tutti i sottoinsiemi A di M con esattamente k elementi.

   Dimostrare che i numeri $x_1, \ldots, x_{n-1}$ sono tutti interi, e non sono tutti divisibili per 4.

4. Alberto e Barbara, a turno, scrivono sulla lavagna dei divisori di 2006!. Non è possibile scrivere 2 volte lo stesso divisore. Non appena il massimo comun divisore di tutti i numeri scritti fino a quel momento è 1, chi ha scritto l'ultimo numero perde la partita. Alberto ha la prima mossa.

   Determinare quale dei 2 giocatori ha una strategia vincente.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

5. Sono date n palline numerate da 1 ad n. Determinare quanti sono i modi di distribuire queste palline tra 9 persone A, B, $\ldots$, I in modo tale che A riceva tante palline quante ne ricevono B, C, D, E messi insieme (si intende che 2 distribuzioni sono considerate identiche solo se ognuna delle 9 persone riceve in entrambi i casi le palline con gli stessi numeri).

6. Una gara di matematica tra $2n$ studenti viene organizzata secondo il seguente schema. Ogni studente propone un problema; i problemi vengono poi raccolti e distribuiti in modo che ogni partecipante ne riceva uno. La gara si definisce *leale* se esiste un sottoinsieme di n studenti che hanno ricevuto i problemi proposti dagli altri n.

   Dimostrare che il numero dei modi di distribuire i problemi ottenendo una gara leale è un quadrato perfetto.

7. In una casa vi sono varie stanze. Ogni stanza contiene almeno 3 lampadine. Il numero totale di lampadine è pari. Ogni lampadina condivide un interruttore con una ed una sola delle altre: mediante tale interruttore è possibile cambiare contemporaneamente lo stato acceso/spento di entrambe le lampadine.

   Dimostrare che, a partire da qualunque configurazione iniziale (nella quale non è detto che 2 lampadine con lo stesso interruttore siano entrambe accese od entrambe spente) è possibile agire sugli interruttori in modo che alla fine ci sia, in ogni stanza, almeno una lampadina accesa ed almeno una lampadina spenta.

8. Ad una gara matematica partecipano 10 studenti. Ogni studente riceve 4 problemi da risolvere. Comunque si scelgano 2 studenti, questi hanno al più un problema in comune.

   Determinare il minimo numero di problemi necessario.

Geometria

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

1. Sia ABC un triangolo, sia I il suo incentro, e sia M l'ulteriore intersezione della retta AI con la circonferenza circoscritta ad ABC. Sia infine I_A il centro della circonferenza ex-inscritta tangente al lato BC ed al prolungamento dei lati AB ed AC.

   Dimostrare che i punti B, C, I, I_A giacciono su una stessa circonferenza con centro in M.

2. Sia ABC un triangolo. Siano AM e CN due mediane, e sia G il baricentro.

   Dimostrare che il quadrilatero $BMGN$ è circoscrittibile se e solo se ABC è isoscele sulla base AC.

3. Siano BB_1 e CC_1 due altezze di un triangolo ABC. Sia r la perpendicolare ad AC passante per A.

   Dimostrare che le rette r, BC e B_1C_1 sono concorrenti se e solo se l'ortocentro è il punto medio di BB_1.

4. Sia ABC un triangolo e siano M ed N i punti medi di AB ed AC, rispettivamente. Sia r una retta passante per A, e siano Q ed R le proiezioni di B e C su r. Sia P l'intersezione di QM e RN.

   Determinare il luogo dei punti P al variare di r tra tutte le rette che passano per A.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

5. Due circonferenze Γ_1 e Γ_2 sono tangenti esternamente ed hanno raggi r_1 ed r_2, rispettivamente, con $r_2 > r_1$. La retta t_1 è tangente a Γ_1 e Γ_2 in A e D, rispettivamente. La retta t_2, parallela a t_1, è tangente a Γ_1 ed interseca Γ_2 in E ed F. La retta t_3 passa per D ed incontra nuovamente t_2 in B e Γ_2 in C.

   Dimostrare che la retta t_1 è tangente alla circonferenza circoscritta ad ABC.

6. In un triangolo ABC si ha che $AB + BC = 3AC$. Sia I l'incentro e siano D ed E i punti in cui la circonferenza inscritta è tangente ai lati AB e BC, rispettivamente. Siano K ed L i simmetrici di D ed E rispetto ad I.

   Dimostrare che il quadrilatero $ACKL$ è ciclico.

7. (a) Sia ABC un triangolo, H il suo ortocentro, P un punto che sta sulla circonferenza circoscritta. Indichiamo con $(P; ABC)$ la retta di Simson ottenuta da P (cioè la retta che passa per le proiezioni di P sui lati del triangolo)

   Dimostrare che $(P; ABC)$ passa per il punto medio del segmento HP.

   (b) Sia $ABCDEF$ un esagono i cui vertici giacciono tutti sulla stessa circonferenza. Dimostrare che, se $CDEF$ è un rettangolo, allora le rette $(A; BDF)$, $(B; ACE)$, $(D; ABF)$, $(E; ABC)$ concorrono.

8. Sia ABC un triangolo. Sia O il centro di una circonferenza che passa per A e C e interseca AB e BC in N e K, rispettivamente; sia M l'intersezione tra le circonferenze circoscritte ad ABC e a BNK, distinta da B.

   Dimostrare che OM e MB sono perpendicolari.

Teoria dei numeri

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

1. Determinare il più piccolo intero positivo che non si può scrivere nella forma

$$\frac{2^a - 2^b}{2^c - 2^d},$$

con a, b, c, d interi positivi.

2. Determinare tutte le soluzioni intere positive dell'equazione

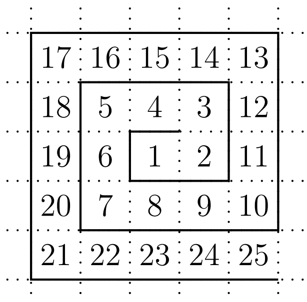
$$3^x = 2^x y + 1.$$

3. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$n^8 - p^2 = n^2 + p^5,$$

in cui n è un intero positivo e p è un primo.

4. Su una scacchiera infinita i numeri interi positivi sono scritti in ordine lungo una spirale: si parte da 1 e si procede allargandosi girando in senso antiorario, come in figura.



Chiamiamo "semiretta destra" della scacchiera l'insieme delle caselle formato da una casella C e da tutte le caselle che si trovano nella riga di C e a destra di C.

Determinare per quali numeri primi p esiste almeno una semiretta destra le cui caselle non contengono multipli di p.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

5. Determinare tutte coppie (a, b) di numeri interi positivi tali che $a > b$ e

$$(a-b)^{ab} = a^b \cdot b^a.$$

6. Siano a e b interi positivi tali che $a^n + n$ divide $b^n + n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

   Dimostrare che $a = b$.

7. Determinare tutte le terne di numeri primi (p, q, r) tali che

$$p|q^r + 1, \qquad q|r^p + 1, \qquad r|p^q + 1.$$

8. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due polinomi non costanti a coefficienti interi con massimo comune divisore uguale ad 1.

   Dimostrare che esistono infiniti numeri primi p per cui esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $p|f(n)$ ma $p \nmid g(n)$.

Team Selection Test

1. Determinare tutte le stringhe $\mathcal{S}$ costituite da 66 lettere A e 33 lettere B che godono della seguente proprietà: per ogni n, con $1 \leq n \leq 99$, il numero di stringhe che si possono comporre utilizzando le prime n lettere di $\mathcal{S}$ è dispari.

2. Sia ABC un triangolo, sia H il suo ortocentro e siano L, M, N i punti medi dei lati AB, BC, CA, rispettivamente.

   Dimostrare che ABC è acutangolo se e solo se

   $$HL^2 + HM^2 + HN^2 < AL^2 + BM^2 + CN^2.$$

3. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tali che

   $$f(m - n + f(n)) = f(m) + f(n)$$

   per ogni coppia di interi m ed n.

4. Le circonferenze γ_1 e γ_2 si incontrano in 2 punti Q ed R e sono tangenti internamente ad una circonferenza γ nei punti A_1 ed A_2, rispettivamente. Sia P un punto di γ, diverso da A_1 ed A_2. Sia B_1 l'ulteriore intersezione tra PA_1 e γ_1, e sia B_2 l'ulteriore intersezione tra PA_2 e γ_2.

   (a) Dimostare che la tangente in B_1 a γ_1 è parallela alla tangente in B_2 a γ_2.

   (b) Dimostrare che la retta B_1B_2 è tangente a γ_1 e γ_2 se e solo se P, Q ed R sono allineati.

5. Per ogni intero positivo n indichiamo con A_n l'insieme degli interi a tali che $1 \leq a \leq n$ ed n divide $a^n + 1$.

   (a) Determinare per quali n si ha che $A_n \neq \emptyset$.

   (b) Determinare per quali n si ha che A_n ha un numero pari e non nullo di elementi.

   (c) Determinare se esiste un intero n per cui A_n ha esattamente 130 elementi.

6. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti complessi tale che $p(0) \neq 0$.

   Dimostrare che esiste un polinomio multiplo di $p(x)$ i cui coefficienti sono tutti (dal termine noto fino a quello del monomio di grado massimo) numeri reali positivi se e solo se $p(x)$ non ha radici reali positive.

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

Risposte

A1. Ci sono 2 famiglie infinite di soluzioni (k è un qualunque intero positivo):

- $(p, q) = (3k(12k - 1), 3k(4k + 1))$;
- $(p, q) = (3(2k - 1)(4k - 1), 3k(4k - 1))$.

A2. $p(n + 2) = \dfrac{1 + (-1)^n}{n + 2}$.

A3. Per la somma simmetrica il massimo è $1/4$, per quella ciclica è $4/27$.

A4. (a) ... (b) No.

A5. ...

A6. ...

A7. Ci sono 7 famiglie infinite di soluzioni (nelle varie espressioni si intende che $m > n > 1$ e k è un qualsiasi intero positivo):

- $(0, 0, m, n)$;
- $(0, -1, kn, n)$;
- $(0, 1, (2k + 1)n, n)$;
- $(-1, 0, kn - k + n, n)$;
- $(1, 0, (2k + 1)n - 2k, n)$;
- $(1, 1, 3k + 2, 2)$;
- $(-1, 1, 6k + 2, 2)$.

A8. L'equazione ha 3 soluzioni: $f(x) = 2x - 1$, $f(x) = -x - 1$, $f(x) = x^2 - 1$.

C1. ...

C2. È possibile arrivare ad una tabella monocromatica se e solo se n è multiplo di 4.

C3. ...

C4. Barbara.

C5. $\dbinom{2n}{n} 2^n$

C6. Il numero di modi è $[(2n - 1)!!]^2 = [(2n - 1)(2n - 3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1]^2$.

C7. ...

C8. 13

G1. ...

G2. ...

G3. ...

G4. La circonferenza di Feuerbach del triangolo ABC.

G5. ...

G6. ...

G7. ...

G8. ...

N1. 11

N2. Le possibili coppie (x, y) sono $(1, 1)$, $(2, 2)$ e $(4, 5)$.

N3. L'unica soluzione è $n = 2$, $p = 3$.

N4. Per tutti i primi dispari.

N5. L'unica soluzione è $a = 4$, $b = 2$.

N6. ...

N7. Le soluzioni sono la terna $(2, 3, 5)$ e tutte le sue permutazioni.

N8. ...

TST1. L'unica stringa con la proprietà richieste è quella costituita nell'ordine da 64 lettere A, 32 lettere B, 2 lettere A ed una lettera B.

TST2. ...

TST3. L'equazione ha 2 soluzioni: $f(x) \equiv 0$ e $f(x) = 2x$.

TST4. ...

TST5. (a) Per tutti gli n dispari, per $n = 2$, e per tutti gli n del tipo $2d$, in cui d è un numero dispari i cui fattori primi sono tutti congrui ad 1 modulo 4.

(b) Per tutti gli $n > 2$ pari che soddisfano la condizione di cui al punto precedente.

(c) Non esiste.

TST6. ...

“Aiutini”

A1. Determinare a_1 ed a_2 in funzione di p e q utilizzando le relazioni tra radici e coefficienti. Si ottiene così l'equazione $(3q-p)^2 = 3(p+q)$. Da qui si deduce che deve essere $3q-p=3a$ e di conseguenza $p+q=3a^2$. Non resta che risolvere il sistema.

In alternativa si può risolvere l'equazione di secondo grado in p o in q ed imporre al discriminante di essere un quadrato perfetto.

A2. Consideriamo il polinomio $q(x) = xp(x) - 1$. Di questo polinomio, che ha grado $n+1$, conosciamo $n+1$ radici. Ma allora conosciamo quasi la sua espressione (occhio: non è monico). Per determinare il coefficiente mancante basta porre $x=0$. Da $q(n+2)$ si ricava quindi facilmente $p(n+2)$.

A3. Unsmoothing! Mostrare che, detta $f(x,y,z)$ la somma simmetrica o la somma ciclica, si ha che $f(x,y,z) \leq f(x+z,y,0)$ purché y non sia la più grande o la più piccola delle 3 variabili, cosa che si può assumere wlog utilizzando la simmetria o la ciclicità. A questo punto ci si è ridotti a 2 variabili dove si può utilizzare opportunamente AM-GM.

A4. (a) Ci sono almeno 2 approcci.

- Omogenizzare la disuguaglianza portandola nella forma
$$(a+b+c)abc \geq \left(\frac{abc(a+b+c)}{(ab+bc+ca)}\right)^2.$$
Dopo aver semplificato, questa si risolve in modo standard.
- Porre
$$d_1 = \frac{a+b+c}{3}, \qquad d_2 = \frac{ab+bc+ca}{3}, \qquad d_3 = abc.$$
L'ipotesi diventa allora $d_1 d_3 \geq d_2$, la tesi $d_1 d_3 \geq 1$. Ricordando la disuguaglianza di Newton $d_2^2 \geq d_1 d_3$ e moltiplicando per l'ipotesi...

(b) Provare con terne del tipo $(n^a, n^a, 1/n^b)$ scegliendo bene gli esponenti a e b.

A5. L'obiettivo è di liberarsi delle radici e dei denominatori. Un modo per farlo è di considerare la catena di disuguaglianze
$$\begin{aligned}\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{m_a}}\sqrt{a}\sqrt{m_a}\right)^4 &\leq \left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{m_a}\right)^2 \left(\sum_{\text{cyc}} \sqrt{a}\cdot\sqrt{a}m_a\right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{m_a}\right)^2 \left(\sum_{\text{cyc}} a\right)\left(\sum_{\text{cyc}} am_a^2\right).\end{aligned}$$
Resta quindi solo da dimostrare che
$$4\sum_{\text{cyc}} am_a^2 \leq (a+b+c)\sum_{\text{cyc}} a^2,$$

e questo segue per bunching dopo aver applicato la formula per le lunghezze delle mediane in funzione dei lati.

In alternativa si può usare subito la disuguaglianza di Chebycheff con le terne (a, b, c) e (m_a, m_b, m_c) (ricordando che le mediane sono ordinate in verso opposto rispetto ai lati) e concludere con HM-QM.

A6. Moltiplicare e dividere il k-esimo addendo del LHS per $\sqrt{x_k}$. Applicando Cauchy-Schwarz è sufficiente dimostrare che

$$\frac{x_1}{(1+x_1)^2} + \frac{x_2}{(1+x_1+x_2)^2} + \ldots + \frac{x_2}{(1+x_1+x_2+\ldots+x_n)^2} < 1.$$

Per far questo ci sono almeno 2 approcci (sostanzialmente equivalenti): mostrare per induzione che il LHS di tale espressione è $\leq 1 - (1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^{-1}$, oppure mostrare che

$$\frac{x_k}{(1+x_1+x_2+\ldots+x_k)^2} \leq \frac{1}{1+x_1+\ldots+x_k} - \frac{1}{1+x_1+\ldots+x_{k-1}}$$

riducendosi quindi ad una somma telescopica.

Entrambi gli approcci sono legati ad opportune somme di Riemann per l'integrale

$$\int_1^{1+x_1+\ldots+x_n} \frac{1}{x^2}\, dx.$$

A7. L'osservazione fondamentale è che $x^n + ax + b$ deve dividere $x^n(x^{m-n} - 1)$ e di conseguenza le radici di $x^n + ax + b$ devono essere 0 oppure radici $(m - n)$-esime dell'unità. A questo punto si distinguono vari casi.

- Se $a = b = 0$ è banale.
- Se $a = 0$ e $b \neq 0$, allora si dimostra che deve essere $b = \pm 1$. Ragionando sulle radici dell'unità si ottengono relazioni tra m ed n.
- Se $a \neq 0$ e $b = 0$ ci si riduce facilmente al caso precedente.
- Resta il caso in cui $a \neq 0$ e $b \neq 0$. In generale, se un polinomio ha come radici solo delle radici dell'unità, allora il suo termine noto è ± 1, ed il coefficiente di x^{n-1} e di x sono, a meno del segno, l'uno il coniugato dell'altro. Da qui si deduce che $n = 2$. Volendo si può anche limitare a osservando che, se x è una radice, allora $|a| \cdot |x| = |x^n \pm 1|$, ed essendo x una radice dell'unità... Non è quindi difficile concludere che le radici in questione sono radici terze o seste dell'unità, da cui le ultime famiglie di soluzioni.

A8. Presentiamo un approccio che non è il più breve (vedi osservazioni finali), ma che segue il modo di pensare standard.

- Dimostrare che $f(0) = -1$.
- Dimostrare che o $f(-1) = 0$, o $f(1) = 1$.

- Se $f(1) = 1$, allora $f(x) = 2x - 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- Dimostrare che $f(2) = \pm 3$ e dedurre i corrispondenti valori di $f(1)$.
- Dati i valori di $f(1)$, ricavare le formule che legano $f(x+1)$ a $f(x)$, le quali, iterate, permettono di ricavare $f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$.
- Noti $f(1)$ ed $f(-1)$ abbiamo 2 modi per calcolare $f(x-1)$: porre $y = -1$ oppure scrivere $x = (x-1)+1$. Uguagliandoli si ottiene una relazione tra $f(x)$ ed $f(-x)$. Scambiando il ruolo di x e $-x$ se ne ottiene un'altra. Non resta che risolvere il sistema, cosa che riesce nei casi in cui $f(1) \neq 0$.
- Nel caso in cui $f(1) = 0$, scrivere $2x$ come $x + x$ e come $(x+1) + (x-1)$, poi usare le formule precedenti per $f(x+1)$ e $f(x-1)$...

Vista a posteriori, non serve a nulla passare attraverso i possibili valori di $f(2)$ ed $f(1)$. Basta porre $f(1) = a$ e considerare il sistema in $f(x)$ ed $f(-x)$. Quando $a \neq 0$ si trova che $f(x)$ è affine e non resta che sostituire nell'equazione per ricavare i possibili valori dei parametri. Se $a = 0$, la relazione trovata tra $f(x)$ ed $f(-x)$ dice che f è pari: a quel punto basta calcolare $f(x+x)$ e $f(x-x)$.

C1. Siano $a_1, a_2, \ldots, a_{35}$ le ore di allenamento nei vari giorni. Consideriamo la successione $s_1, s_2, \ldots, s_{35}$ definita da $s_k = a_1 + \ldots + a_k$. Quali proprietà ha la successione s_k? Consideriamo gli interi $\{1, 14, 27, 40, 53\}$: quanti di questi possono comparire nella successione s_n? E tra gli interi $\{2, 15, 28, 41, 54\}$?

C2. Intanto è facile trattare il caso 4×4, e di conseguenza il caso in cui n è multiplo di 4. Ci sono poi vari invarianti, e cioè la parità del numero di caselle bianche (o nere) contenute in ogni riga o colonna.

C3. Double counting! Quanti sono i sottoinsiemi di M che hanno come minimo 1? E come minimo 2? Quanti hanno come massimo n? Quanti hanno come massimo $n-1$? Ci si riduce quindi a calcolare la somma di una diagonale del triangolo di Tartaglia, da cui

$$x_k = \sum_{i=1}^{n-k+1} \binom{n-i}{k-1} = \sum_{i=k-1}^{n-1} \binom{i}{k-1} = \binom{n}{k}.$$

Ora la somma degli x_k è ..., per cui gli x_k non possono essere tutti divisibili per 4.

C4. Quali saranno i numeri scritti sulla lavagna nel momento in cui non è più possibile muovere senza venire sconfitti? Dato un primo p che divide 2006!, quanti sono i divisori di 2006! che sono multipli di p?

C5. Consideriamo lo sviluppo di

$$(x^2 + 4x + 4)^n = (x^2 + x + x + x + x + 1 + 1 + 1 + 1)^n.$$

I modi di distribuire le palline senza ulteriori condizioni sono 9^n, e sono in corrispondenza biunivoca con i termini dello sviluppo della potenza n-esima. Si tratta ora di dimostrare che le distribuzioni che rispettano la condizione indicata sono in corrispondenza biunivoca con i termini dello sviluppo che confluiscono nel termine di grado n.

Allo stesso risultato si può arrivare dimostrando intanto che il numero di modi è dato da

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{k}\binom{n-k}{k} 4^k 4^{n-2k} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n!}{k!k!(n-2k)!} 4^{n-k},$$

e che a sua volta tale sommatoria è uguale al "termine noto", cioè il coefficiente di x^0, nello sviluppo di

$$\left(\frac{1}{x} + 4x + 4\right)^n.$$

C6. Le possibili gare sono in corrispondenza biunivoca con le permutazioni di $2n$ elementi. Le gare leali sono in corrispondenza biunivoca con le permutazioni che si scrivono come prodotto di cicli di lunghezza pari. Sia L_n il numero di tali permutazioni. Dove può andare a finire 1? Supponendo che vada in un certo a, dove può andare a finire a? Di questo passo si arriva a congetturare la formula per L_n, che però ora va dimostrata per induzione. Per farlo ci sono almeno 2 modi.

- Consideriamo una permutazione su $2n+2$ elementi con tutti i cicli di lunghezza pari, e sia a l'immagine di 1. Proseguendo si hanno 2 possibilità: o il ciclo si chiude, e ciò che rimane è una permutazione su $2n$ elementi, o il ciclo prosegue, ma eliminando 1 ed a ci si riduce comunque ad una permutazione su $2n$ elementi.
- Consideriamo ancora le permutazioni su $2n+2$ elementi. Andando a suddividerle a seconda della lunghezza del ciclo che contiene il primo elemento, otteniamo una relazione del tipo

$$L_{2k+2} = (2k+1)! + \frac{(2k+1)!}{2!} L_2 + \frac{(2k+1)!}{4!} L_4 + \ldots + \frac{(2k+1)!}{(2k)!} L_{2k}.$$

Con semplici passaggi algebrici il passo induttivo si riduce all'identità

$$1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{[(2i-1)!!]^2}{(2i)!} = \frac{[(2k+1)!!]^2}{(2k+1)!},$$

la quale si dimostra a sua volta per induzione.

C7. Prendiamo una delle configurazioni con il minor numero di stanze "scombussolate" (cioè con tutte le lampadine nello stesso stato). Prendiamo una stanza scombussolata S_1. Agendo su un interruttore possiamo sistemare S_1, scombussolando però una stanza S_2. Agendo su un interruttore possiamo ora sistemare S_2, scombussolando però una stanza S_3, e così via. Prima o poi in questo modo una stanza si ripete (occhio: non è necessariamente S_1). Ma è possibile tutto ciò?

C8. Per dimostrare che 13 problemi bastano è sufficiente mostrare un esempio, per costruire il quale può essere utile ed istruttivo pensare al piano proiettivo su $\mathbb{Z}_3$.

Per dimostrare che 12 problemi non bastano, si possono seguire almeno 2 strade.

- Se i problemi sono 12 o meno, almeno un problema va a 4 studenti (perché?). Quali altri problemi hanno queste 4 persone?
- Siano k i problemi, e siano $s_1, \ldots, s_k$ i numeri di studenti che li ricevono. Quanto vale $s_1 + \ldots + s_k$? Inoltre

$$\binom{s_1}{2} + \ldots + \binom{s_{12}}{2} \leq \binom{10}{2}$$

poiché nel LHS ogni coppia di studenti viene contata al più una volta (perché?). Svolgendo i calcoli ed applicando QM-AM per stimare la somma dei quadrati degli s_i, si giunge alla disuguaglianza $k > 40^2/130$.

G1. La ciclicità del quadrilatero $BICI_A$ segue da un semplice conto di angoli (ad esempio gli angoli in B e C sono retti). Per mostrare che il centro della circonferenza ad esso circoscritta è proprio M, si può far vedere che i triangoli BIM e CIM sono isosceli, sempre con un conto di angoli.

G2. Se $AB > AC$, allora $AM > CN$, quindi $GM > GN$, e pertanto...

G3. Sia S il punto di incontro tra AP e CC_1. Se le 3 rette concorrono, allora applicando Ceva nel triangolo APC e sfruttando la similitudine tra PAC e BB_1C si ha che $PS = SA$, e quindi...

Viceversa (parte importantissima dell'esercizio): sia P l'intersezione tra r e BC: sfruttando nuovamente Ceva e la similitudine del punto precedente si ha che B, B_1 ed S sono piedi di 3 ceviane concorrenti del triangolo APC.

G4. Intanto occorre distiguere il caso in cui P sta dalla stessa parte o dalla parte opposta di A rispetto ad MN. Se sta dalla parte opposta, sfruttando che $MB = MQ = MA$ e $NA = NR = NC$, con qualche conto di angoli si deduce che $M\widehat{P}N = \alpha$. Se sta dalla stessa parte, allo stesso modo si deduce che $M\widehat{P}N = 180° - \alpha$.

Resta ora da far vedere il viceversa, e cioè che ogni punto della circonferenza di Feuerbach sta nel luogo richiesto.

G5. La tesi è equivalente all'uguaglianza $AD^2 = DB \cdot DC$, la quale a sua volta, sfruttando la similitudine $DFC \sim DBF$, risulta equivalente all'uguaglianza $AD^2 = DF^2$. Entrambe queste lunghezze si calcolano agevolmente in funzione dei 2 raggi.

In alternativa si può invertire rispetto al punto D con raggio DE e dimostrare che E ed F restano fissi, t_2 va in Γ_2 e viceversa, t_1 e t_3 vanno in se stesse. Si deduce poi che B va in C, e Γ_1 va in se stessa, da cui anche A resta fisso. Da qui si conclude che $DA^2 = DE^2 = DB \cdot DC$.

G6. La circonferenza circoscritta al quadrilatero in questione è quella che passa anche per I, dunque quella che ha per centro il punto M definito come ulteriore intersezione tra BI e la circonferenza circoscritta al triangolo. A questo risultato si può giungere in almeno 2 modi.

- Dimostrando che $MI = MK$, risultato al quale si giunge in vari passi. Dall'ipotesi segue che $BD = AC$; siano ora N il punto medio di AC ed H il punto medio di IK: i triangoli DBI ed NCM sono simili con rapporto $1/2$, i triangoli NCM ed HIM sono congruenti, dunque MH è l'asse di IK.
- Dimostrando che $I\widehat{K}A = I\widehat{C}A$. Per fare questo conto di angoli, sia K' l'intersezione tra CK ed AB: per un fatto generale $AK' = DB$ (questo si dimostra osservando che per omotetia K' è il punto di tangenza di una circonferenza exinscritta), dunque per l'ipotesi $AK' = AC$ e quindi il triangolo ACK' è isoscele. Non è ora difficile calcolare tutti i rimanenti angoli.

G7. (a) Supponiamo wlog che P stia sul minore dei 2 archi delimitati da AB. Sia D il piede della perpendicolare da P ad AB. Sia C' il piede dell'altezza uscente da C, e sia E l'intersezione tra CC' e la retta di Simson. Ci basta dimostrare che $HEPD$ è un parallelogramma, dunque che HE e DP sono paralleli (banale) e della stessa lunghezza. Per quest'ultimo punto, sia H' il simmetrico di H rispetto ad AB (che sta sulla circonferenza circoscritta) e sia F la proiezione di P su HH'. Grazie all'uguaglianza $HC' = C'H'$, tutto si riduce a dimostrare che i triangoli $C'ED$ e $FH'P$ sono congruenti, il che è un discorso di angoli (ci sono anche parecchi quadrilateri ciclici nella figura).

(b) Vi solo almeno 2 approcci possibili.

- *Approccio sintetico.* Le 4 rette passano per il punto medio di AB (le ultime 2 rette sono in realtà la retta AB).
- *Approccio vettoriale.* Mettiamo l'origine nel centro della circonferenza ed indichiamo con a, b, ..., f i vettori corrispondenti ai vertici dell'esagono. Dalle formule per l'ortocentro e dal punto (a) si ha che la prima e la terza retta di Simson passano per (dunque si incontrano nel) punto $(a+b+d+f)/2$, mentre la seconda e la quarta passano per (dunque si incontrano nel) punto $(a+b+c+e)/2$. Questi 2 punti coincidono se e solo se ... (si noti che in questo modo si verifica che l'essere $CDEF$ un rettangolo è condizione non solo sufficiente, ma pure necessaria per la concorrenza delle 4 rette di Simson.

G8. Segnaliamo 2 approcci.

- Sia P il centro radicale delle 3 circonferenze coinvolte, cioè l'intersezione dei 3 assi radicali (e se sono paralleli?). Per un noto criterio (dimostrare!) la perpendicolarità tra OM e BM è equivalente all'uguaglianza $PA^2 - BA^2 = PM^2 - BM^2$. Esprimendo tali lunghezze in termini di potenze rispetto alle varie circonferenze, con qualche passaggio algebrico la tesi si trasforma nell'uguaglianza $BK \cdot BC = BM \cdot BP$, la quale a sua volta è equivalente alla ciclicità di $PCKM$, che è una semplice questione di angoli.

- Sia O_1 il centro della circonferenza circoscritta a BNK, e sia O_2 il centro della circonferenza circoscritta ad ABC. L'idea è di dimostrare che OM è parallelo ad O_1O_2. Per farlo si seguono vari passi: AC è perpendicolare ad OO_2 (asse radicale e congiungente i centri) e ad O_1B (conto di angoli); analogamente NK è perpendicolare ad OO_1 e O_2B; ne segue che OO_2BO_1 è un parallelogramma; detti R il punto d'incontro delle diagonali ed S l'intersezione tra OO_2 e BM, si ha che $BRS \sim BOM$ ...

N1. Fino a 10 non sono difficili da costruire (basta in realtà ottenere i dispari...). Resta da dimostrare che 11 non si può ottenere. Ci si riduce facilmente ad un'equazione del tipo $2^x - 1 = 11(2^y - 1)$, che si vede facilmente non avere soluzioni (si può ad esempio ragionare direttamente modulo 3, oppure anche modulo 11 mostrando che x deve essere multiplo di 10, poi modulo 3 e 31 per vedere che anche y deve essere multiplo di 10).

N2. Dimostrare preliminarmente che la massima potenza di 2 che divide $3^x - 1$ è 2^1 se x è dispari, mentre è 2^{k+2} se $x = 2^k d$, con dispari. Pertanto il caso x dispari è immediato, mentre il caso x pari conduce alla disequazione $2^k d \leq k + 2$, che può essere vera solo per valori bassi di k.

N3. Portare n da una parte e p dall'altra e fattorizzare. Ora p deve dividere uno dei fattori. Quale? Allora il RHS ed il LHS risultano sproporzionati.

N4. Dimostrare più in generale che per p dispari un polinomio di secondo grado non può essere surgettivo modulo p. Questo perché i residui quadratici modulo p sono solo metà dei totali.

N5. Vi sono almeno 3 approcci, tutti basati su una parte aritmetica (divisibilità) ed una algebrica (disuguaglianza).

- Mostrare in qualche modo che $\sqrt[n]{n} < 2$ per ogni intero positivo n. A questo punto facendo la radice ab-esima si dimostra che $a - b$ può essere solo 1, 2 o 3, da cui manca poco per giungere alla soluzione.
- Posto $a = d\alpha$ e $b = d\beta$, con α e β primi tra di loro, si giunge all'equazione $d^{ab-a-b}(\alpha - \beta) = \alpha^b \beta^a$. Se l'esponente di d è positivo, allora i fattori primi di $\alpha - \beta$ devono dividere anche ..., ma allora si arriva facilmente ad un assurdo. I casi in cui l'esponente di d è minore od uguale a 0 sono pochi...
- Come sono i fattori primi di a e b? Se $p^\alpha || a$ e $p^\beta || b$, quale relazione lega α e β? Tenendo conto che α e β tendono ad essere più piccoli di a e b, rispettivamente, è così facile che degli interi soddisfino tale relazione?

N6. Prendiamo un primo p abbastanza grande. Cerchiamo n tale che $a^n \equiv a$ modulo p e $n \equiv -a$ modulo p (teorema cinese ...). Allora ...

N7. Supponiamo che uno dei 3 primi sia 2: wlog $p = 2$. Allora q ed r sono dispari e $\mathrm{ord}_r(2)$ può essere solo 1, 2, q, $2q$. La seconda possibilità porta alla soluzione, le altre a degli assurdi (per l'ultima occorre ricordare che l'ordine divide $r - 1$).

Supponiamo invece che nessuno dei 3 primi sia 2. Guardando wlog alla congruenza modulo p, abbiamo che $\mathrm{ord}_p(q)$ può essere solo 1, 2, r, $2r$. La seconda porta a $q \equiv -1$ modulo p, le altre a degli assurdi (uno dei 3 primi dovrebbe essere uguale a 2). Lo stesso vale permutando ciclicamente le variabili. Otteniamo così 3 relazioni incompatibili tra di loro (basta pensare al più piccolo primo ...).

N8. Intanto mostriamo che esistono infiniti p che dividono almeno un valore $f(n)$. Per far questo vi sono almeno 2 approcci.

- *Approccio algebrico.* Supponiamo che tutti i valori assunti da f siano multipli di un numero finito di primi $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Ma allora, detto a_0 il termine noto, cosa si può dire di $f(ka_0p_1 \cdot \ldots \cdot p_n)$? Perché non si può mettere direttamente $k = 1$?
- *Approccio analitico.* Supponiamo come prima che tutti i valori assunti da f siano multipli di un numero finito di primi. Fissato m, quanti sono gli interi di valore assoluto $\leq m$ nella cui scomposizione compaiono solo tali primi? Quanti sono gli interi di valore assoluto $\leq m$ che stanno nell'immagine del polinomio?

Infine si conclude applicando Bezout per i polinomi.

TST1. Il problema equivale a trovare un "percorso a scendere" nel triangolo di Tartaglia che parte dal numero 1 all'inizio, termina nella posizione 33 della riga 99 e tocca solo numeri dispari. Gli unici numeri dispari nella 64-esima riga del triangolo di Tartaglia sono i due 1 ai lati. Gli unici numeri dispari nella 96-esima riga del triangolo di Tartaglia sono i due 1 ai lati e quelli in posizione 32 e 64 (indicando le posizioni da 0 a 96).

TST2. Calcolare le lunghezze di tutti i segmenti coinvolti in funzione di R e degli angoli del triangolo (per calcolare HL si può ad esempio utilizzare il teorema dei seni in ABH per calcolare AH, quindi il teorema di Carnot in ALH). Con semplici passaggi trigonometrici la differenza tra RHS e LHS diventa $3\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, da cui si conclude facilmente.

TST3. Vi sono almeno 3 approcci.

- Dimostrare che la somma di 2 elementi dell'immagine sta ancora nell'immagine; dimostrare poi che $f(k) = 2k$ per ogni k nell'immagine; infine porre $m = n - f(k)$ e, mediante le osservazioni precedenti, arrivare a dimostrare che $f(n+k) = f(n) + f(k)$, da cui la conclusione è vicina.
- Dimostrare che $f(k) = 2k$ per ogni k nell'immagine e dedurne che l'immagine o contiene il solo 0 o contiene infiniti elementi; trovare quindi le soluzioni sfruttando la simmetria del RHS e supponendo che f sia iniettiva; mostrare infine che, se f non è iniettiva, allora è periodica e quindi la sua immagine ...
- Posto $f(0) = \alpha$ si arriva facilmente a $f(k\alpha) = (k+1)\alpha$; ponendo $m = k\alpha$, $n = h\alpha$ si verifica agevolmente che l'unica possibilità è che sia $\alpha = 0$. Posto ora $f(1) = \beta$ si arriva facilmente a $f(k(\beta-1)) = k\beta$; ponendo $m = k(\beta - 1)$, $n = h\beta(\beta - 1)$ si verifica agevolmente che può essere solo $\beta = 0$ oppure $\beta = 1$. In entrambi i casi si conclude agevolmente.

TST4. (a) Dimostrare (ad esempio per omotetia) che entrambe la tangenti sono parallele alla tangente in P a γ.

(b) Dette C_1 e D_1 le intersezioni tra γ e la tangente in B_1 a γ_1, dimostrare che P è il punto medio dell'arco C_1D_1 che lo contiene e $PC_1^2 = PA_1 \cdot PB_1$. Ragionare analogamente sulla seconda tangente e concludere che le 2 tangenti coincidono se e solo se P sta sull'asse radicale di γ_1 e γ_2.

TST5. Alla soluzione si giunge attraverso vari passi intermedi.

- Dimostrare che $A_n \neq \emptyset$ per n dispari (in questo caso non è così difficile esibire un elemento di $A_n \ldots$).
- Dimostrare che $A_n = \emptyset$ per n multiplo di 4. Se così non fosse si avrebbe infatti che -1 è residuo quadratico modulo 4.
- Considerare gli n del tipo $2d$, con d dispari. Considerando i primi p che dividono d, se $A_n \neq \emptyset$ vuol dire che -1 è un residuo quadratico modulo $p \ldots$
- Mostrare che se $n = 2d$, e tutti i fattori primi di d sono congrui a 1 modulo 4, allora $A_n \neq \emptyset$ (basta usare il caso dispari ed il teorema cinese).
- Mostrare che, quando $A_n \neq \emptyset$, il numero di elementi di A_n coincide con il numero di soluzioni di $a^n \equiv 1$ modulo n.
- Mostrare che in generale il numero di soluzioni di $a^m \equiv 1$ modulo la potenza p^α di un primo è il massimo comun divisore tra m e $p^{\alpha-1}(p-1)$.
- Mostrare che in generale se $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ è la scomposizione in fattori primi di n, allora il numero di soluzioni di $a^m \equiv 1$ modulo n è dato da

$$\prod_{i=1}^{k} (m, p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1)).$$

  Questa formula si dimostra usando il punto precedente ed il teorema cinese.
- Dalla formula precedente si deduce che $|A_n|$ è dispari per n dispari e per $n = 2$, è pari nei restanti casi, e non può valere 130 (n dovrebbe avere almeno 5 e 13 come fattori primi, ma allora $|A_n|$ risulterebbe divisibile per $4 \ldots$).

TST6. La parte facile consiste nel dimostrare che se esiste un multiplo di $p(x)$ con tutti i coefficienti reali positivi, allora $p(x)$ non ha radici reali positive. È inoltre abbastanza agevole dimostrare che basta costruire il multiplo per i polinomi del tipo $x - (a + ib)$ (con $b \neq 0$), e che tale costruzione è semplice nel caso in cui $a < 0$. Per il caso in cui $a > 0$ vi sono almeno 2 approcci.

- Trovare una potenza k per cui $(a + ib)^k = a_k + ib_k$ con $a_k < 0$, quindi costruire un multiplo di $x^k - (a + ib)^k$ con coefficienti non negativi. Non è poi difficile trovare un suo multiplo con coefficienti positivi.
- Dimostrare che ogni numero complesso (con parte immaginaria non nulla) è radice di un polinomio del tipo $x^n + ax + b$, con a e b reali e positivi.

Team Selection Test – Soluzioni

Per ogni problema della gara finale riportiamo

- una soluzione completa, come dovrebbe essere scritta durante una gara;
- alcune idee e osservazioni su possibili soluzioni alternative (spesso non complete);
- alcuni modi classici di perdere punti pur avendo capito come si risolveva il problema.

Soluzione problema 1

Esiste un'unica stringa che soddisfa i requisiti del problema, e cioè quella formata nell'ordine da 64 A, 32 B, 2 A, 1 B.

Se in una stringa con n simboli ci sono a lettere A e b lettere B, allora il numero di modi di riordinare la stringa è $\binom{n}{a}$, ossia il coefficiente di $x^a y^b$ nel polinomio $(x+y)^n$.

Per verificare se tale coefficiente è pari o dispari, basta verificarne la congruenza modulo 2. La risposta generale a questo problema è data dal seguente

Lemma. Sia $n = 2^{k_1} + \cdots + 2^{k_m}$ la scrittura di n in base 2. Allora il coefficiente di $x^a y^b$ in $(x+y)^n$ è dispari se e solo se a è una somma di potenze di 2 con esponenti scelti in $\{k_1, \ldots, k_m\}$.

Dimostrazione Lemma. Da $(x+y)^2 \equiv x^2 + y^2 \pmod 2$ si ricava per induzione che $(x+y)^{2^k} \equiv x^{2^k} + y^{2^k} \pmod 2$, e quindi

$$(x+y)^n = (x+y)^{2^{k_1}+\cdots+2^{k_m}} \equiv (x+y)^{2^{k_1}} \cdots (x+y)^{2^{k_m}} \pmod 2.$$

Da qui è evidente che gli unici termini con coefficiente non nullo sono quelli in cui l'esponente della x è una somma di potenze di 2 con esponenti scelti in $\{k_1, \ldots, k_m\}$. □

Torniamo ora al problema. Esaminando il caso $n = 2^6 = 64$ si ottiene

$$(x+y)^{64} \equiv x^{64} + y^{64} \pmod 2,$$

dunque il coefficiente $\binom{n}{a}$ sarà dispari solo se $a = 0$ e $b = 64$ oppure $a = 64$ e $b = 0$. Dalle condizioni del problema la prima possibilità è esclusa, quindi le prime 64 lettere devono essere necessariamente tutte uguali ad A.

Analizziamo ora il caso $n = 96$. Abbiamo

$$(x+y)^{96} \equiv (x+y)^{64}(x+y)^{32} \equiv x^{96} + x^{64}y^{32} + x^{32}y^{64} + x^2y^{96} + y^{98} \pmod 2$$

da cui segue immediatamente che tutte le lettere dalla 65-esima alla 96-esima devono essere uguali a B (ricordiamo che i possibili valori di a sono gli esponenti della x nei termini con coefficiente non nullo).

Infine, se $n = 98$ si ha

$$(x+y)^{98} \equiv x^{98} + x^{96}y^2 + x^{66}y^{32} + x^{64}y^{34} + x^{34}y^{64} + x^{32}y^{66} + y^{98}$$

e quindi la 97-esima e la 98-esima lettera della stringa devono essere A. L'ultima lettera quindi deve essere B.

Utilizzando il lemma, si verifica infine immediatamente che la stringa così costruita soddisfa i requisiti del problema (vedi anche l'osservazione più avanti, che risponde esaurientemente all'esistenza della stringa).

Soluzioni alternative

I punti fondamentali della soluzione sono l'individuazione dei coefficienti dispari nella 64-esima e 96-esima riga del triangolo di Tartaglia. Nei casi particolari questo si può fare, oltre che con il lemma che risponde al problema nel caso generale, anche in maniera "artigianale", ad esempio andando a guardare la massima potenza di 2 che divide numeratore e denominatore, oppure con osservazioni tipo il fatto che la massima potenza di 2 che divide x e $64 - x$ è la stessa.

Osservazione

Si può dimostrare direttamente il seguente fatto generale: se a e b sono 2 interi positivi per cui $\binom{a+b}{a}$ è dispari, allora esiste un'unica stringa costituita ad a lettere A e b lettere B che soddisfa la proprietà indicata nel problema. Si tratta infatti di costruire un percorso nel triangolo di Tartaglia che parte dal coefficiente $\binom{a+b}{a}$ e risale il triangolo incontrando solo coefficienti dispari. Poiché ogni coefficiente è la somma dei 2 che gli stanno sopra, ogni coefficiente dispari ne avrà sopra esattamente uno dispari, per cui si può sempre risalire, ed in modo unico.

Come perdere punti

Ci sono almeno 2 modi classici di perdere punti:

- individuando la stringa procedendo per condizioni necessarie (tipo i passaggi alla 64-esima, 96-esima e 98-esima riga), senza poi nemmeno porsi il problema di verificare che la stringa soddisfi le condizioni anche nelle restanti righe;
- lasciando al lettore "semplici" verifiche, tipo la parità di coefficienti binomiali $\binom{n}{a}$ con n ed a alti, senza aver indicato un modo semplice per farlo senza sviluppare i fattoriali.

Soluzione problema 2

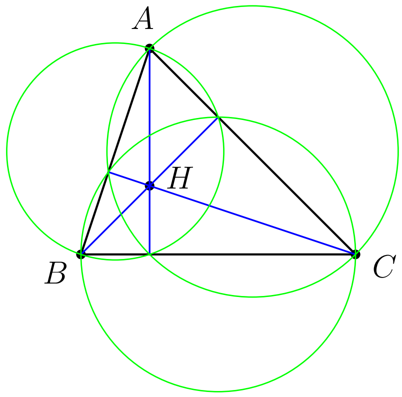
Consideriamo le 3 circonferenze di diametro AB, BC, CA. Le 3 altezze del triangolo sono gli assi radicali di tali circonferenze, dunque l'ortocentro è il centro radicale delle 3 circonferenze, quindi ha la stessa potenza p rispetto a queste 3 circonferenze. Esprimendo la potenza in termini del raggio e della distanza dal centro abbiamo quindi che

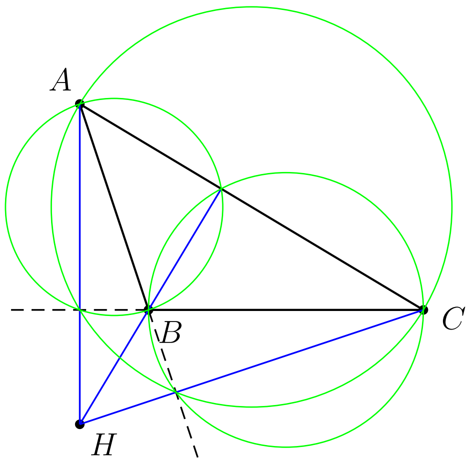
$$HL^2 - AL^2 = HM^2 - BM^2 = HN^2 - CN^2 = p.$$

La disuguaglianza del testo diventa allora $3p < 0$, ovvero $p < 0$, che è equivalente a richiedere che H sia interno ai 3 cerchi, il che è a sua volta equivalente ad essere H interno ad almeno uno di essi.

Ma è ben noto che un triangolo è acutangolo se e solo se tutte le altezze sono interne al triangolo, il che si vede facilmente essere a sua volta equivalente al fatto che l'ortocentro stia strettamente all'interno di uno o (il che, come detto, è equivalente) di tutti i cerchi con diametro i lati.

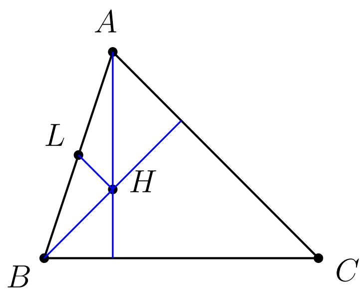
Quindi la disuguaglianza vale se e solo se il triangolo è acutangolo.





Seconda soluzione

Usando le notazioni standard, calcoliamo tutte le lunghezze coinvolte nella disuguaglianza.



Nel triangolo ABH abbiamo che $A\widehat{B}H = 90° - \alpha$, $B\widehat{A}H = 90° - \beta$, $A\widehat{H}B = \alpha + \beta$, da cui, per il teorema dei seni,

$$\frac{AH}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{AB}{\sin(\alpha + \beta)}$$

e quindi

$$AH = AB \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin(180° - \alpha - \beta)} = 2R \sin \gamma \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma} = 2R \cos \alpha.$$

Applicando il teorema del coseno nel triangolo ALH si ha dunque che

$$LH^2 - AL^2 = AH^2 - 2AL \cdot AH \cos(90° - \beta) = 4R^2 \cos^2 \alpha - 4R^2 \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Utilizzando ora la semplice identità trigonometrica

$$-\sin \beta \sin \gamma = \cos(\beta + \gamma) - \cos \beta \cos \gamma = -\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma$$

si ha che

$$LH^2 - AL^2 = -4R^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

Ragionando analogamente per $MH^2 - BM^2$ e $NH^2 - CN^2$, abbiamo che la disuguaglianza data è equivalente alla disuguaglianza

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma > 0.$$

Se il triangolo è acutangolo tutti i coseni sono positivi, dunque la disuguaglianza è verificata. Se il triangolo è rettangolo, uno dei coseni è nullo, dunque la disuguaglianza non è verificata (vale invece il segno di uguale). Se il triangolo è ottusangolo, uno dei coseni è negativo e gli altri 2 sono positivi, dunque anche in questo caso la disuguaglianza non è verificata (vale con il verso opposto).

Quindi la disuguaglianza è verificata se e solo se il triangolo è acutangolo.

Terza soluzione

Consideriamo un sistema di riferimento con centro nell'origine, supponiamo che $R = 1$, e indichiamo con a, b, c i vettori corrispondenti ai 3 vertici. Allora

$$H = a + b + c, \qquad L = \frac{a+b}{2}, \qquad M = \frac{b+c}{2}, \qquad N = \frac{c+a}{2}.$$

La disuguaglianza diventa allora

$$\sum_{\text{cyc}} \left| \frac{a+b-2c}{2} \right|^2 < \sum_{\text{cyc}} \left| \frac{a-b}{2} \right|^2,$$

in cui le sbarre verticali indicano ovviamente le norme dei vettori.

Svolgendo i calcoli e ricordando che $R = 1$, tale disuguaglianza risulta equivalente a

$$a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a < -1,$$

dove il puntino indica il prodotto scalare, che in questo caso coincide con il coseno dell'angolo compreso, e cioè, rispettivamente, 2γ, 2α, 2β. Ci siamo così ricondotti alla disuguaglianza

$$\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(2\gamma) < -1.$$

Questa disuguaglianza risulta equivalente a quella trovata nella soluzione precedente mediante semplici passaggi trigonometrici:

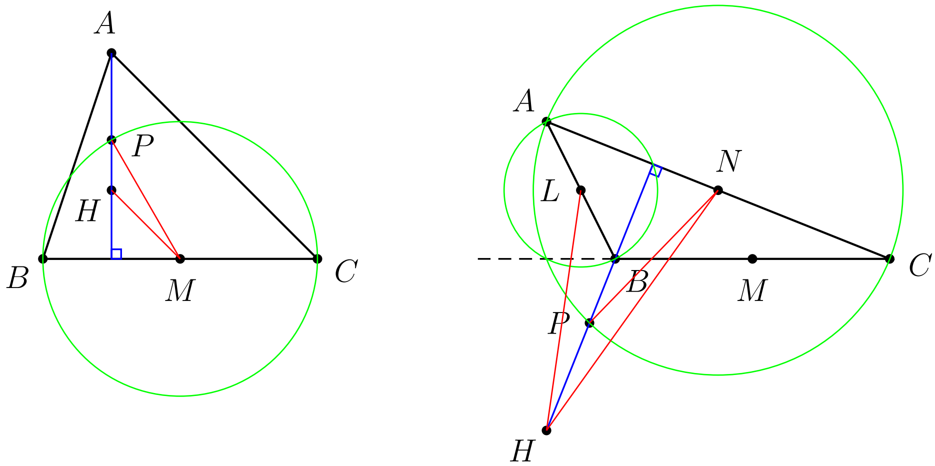
$$\begin{aligned}
\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(2\gamma) + 1 &= 2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + 2\cos^2\gamma \\
&= 2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + 2\cos^2(\alpha+\beta) \\
&= 2\cos(\alpha+\beta)\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right] \\
&= -4\cos(\gamma)\cos(\alpha)\cos(\beta).
\end{aligned}$$

Quarta soluzione

Accenniamo senza entrare nei dettagli un ulteriore approccio sintetico al problema. Con riferimento alla figura seguente di sinistra, nel caso del triangolo acutangolo abbiamo che $BM = MP > MH$ e similmente per i punti medi degli altri lati. Ne segue che ogni addendo nel LHS della disuguaglianza proposta è minore del corrispondente addendo nel RHS.

Nel triangolo rettangolo è semplice vedere che ogni addendo del LHS è uguale al corrispondente addendo del RHS.

Nel caso del triangolo ottusangolo (figura a destra) si ha invece che $LH > LB = AL$ (e similmente $MH > MB$) e $HN > PN = CN$, da cui la disuguaglianza opposta.



A guardare bene questo approccio, si vede però che in fondo è semplicemente un altro modo di scrivere la prima soluzione.

Osservazione

Vale la pena di ricordare l'equivalenza tra i seguenti fatti:

(i) ABC è acutangolo;

(ii) $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma > 0$;

(iii) $\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(2\gamma) < -1$;

(iv) $\sin^2(\alpha) + \sin^2(\beta) + \sin^2(\gamma) > 2$;

(v) $a^2 + b^2 + c^2 > 8R^2$.

Lo stesso si può enunciare per il triangolo rettangolo (con tutti uguale) e per il triangolo ottusangolo (con le disuguaglianze invertite).

Come perdere punti

Un modo classico di perdere parecchi punti è di mostrare una sola implicazione, tipo che se il triangolo è acutangolo, allora vale la disuguaglianza.

In approcci tipo il quarto cui abbiamo accennato si può facilmente perdere dei punti "fidandosi della figura", ad esempio senza spiegare bene perché il punto P viene a trovarsi, a seconda dei casi, sull'altezza oppure sul suo prolungamento.

Soluzione problema 3

Dimostreremo che le soluzioni di tale equazione sono la funzione identicamente nulla $f(n) \equiv 0$ e la funzione $f(n) = 2n$, le quali banalmente verificano l'equazione (in una gara scriverei esplicitamente il conto!).

Indichiamo con A l'immagine della funzione f.

Step 1. Dimostriamo che, se $a_1 \in A$ e $a_2 \in A$, allora $a_1 + a_2 \in A$.

Questo è evidente dall'equazione!

Step 2. Dimostriamo che, se $a \in A$, allora $f(a) = 2a$.

Supponiamo infatti che sia $a = f(n)$: ponendo $m = n$ nell'equazione otteniamo che $f(f(n)) = 2f(n)$, da cui la conclusione.

Step 3. Dimostriamo che f è additiva, e cioè che $f(x + y) = f(x) + f(y)$ per ogni scelta degli interi x e y.

Ponendo infatti $m = y + f(x)$, $n = y$ nell'equazione otteniamo che

$$f(f(x) + f(y)) = f(y + f(x)) + f(y) = f((y + x) - x + f(x)) + f(y).$$

Per i risultati degli step 1 e 2 il primo membro è uguale a $2(f(x)+f(y))$, mentre applicando ancora l'equazione con $m = y + x$, $n = x$ l'ultimo membro risulta $f(x + y) + f(x) + f(y)$. Sostituendo e semplificando otteniamo l'additività.

Step 4. Essendo f una funzione additiva su $\mathbb{Z}$ sarà del tipo $f(x) = ax$, per un opportuno intero a. Sostituendo nell'equazione otteniamo

$$am - an + a^2 n = am + an,$$

da cui $(a^2 - 2a)n = 0$. Questa è vera per ogni coppia di interi m ed n se e solo se $a = 0$ oppure $a = 2$, da cui le due soluzioni.

Seconda soluzione

Come nella soluzione predefinite, indichiamo con A l'immagine della funzione f.

Step 1. Dimostriamo che, se $a \in A$, allora $f(a) = 2a$. La dimostrazione è ovviamente analoga al caso precedente.

Step 2. Dimostriamo che o $A = \{0\}$, o A contiene infiniti elementi.

Se infatti $0 \neq a \in A$ allora dallo step 1 si ricava per induzione che $2^k a \in A$ per ogni intero positivo k.

Step 3. Dimostriamo che, se f è iniettiva, allora $f(n) = 2n$ per ogni intero n.

Infatti, grazie alla simmetria del RHS dell'equazione, abbiamo che

$$f(m - n + f(n)) = f(m) + f(n) = f(n - m + f(m)).$$

Se f è iniettiva, possiamo concludere che $m - n + f(n) = n - m + f(m)$ e quindi $f(n) - 2n = f(m) - 2m$. L'unico modo perché questo accada per ogni m ed n è che entrambi i membri siano uguali ad una costante k, da cui $f(n) = 2n + k$. Se verifica poi direttamente (scrivere esplicitamente il conto in una gara!) che l'unico caso buono è quello con $k = 0$.

Step 4. Supponiamo ora che f non sia iniettiva, e cioè che esistano interi $a \neq b$ tali che $f(a) = f(b)$. Allora ponendo $m = a$ e $m = b$ otteniamo che

$$f(m - a + f(a)) = f(m) + f(a) = f(m) + f(b) = f(m - b + f(b)).$$

Ponendo ora $m = k + a - f(a)$ abbiamo che $f(k) = f(k + (a - b))$ per ogni intero k. Ne segue che f è periodica, dunque assume solo un numero finito di valori, dunque (per lo step 2) assume solo il valore 0 e quindi $f(n) \equiv 0$.

Terza soluzione

Step 1. Dimostriamo che $f(0) = 0$.

Sia infatti $f(0) = \alpha$. Ponendo $n = 0$ nell'equazione otteniamo che $f(m+\alpha) = f(m)+\alpha$, da cui per induzione si dimostra facilmente che $f(k\alpha) = (k+1)\alpha$ per ogni intero k. Ponendo ora $m = k\alpha$, $n = h\alpha$ nell'equazione otteniamo che

$$(k + 2)\alpha = f(k\alpha - h\alpha + (h + 1)\alpha) = (k + 1)\alpha + (h + 1)\alpha,$$

da cui semplificando si ottiene $h\alpha = 0$, che è vera per ogni h se e solo se $\alpha = 0$.

Step 2. Dimostriamo che $f(1) = 0$ oppure $f(1) = 2$.

Sia infatti $f(1) = \beta$. Ponendo $n = 1$ nell'equazione otteniamo che $f(m+\beta-1) = f(m)+\beta$, da cui per induzione si dimostra facilmente che $f(k(\beta - 1)) = k\beta$ per ogni intero k, o equivalentemente che $f(k\gamma) = (\gamma + 1)k$ per ogni intero k, dove $\gamma = \beta - 1$. Ponendo ora $m = k\gamma$, $n = h\gamma^2$ nell'equazione otteniamo che

$$(k + h)(\gamma + 1) = f(k\gamma - h\gamma^2 + f(h\gamma^2)) = k(\gamma + 1) + h(\gamma + 1),$$

da cui semplificando si ottiene $h\gamma^2 = h$ che è vera per ogni h se e solo se $\gamma = \pm 1$, da cui $\beta = 0$ oppure $\beta = 2$.

Step 3. Se $\beta = 0$, allora ponendo $n = 1$ abbiamo che $f(m - 1) = f(m)$: ne segue che f è costante e dunque, per lo step 1, identicamente nulla.

Se $\beta = 2$, allora allo stesso modo si ottiene che $f(m+1) = f(m)+2$ da cui per induzione si ottiene facilmente che $f(m) = 2m$ per ogni intero m.

Come perdere punti

Come sempre: trovando le soluzioni procedendo per condizioni necessarie, dimenticandosi alla fine di fare la/e verifiche.

Soluzione problema 4

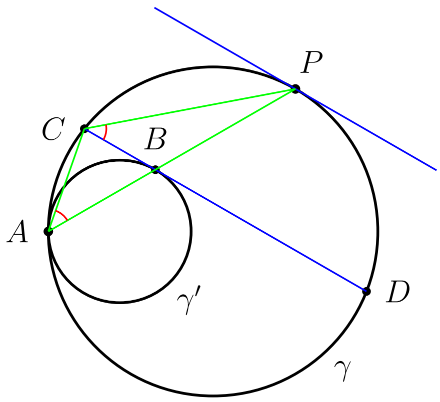
Lemma. Sia γ' una circonferenza tangente internamente in un punto A ad una circonferenza γ. Sia P un punto di γ diverso da A, e sia B l'ulteriore intersezione tra γ' ed AP. La tangente in B a γ' interseca γ in C e D.

Allora

(i) La tangente in B a γ' è parallela alla tangente in P a γ;

(ii) $PB \cdot PA = PC^2 = PD^2$.

Dimostrazione del Lemma. Consideriamo l'omotetia di centro A che manda B in P. Tale omotetia manda γ' in γ, dunque manda la tangente in B a γ' nella tangente in P a γ. Poiché una retta e la sua immagine mediante un'omotetia sono parallele, la prima conclusione è dimostrata.



Per la seconda conclusione, osserviamo intanto che P è il punto medio dell'arco CD che lo contiene, da cui $PC = PD$. Da questo segue che $PCB \sim PAC$, perché hanno l'angolo in P in comune, e $P\widehat{C}B = P\widehat{A}C$ in quanto angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti. Ne segue che $PC : PB = PA : PC$, da cui la seconda conclusione. $\square$

Dimostrazione del problema - Parte (a). Applicando il Lemma si vede facilmente che le 2 tangenti considerate sono parallele alla tangente in P a γ, dunque sono parallele tra di loro.

Dimostrazione del problema - Parte (b). Siano C_1 e D_1 le intersezioni tra γ e la tangente in B_1 a γ_1, e siano C_2 e D_2 le intersezioni tra γ e la tangente in B_2 a γ_2. Le 2 tangenti coincidono se e solo se $PC_1 = PC_2$, e per il Lemma ciò accade se e solo se $PB_1 \cdot PA_1 = PB_2 \cdot PA_2$, cioè se e solo se P ha uguale potenza rispetto a γ_1 e γ_2, cioè se e solo se P appartiene all'asse radicale di γ_1 e γ_2, che è la retta QR.

Soluzioni alternative

Per la prima parte si possono indicare con O_1, O_2, O, rispettivamente, i centri di γ_1, γ_2, γ e dimostrare che O_1B_1 e O_2B_2 sono paralleli tra di loro in quanto entrambi paralleli ad OP. La dimostrazione (angle chasing) è in fondo una ridimostrazione delle proprietà dell'omotetia.

Ci sono ovviamente vari approcci anche alla seconda parte, ma tutti sostanzialmente basati sulla similitudine indicata o su similitudini equivalenti al teorema della tangente e della secante, cioè già implicite nell'uso della potenza.

Come perdere punti

Un modo classico di perdere punti nella seconda parte è di dimostrare una sola implicazione.

Trattandosi di geometria, i problemi di configurazione sono poi sempre in agguato.

Un modo di perdere parecchi punti è invece di assumere che i 3 centri siano allineati!

Soluzione problema 5

Parte (a). Dimostriamo che $A_n \neq \varnothing$ se e solo se n è dispari, oppure $n = 2$, oppure $n = 2p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ dove $p_1, \ldots, p_r$ sono primi congrui a 1 modulo 4.

La dimostrazione si ricava dai seguenti passi.

- n dispari: $(n-1)^n + 1 \equiv 0 \pmod{n}$, quindi $n - 1 \in A_n$.
- $n = 2$: banalmente $1 \in A_2$.
- $4|n$: poniamo $n = 4m$. Se esistesse a tale che $a^{4m} \equiv -1 \pmod{4m}$ avremmo in particolare che -1 è un residuo quadratico modulo 4, il che è assurdo.
- $2|n$ ma $4 \nmid n$: poniamo $n = 2m$. Se esistesse a tale che $a^{2m} \equiv -1 \pmod{2m}$ avremmo in particolare che -1 è un residuo quadratico modulo p per ogni fattore primo p di m, il che è vero solo se p è congruo ad 1 modulo 4.

  Viceversa, se $n = 2p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ dove $p_1, \ldots, p_r$ sono primi congrui a 1 modulo 4, allora la congruenza $a^2 \equiv -1 \pmod{p_i^{k_i}}$ è risolubile per ogni $i = 1, \ldots, r$. Ne segue che pure la congruenza $a^n \equiv -1 \pmod{p_i^{k_i}}$ è risolubile per ogni $i = 1, \ldots, r$ (e anche modulo 2, in quanto basta scegliere $a = 1$) e quindi, per il teorema cinese del resto, la congruenza $a^n \equiv -1$ è risolubile anche modulo n.

Parte (b). Dimostriamo che A_n ha un numero pari e non nullo di elementi se e solo se $n = 2p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ dove $r > 0$ e $p_1, \ldots, p_r$ sono primi congrui a 1 modulo 4.

Per dimostrarlo, ricorriamo a 3 fatti generali.

- *Primo fatto.* Sia m un esponente qualunque e sia $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ (ora i fattori primi possono essere qualunque). Allora il numero di soluzioni di $x^m \equiv -1 \pmod{n}$ è uguale, per il teorema cinese del resto, al prodotto $s_1 \cdot \ldots \cdot s_r$, dove s_i è il numero di soluzioni della congruenza $x^m \equiv -1 \pmod{p_i^{k_i}}$.
- *Secondo fatto.* Se per un certo esponente m l'equazione $x^m \equiv -1 \pmod{p^k}$ è risolubile, allora il numero di soluzioni è uguale al numero di soluzioni di $x^m \equiv 1 \pmod{p^k}$. È infatti immediato verificare che se a e b sono 2 soluzioni della prima congruenza, allora a per l'inverso di b è una soluzione della seconda; viceversa, se a è una soluzione della prima congruenza e c è una soluzione della seconda, allora ac è ancora soluzione della prima. In questo modo si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le soluzioni delle 2 congruenze.
- *Terzo fatto.* Il numero di soluzioni di $x^m \equiv 1 \pmod{p^k}$ è il massimo comun divisore tra m e $\phi(p^k)$. Detto infatti g un generatore della struttura moltiplicativa modulo p^k, e posto $x = g^y$, avremo che x risolve la congruenza data se e solo se $my \equiv 0$ modulo $\phi(p^k) = p^k(p-1)$, ed il numero di soluzioni di tale congruenza è esattamente il massimo comun divisore indicato (in una gara forse lo dimostrerei esplicitamente).

Dai 3 fatti citati segue facilmente che, se $A_n \neq \varnothing$, allora

$$|A_n| = \prod_{i=1}^{r} (n, p_i^{k_i-1}(p_i - 1)) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{k_i-1}(n, p_i - 1).$$

Distinguiamo allora 3 casi:

- n dispari: tutti i fattori che compaiono nella produttoria sono dispari e quindi $|A_n|$ è dispari;
- $n = 2$: evidentemente $A_2 = \{1\}$;
- $n = 2p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ dove $r > 0$ e $p_1, \ldots, p_r$ sono primi congrui a 1 modulo 4: tutti i fattori che compaiono nella produttoria sono pari e quindi $|A_n|$ è pari, e anche divisibile per 2^r.

Parte (c). Non esiste nessun numero n per cui A_n ha 130 elementi.

Se esistesse un numero n di questo tipo, allora, per quanto detto sopra, n dovrebbe essere della forma $n = 2p^k$ con p primo congruo a 1 modulo 4 (se n fosse divisibile per due numeri primi dispari distinti, allora A_n avrebbe un numero di elementi multiplo di 4). Ma se n è di questa forma allora $|A_n| = 2p^{k-1}$. Dovremmo perciò avere $130 = 2 \cdot 5 \cdot 13 = 2p^{k-1}$, il che è assurdo.

Soluzioni alternative

È molto probabile che gli elementi essenziali di ogni soluzione siano quelli indicati nella soluzione precedente. I singoli punti ammettono ovviamente dimostrazioni alternative.

Ad esempio si può dimostrare direttamente che, se p^k è la potenza di un primo e $p \nmid h$, allora il numero di soluzioni di $x^{hp^k} \equiv -1 \pmod{p^k}$ è uguale a p^{k-1} moltiplicato per il numero di soluzioni di $b^h \equiv -1 \pmod{p}$. Supponiamo infatti che sia $b^h \equiv -1 \pmod{p}$, cioè $b^h = -1 + pz$ per un certo $z \in \mathbb{Z}$. Allora per ogni $t \in \{1, 2, \ldots, p^{k-1}\}$ si ha che

$$(x + pt)^{hp^k} = (-1 + pz)^{p^k} = -1 + p^{k+1}z + \ldots \equiv -1 \pmod{p^k}.$$

Viceversa, se $x^{hp^k} \equiv -1 \pmod{p^k}$, con $0 < x < p^k$, allora scritto x nella forma $x = b + pt$, con $b \in \{1, \ldots, p\}$, non è difficile verificare che $b^h \equiv -1 \pmod{p}$ e $t \in \{1, 2, \ldots, p^{k-1}\}$.

Per quanto riguarda il numero di elementi, è piuttosto semplice dimostrare direttamente che $|A_n|$ è pari per $n > 2$ pari: infatti in tal caso, se $a \in A_n$, allora anche $-a \in A_n$ (perché non può essere $a = -a$?).

Come perdere punti

Mostrando che alcune condizioni sono necessarie (tipo il fatto che i primi siano congrui ad 1 modulo 4) quando invece servirebbe mostrare che sono necessarie e sufficienti.

Anche trascurare il primo 2 può portare a perdere dei punti.

Soluzione problema 6.

Step 1. Mostriamo intanto un'implicazione. Supponiamo che esista un polinomio $q(x)$ tale che $r(x) = p(x) \cdot q(x)$ abbia tutti i coefficienti reali e positivi. Ne segue che $r(x)$ assume valori reali positivi per ogni x reale e positivo, dunque non ha radici reali positive. Poiché ogni radice di $p(x)$ è anche radice di $r(x)$, ne segue che $p(x)$ non ha radici reali positive.

Step 2. Mostriamo che è sufficiente dimostrare l'altra implicazione per i polinomi del tipo $x - (a + ib)$ con $b \neq 0$.

Sia infatti $p(x) = c(x - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_n)$ la fattorizzazione di $p(x)$ come prodotto di fattori di primo grado. Per ipotesi i vari λ_i, che sono le radici del polinomio, sono numeri reali negativi oppure numeri complessi con parte reale non nulla (eventualmente ripetuti). Se supponiamo che ogni fattore $x - \lambda_i$ abbia un multiplo $r_i(x)$ a coefficienti tutti positivi, allora il polinomio

$$r(x) = r_1(x) \cdot \ldots \cdot r_n(x)$$

risulta un multiplo di $p(x)$ con tutti i coefficienti positivi, in quanto prodotto di polinomi a coefficienti positivi. I fattori corrispondenti alle radici reali negative hanno già tutti i coefficienti positivi. Non resta dunque che risolvere il problema per gli altri fattori.

Step 3. Se $a < 0$, allora $x - (a + ib)$ ha un multiplo a coefficienti positivi.

Basta infatti considerare

$$(x - (a + ib)) \cdot (x - (a - ib)) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2).$$

Step 4. Se $a \geq 0$, allora $x - (a + ib)$ ha un multiplo a coefficienti non negativi.

Infatti in tali ipotesi il numero $a + ib$ rappresenta un punto del piano di Gauss che sta nel primo o quarto quadrante (al limite sull'asse y). Esisterà dunque un esponente positivo k per cui $(a + ib)^k = a_k + ib_k$ rappresenta un punto del secondo o terzo quadrante (e non sull'asse y), e cioè tale che $a_k < 0$ (se infatti $a + ib = \rho e^{i\theta}$ allora $(a + ib)^k = \rho e^{ik\theta}$). Allora il polinomio

$$(x^k - (a + ib)^k) \cdot (x^k - (a - ib)^k) = x^{2k} - 2a_k x^k + (a_k^2 + b_k^2)$$

è un multiplo di $x - (a + ib)$ con tutti i coefficienti non negativi.

Step 5. Se $a \geq 0$, allora $x - (a + ib)$ ha un multiplo a coefficienti positivi.

Scrivendo per brevità il polinomio trovato allo step 4 nella forma $x^{2k} + \alpha x^k + \beta$ (con $\alpha > 0$ e $\beta > 0$), si ha che

$$(x^{2k}+\alpha x^k+\beta)+x(x^{2k}+\alpha x^k+\beta)+\ldots+x^{k-1}(x^{2k}+\alpha x^k+\beta) = (1+x+\ldots+x^{k-1})(x^{2k}+\alpha x^k+\beta)$$

è ancora un multiplo di $x - (a + ib)$, ma con tutti i coefficienti positivi: infatti i coefficienti dei termini di grado minore di k sono uguali a β, quelli da k a $2k - 1$ sono α ed i restanti sono 1.

Soluzioni alternative

Riportiamo un approccio alternativo al punto fondamentale della soluzione, cioè lo step 4. Scritto $a+ib$ nella forma $\rho e^{i\theta}$, con θ in $(-\pi,0)$ oppure in $(0,\pi)$, cerchiamo numeri reali positivi α e β tali che $a+ib$ sia radice di $x^n+\alpha x+\beta$. Svolgendo i calcoli, ed imponendo l'annullamento della parte reale ed immaginaria, otteniamo il sistema

$$\begin{aligned} \rho^n\cos(n\theta)+\alpha\rho\cos\theta+\beta &= 0,\\ \rho^n\sin(n\theta)+\alpha\rho\sin\theta &= 0, \end{aligned}$$

da cui, con qualche calcolo (si noti che i denominatori non possono annullarsi se la parte immaginaria della radice è non nulla),

$$\alpha=-\rho^{n-1}\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}, \qquad \beta=\rho^{n-1}\frac{-\sin\theta\cos(n\theta)+\cos\theta\sin(n\theta)}{\sin\theta}=\rho^{n-1}\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}.$$

Dobbiamo quindi trovare un valore di n per cui $\sin((n+1)\theta)$ ha lo stesso segno di $\sin\theta$, e segno opposto rispetto a $\sin(n\theta)$. Un tale n esiste sicuramente, in quanto la successione $\sin(n\theta)$ cambia segno infinite volte. Si ha infatti un cambio di segno quando il punto individuato sulla circonferenza trigonometrica dall'angolo $n\theta$ passa dal semipiano $y>0$ al semipiano $y<0$: poiché ad ogni passo il punto ruota, in senso orario od antiorario, di una quantità fissa e minore di π, il punto abbandonerà prima i poi il semipiano in cui si trova per passare all'altro semipiano, e così via. Si noti infine che l'eventuale annullamento di α non crea problemi in questa fase, purché β abbia il segno giusto.

Come perdere punti

La parte fondamentale della soluzione è lo step 4. La sua assenza causa la perdita di buona parte del punteggio. Altri punti (ma in quantità inferiore) si possono perdere tralasciando lo step 5, o comunque non precisando chiaramente se le cose che si stanno costruendo sono maggiori o solo maggiori od uguali a 0.