Algebra

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

1. Dimostrare che 3 numeri reali positivi x, y, z soddisfano l'uguaglianza

$$\frac{x(y-z)}{y+z} + \frac{y(z-x)}{z+x} + \frac{z(x-y)}{x+y} = 0$$

   se e solo se almeno 2 di essi sono uguali tra di loro.

2. Sia $n \geq 1$ un numero intero. Determinare tutte le n-uple ordinate $(a_1, \ldots, a_n)$ di numeri interi tali che

   (i) $a_1 + \ldots + a_n \geq n^2$;

   (ii) $a_1^2 + \ldots + a_n^2 \leq n^3 + 2$.

3. Siano a, b, c numeri reali positivi tali che $a + b + c = 1$.

   Dimostrare che
$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

4. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tali che

$$f(x + f(y)) = f(x) + y + 7$$

   per ogni coppia di numeri razionali x e y.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

5. Sia $p(x)$ un polinomio di terzo grado a coefficienti complessi. Supponiamo che esistono infinite coppie di interi x, y tali che $xp(x) = yp(y)$.

   Dimostrare che

   (a) $p(x)$ ha almeno una radice intera;

   (b) la somma delle radici di $p(x)$ è un intero pari.

6. Siano a, b, c numeri reali positivi tali che a^2, b^2, c^2 sono le lunghezze dei lati di un triangolo.

   Dimostrare che

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3) > 4(a^6+b^6+c^6) + 12a^2b^2c^2.$$

7. Sia $n \geq 2$ un numero intero e siano $(a_1, \ldots, a_n)$ e $(b_1, \ldots, b_n)$ due n-uple di numeri reali tali che

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0.$$

   Dimostrare che

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 \leq n.$$

8. Determinare tutte le coppie di funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

   (i) per ogni coppia di numeri reali x e y si ha che

$$f(x \cdot g(y+1)) + y = x \cdot f(y) + f(x + g(y));$$

   (ii) $f(0) + g(0) = 0$.

Combinatoria

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

1. In una scacchiera 200×200 le caselle sono bianche o nere. La differenza fra il numero di caselle bianche ed il numero di caselle nere è 404.

   Dimostrare che esiste un quadrato 2×2 che contiene un numero dispari di caselle bianche.

2. In una scatola ci sono 2000 palline bianche. Fuori dalla scatola abbiamo a disposizione palline bianche, verdi e rosse in quantità illimitata. Ad ogni mossa possiamo rimpiazzare 2 palline della scatola con 1 o 2 palline, secondo una delle seguenti 5 regole:

   - 2 bianche con 1 verde;
   - 2 rosse con una verde;
   - 2 verdi con 1 bianca e 1 rossa;
   - 1 bianca e 1 verde con 1 rossa;
   - 1 verde e 1 rossa con 1 bianca.

   (a) Sapendo che dopo un certo numero di mosse sono rimaste solo 3 palline nella scatola, dimostrare che almeno una di esse è verde.

   (b) Determinare se è possibile che ad un certo punto rimanga una sola pallina nella scatola.

3. Su n T-shirt, con $n \geq 2$, sono stampati alcuni simboli presi da un insieme X di 8 simboli possibili. Si sa che:

   - ogni T-shirt contiene almeno un simbolo;
   - non ci sono due T-shirt con lo stesso insieme di simboli;
   - per ogni sottoinsieme Y di X, diverso dal vuoto e da X, il numero di T-shirt che contengono almeno un simbolo appartenente ad Y è pari.

   Determinare n.

4. Sia S un insieme finito e sia $\mathcal{F}$ l'insieme delle funzioni $f : \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R}$ tali che

   $$f(X \cap Y) = \min\{f(X), f(Y)\} \qquad \forall X \subseteq S,\ \forall Y \subseteq S.$$

   Determinare la massima cardinalità possibile dell'immagine di una tale funzione, e cioè

   $$\max_{f \in \mathcal{F}} |f(\mathcal{P}(S))|.$$

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

5. Definiamo ricorsivamente una successione di interi $a_0, a_1, a_2, \ldots$ secondo le seguenti regole:

   - $a_0 = 0$;
   - $a_1 = 1$;
   - per ogni $n \geq 1$, a_{n+1} è il minimo intero maggiore di a_n per cui nell'insieme $\{a_0, \ldots, a_{n+1}\}$ non ci sono tre termini in progressione aritmetica.

   Determinare a_{100}.

6. Determinare se esistono 2^{2007} interi positivi soddisfacenti le seguenti condizioni:

   (a) ognuno di essi ha 2^{2006} cifre;

   (b) ognuno di essi ha come cifre decimali solo dei 2 e dei 7;

   (c) comunque se ne scelgano 2, le loro rappresentazioni decimali coincidono in al più metà delle posizioni.

7. Sia k un intero positivo e sia X un insieme di interi positivi con $|X| > 2^k$.

   Dimostrare che X contiene un insieme S con $|S| = k + 2$ tale che per ogni $m \leq k + 2$ i sottoinsiemi di m elementi di S abbiano somme tutte distinte.

8. In uno stato ci sono 2000 città. Alcune di esse sono collegate da una rotta aerea (andata e ritorno). Si sa che, per ogni città A, il numero delle città collegate con A tramite una rotta aerea è una potenza di 2 $(1, 2, 4, \ldots, 1024)$.

   Indichiamo con $\mathcal{D}$ l'insieme delle coppie ordinate (A, B) di città per cui è possibile andare da A a B con al più 2 voli. Per ogni coppia $(A, B) \in \mathcal{D}$ indichiamo con $S(A, B)$ il numero di percorsi che congiungono A e B costituiti da al più 2 voli, e con $O(A, B)$ il numero di percorsi da A a B di lunghezza ottimale (cioè se c'è un volo diretto si scartano tutte le restanti possibilità).

   (a) Dimostrare che non è possibile che si abbia

   $$\sum_{(A,B) \in \mathcal{D}} S(A, B) = 10000.$$

   (b) Determinare se è possibile che si abbia

   $$\sum_{(A,B) \in \mathcal{D}} O(A, B) = 10000.$$

Geometria

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

1. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico.
   (a) Dimostrare che gli ortocentri dei triangoli ABC, BCD, CDA, DAB sono vertici di un quadrilatero congruente ad $ABCD$.
   (b) Dimostrare che i baricentri degli stessi triangoli sono vertici di un quadrilatero ciclico.

2. Sia ABC un triangolo e sia I il suo incentro. Siano I_A, I_B, I_C i simmetrici di I rispetto ai lati BC, CA, AB.
   (a) Dimostrare che la distanza di I_A dalla retta AC è uguale alla distanza di I_B dalla retta BC.
   (b) Dimostrare che AI_A, BI_B, CI_C concorrono.

3. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico in cui $AD = DC$. Sia E il punto di intersezione delle diagonali AC e BD.

   Dimostrare che gli incentri dei triangoli ABE, ABD, BCE, BCD sono i vertici di un quadrilatero ciclico se e solo se $AB = BC$.

4. Sia D un punto sul lato AC del triangolo ABC tale che $BD = CD$; sia E un punto su BC e sia F l'intersezione della parallela al lato BD per E con il lato AB. Sia G l'intersezione dei segmenti AE e DB.

   Dimostrare che $B\widehat{C}G = B\widehat{C}F$.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

5. Sia ABC un triangolo in cui $\widehat{C} < \widehat{A} < 90°$. Sia D il punto del lato AC tale che $BD = BA$. La circonferenza inscritta ad ABC è tangente al lato AB in K ed al lato AC in L. Sia J l'incentro di BCD.

   Dimostrare che KL passa per il punto medio di AJ.

6. Sia $ABCD$ un trapezio con base maggiore AB e base minore CD. Siano K ed L punti di AB e CD, rispettivamente, tali che $AK/KB = DL/LC$. Supponiamo che esistono punti P e Q sul segmento KL tali che $A\widehat{P}B = B\widehat{C}D$ e $C\widehat{Q}D = A\widehat{B}C$.

   Dimostrare che i punti P, Q, B, C giacciono sulla stessa circonferenza.

7. Sia ABC un triangolo con incentro I e circocentro O. Siano AH e BK due altezze, e siano AP e BQ due bisettrici.

   Dimostrare che I sta su HK se e solo se O sta su PQ.

8. Sia ABC un triangolo. Dato un punto interno M, siano A', B', C' le sue proiezioni su BC, CA, AB, e sia $f(M) = AC' + BA' + CB'$.

   Dimostrare che $f(M) = f(N)$ se e solo se la retta MN è parallela alla retta passante per incentro e circocentro di ABC.

Teoria dei numeri

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

1. Determinare tutte le coppie (x, y) di numeri interi per cui esiste un insieme A tale che $|A| = x^2 - y$ e $|\mathcal{P}(A)| = y^2 - x$.

2. Determinare tutte le coppie di numeri interi positivi n ed x tali che
$$2^n + 5^n = x^2 + 65.$$

3. Determinare tutte le quintuple (p, q, r, s, t) di numeri primi che soddisfano il seguente sistema
$$\begin{cases} p^2 + qr = (p+r)^s \\ p^2 + qt = r^4 \end{cases}$$

4. Sia k un intero positivo. Dimostrare che esiste un intero positivo n tale che la rappresentazione decimale di 2^n contiene al suo interno almeno un blocco di esattamente k cifre 0 consecutive.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

5. Determinare tutte le quaterne (a, b, c, d) di interi positivi tali che

$$2^a = 3^b 5^c + 7^d.$$

6. Determinare tutti gli $m \in \mathbb{N}$ per cui

$$\frac{2^m a^m - (a+b)^m - (a-b)^m}{3a^2 + b^2}$$

risulta un numero intero per ogni scelta degli interi a e b non entrambi nulli.

7. Determinare tutte le coppie x, y di numeri interi tali che $x \neq 1$ e

$$\frac{x^7 - 1}{x - 1} = y^5 - 1.$$

8. (a) Siano a e b due interi tali che ab divide $a^2 + b^2 + 1$.
Dimostrare che

$$\frac{a^2 + b^2 + 1}{ab} = 3.$$

(b) Determinare tutte le quaterne di interi positivi (m, n, a, b) tali che

$$a^m b^n = (a + b)^2 + 1.$$

Team Selection Test

1. Sia dato un triangolo acutangolo.
   (a) Determinare il luogo dei punti che sono centri di un rettangolo i cui vertici stanno sui lati del triangolo.
   (b) Determinare se esistono punti che sono centri di 3 rettangoli distinti i cui vertici stanno sui lati del triangolo.

2. Ad un torneo hanno partecipato $2n + 1$ squadre, ciascuna delle quali ha incontrato ognuna delle altre una ed una sola volta. Ogni incontro è terminato con la vittoria di una delle 2 squadre contendenti. Diciamo che una terna di squadre $\{A, B, C\}$ è *ciclica* se A ha battuto B, B ha battuto C e C ha battuto A.
   (a) Determinare, in funzione di n, il minimo numero possibile di terne cicliche.
   (b) Determinare, in funzione di n, il massimo numero possibile di terne cicliche.

3. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che
$$f(xy + f(x)) = xf(y) + f(x)$$
   per ogni coppia di numeri reali x e y.

4. Sia dato un grafo completo su n vertici. Vogliamo colorare i lati ed i vertici del grafo rispettando le seguenti regole:
   - due lati che concorrono ad uno stesso vertice devono avere colori diversi;
   - un vertice deve avere colore diverso da tutti i lati che vi concorrono.

   Per esempio, per colorare un triangolo ABC ($n = 3$) servono come minimo tre colori: bianco per il vertice A ed il lato BC, rosso per il vertice B ed il lato AC, verde per il vertice C ed il lato AB.

   Determinare, in funzione di n, il minimo numero di colori necessari.

5. Sia ABC un triangolo acutangolo e sia P un punto interno. Siano O_a, O_b, O_c i circocentri di BCP, ACP, ABP.
   (a) Determinare il luogo dei punti P tali che
$$\frac{O_aO_b}{AB} = \frac{O_bO_c}{BC} = \frac{O_cO_a}{CA}.$$
   (b) Per ogni tale punto P, dimostrare che AO_a, BO_b, CO_c concorrono in un punto X.

(c) Dimostrare che la potenza di X rispetto alla circonferenza circoscritta ad ABC è data da
$$\frac{a^2+b^2+c^2-5R^2}{4},$$
in cui a, b, c sono le lunghezze dei lati ed R è il raggio della circonferenza circoscritta ad ABC.

6. Sia $p \geq 3$ un numero primo.

(a) Dimostrare che $(p-1)^p+1$ ha almeno un fattore primo diverso da p.

(b) Dimostrare che, se
$$q_1^{\alpha_1} \cdot q_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot q_n^{\alpha_n} = (p-1)^p + 1$$
è la fattorizzazione di $(p-1)^p+1$, allora
$$\sum_{i=1}^{n} q_i \alpha_i > \frac{p^2}{2}.$$

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

Risposte

A1. ...

A2. $(n, n, , \ldots, n)$ e $(n+1, n-1, n, \ldots, n)$ o sue permutazioni.

A3. ...

A4. L'equazione ha 2 soluzioni: $f(x) = x + 7$ ed $f(x) = -x - 7$.

A5. ...

A6. ...

A7. ...

A8. L'unica soluzione è quella con $f(x) = x$ e $g(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

C1. ...

C2. (a) ... (b) Non è possibile.

C3. $2^8 - 1 = 255$

C4. $|S| + 1$

C5. 981 e cioè il numero che in base 3 si scrive come 1100100. In generale a_n si ottiene scrivendo n in base 2 e poi reinterpretando la stessa scrittura in base 3.

C6. Sì

C7. ...

C8. (a) ... (b) Non è possibile.

G1. ...

G2. ...

G3. ...

G4. ...

G5. ...

G6. ...

G7. ...

G8. ...

N1. $(x, y) = (0, -2)$ e $(x, y) = (0, -4)$

N2. $(n, x) = (4, 24)$

N3. $(p, q, r, s, t) = (2, 7, 3, 2, 11)$

N4. ...

N5. $(a, b, c, d) = (6, 1, 1, 2)$

N6. $m \equiv \pm 1$ modulo 6

N7. Non ci sono soluzioni

N8. (a) ... (b) $(m, n, a, b) \in \{(2, 1, 5, 2), (2, 1, 5, 13), (1, 2, 2, 5), (1, 2, 13, 5)\}$

TST1. (a) L'unione dei 3 segmenti (estremi esclusi) che congiungono il punto medio di un lato con il punto medio dell'altezza ad esso relativa.

(b) Sì (il punto in cui i 3 segmenti concorrono).

TST2. (a) 0 (b) $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

TST3. L'equazione ha 2 soluzioni: $f(x) = 0$ ed $f(x) = x$.

TST4. n

TST5. (a) Il luogo è l'ortocentro di ABC (b) ... (c) ...

TST6. ...

“Aiutini”

A1. Fare il denominatore comune e quindi fattorizzare.

A2. Poniamo $a_i = n + b_i$. Cosa possiamo dire della somma dei b_i? E della somma dei b_i^2?

A3. Segnaliamo due approcci.

- Dividiamo per $a^2+b^2+c^2$ e applichiamo Jensen alla funzione convessa $f(x) = 1/x$. Ci riduciamo in questo modo a dimostrare che

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b+b^2c+c^2a} \geq 3.$$

  Omogenizzando e semplificando ci si riduce a

$$\sum_{\text{cyc}}(a^3+ab^2) \geq 2\sum_{\text{cyc}} a^2b$$

  e si conclude applicando AM–GM termine a termine.

- Omogenizzando, svolgendo i conti e semplificando si arriva a

$$\sum_{\text{cyc}}(a^4c+a^3c^2) \geq 2\sum_{\text{cyc}} a^3bc.$$

  Questa è conseguenza diretta delle seguenti 2 disuguaglianze

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{cyc}} a^4c \geq \frac{1}{2}\sum_{\text{cyc}} a^3bc, \qquad \frac{1}{2}\sum_{\text{cyc}}(a^4c+2a^3c^2) \geq \frac{3}{2}\sum_{\text{cyc}} a^3bc,$$

  di cui la prima si dimostra facilmente per riarrangiamento, e la seconda un po' meno facilmente mediante AM–GM (a partire da $a^4c + a^3c^2 + b^3a^2 \geq 3a^3bc$). Si noti che in generale la somma ciclica di a^3c^2 non maggiora la somma ciclica di a^3bc (spiegare perché!).

A4. Con sostituzioni classiche (tipo $x = 0$, $y = 0$, $y = f(z)$) ci si riduce ad una delle seguenti equazioni funzionali (per opportuni valori di k e/o h):

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + k;$$

$$f(x+y+k) = f(x) + f(y);$$

$$f(x+y+k) = f(x) + f(y) + h.$$

Tutte queste si riconducono alla classica equazione di Cauchy introducendo opportune funzioni ausiliare $g(x)$ (ad esempio $f(x) = g(x) - k$ nel primo caso, o $f(x) = g(x+k)$ nel secondo).

A5. Sia $p(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$, con $a \neq 0$, e siano x, y due interi per cui $xp(x) = yp(y)$. Posto $S = x + y$ e $P = xy$ si ha che

$$aS^3 + bS^2 + cS + d = P \cdot (2aS + b).$$

Se esistono infiniti valori di S per cui questa relazione è vera, allora si può far tendere S a $+\infty$ o $-\infty$ e, usando la disuguaglianza che lega S e P, dedurre che $|a| \leq |a|/2$, il che è assurdo.

Di conseguenza esistono infinite coppie (x, y) con la stessa S. Ma allora i corrispondenti P sono diversi, e dunque l'unica possibilità è che LHS ed RHS si annullino entrambi...

A6. Per Cauchy-Schwarz si ha che LHS $\geq (a^2 + b^2 + c^2)^3$. Pertanto è sufficiente dimostrare che $(a^2 + b^2 + c^2)^3 \geq$ RHS. Per questa non resta che applicare la classica sostituzione per i lati di un triangolo $a^2 = x + y$, $b^2 = y + z$, $c^2 = x + z$ e fare i calcoli.

A7. Siano $A = (a_1, \ldots, a_n), B = (b_1, \ldots, b_n)$ e $U = (1, 1, \ldots, 1)$ vettori n-dimensionali. Possiamo scrivere $U = \alpha A + \beta B + R$, dove α e β sono numeri reali ed R è un opportuno vettore resto. Quanto vale il prodotto scalare di U con A e B? Non resta ora che calcolare $|U|^2$.

A8. Supponiamo di sapere a priori che $g(\alpha) = 0$ per un certo $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora ponendo $y = \ldots$ otteniamo che f è affine; a questo punto sostituendo nell'equazione troviamo che g è lineare e con poca fatica si determinano i coefficienti. Tutto si riduce dunque a dimostrare l'esistenza di un tale α. Per far questo ci sono 3 passi:

- dimostrare che f è surgettiva e g iniettiva;
- fare la sostituzione $x = g(y)/(g(y+1) - 1)$ (occhio: si può sempre fare?) in modo da cancellare il primo e l'ultimo termine, e dedurre che

$$y = \frac{f(y)g(y)}{g(y+1) - 1};$$

- utilizzando questa relazione, la condizione $f(0) + g(0) = 0$, l'iniettività di g e la surgettività di f, dedurre che $g(0) = 0$. In quest'ultima fase occorre stare particolarmente attenti a non perdere casi e a non trascurare la possibilità che il denominatore si annulli!

C1. Supponiamo per assurdo che ogni quadratino 2×2 contenga un numero pari di bianche e nere. Allora la scacchiera sarebbe completamente determinata dalla prima riga e dalla prima colonna (in realtà da una riga ed una colonna qualsiasi).

Ne segue che le righe sono tutte o uguali alla prima o uguali alla sua "inversa". Sia D la differenza tra bianche e nere nella prima riga. Cosa possiamo dire della parità di D? Indicato con x il numero di righe uguali alla prima, abbiamo che $404 = xD - (200 - x)D$. Quanto possono valere x e D?

C2. Con ovvio significato dei simboli, un invariante è $B - R + 2V$ modulo 4.

C3. Come primo passo occorre dimostrare che per ogni $Y \subseteq X$ (con $Y \neq X$) il numero di magliette che contengono tutti i simboli di Y è pari. Questo si dimostra per induzione sul numero di elementi di Y applicando il principio di inclusione-esclusione. Ora si procede per assurdo. Se ci fossero degli $Y \subseteq X$ che non rappresentano (esattamente) una maglietta, ne potrei prendere uno di cardinalità k massima: quante sarebbero allora le magliette che contengono Y?

C4. Segnaliamo 2 approcci.

- Sia $|S| = k$. Per prima cosa si costruisce una funzione la cui immagine ha $k+1$ elementi. Per dimostrare che non si può far meglio si indicano con $x_1, \ldots, x_k$ gli elementi di S, poi si pone $Y_i = S \setminus \{x_i\}$, ed infine si osserva che per ogni sottoinsieme $Y \neq \emptyset$ si ha che $F(Y) = \min\{f(Y_i) : x_i \notin Y\}$.
- Porre $g(Y) := f(S \setminus Y)$, quindi determinare la formula per $g(X \cup Y)$ e dedurne che $g(Y) = \min\{g(\{y\}) : y \in Y\}$.

C5. Dimostrare per induzione che $\{a_1, \ldots, a_n\}$ coincide con l'insieme dei primi n interi positivi la cui rappresentazione in base 3 contiene solo zeri e uni.

C6. Dimostriamo per induzione che esiste un insieme X_k di 2^k numeri di 2^{k-1} cifre con le proprietà richieste, richiedendo in più che se c'è un numero $\mathcal{A}$ allora c'è anche il suo "opposto" $\mathcal{A}'$ (scritto mettendo 2 al posto di ogni 7 di $\mathcal{A}$ e viceversa). Nel passaggio induttivo 2 elementi accoppiati $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ di X_k producono i seguenti 4 elementi di X_{k+1} (a 2 a 2 accoppiati): $\mathcal{A}\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}'\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'\mathcal{A}'$.

C7. Ragioniamo per induzione su k. Supponiamo di sapere a priori che in X c'è almeno un numero dispari, ma i numeri pari sono più di quelli dispari. Usiamo allora l'ipotesi induttiva su un opportuno sottoinsieme costituito da tutti numeri pari e poi aggiungiamo un dispari. Per ridursi sempre a questa situazione basta osservare che il problema è invariante per traslazioni e omotetie (il fatto che applicando opportune trasformazioni prima o poi si ricade nella situazione buona va dimostrato con cura!).

C8. (a) Sia $L(A)$ il numero di città direttamente collegate alla città A. Allora si dovrebbe avere che
$$\sum_A L(A) + \sum_A L(A)(L(A)-1) = 10000.$$
La prima sommatoria rappresenta infatti i percorsi di lunghezza 1, mentre la seconda quelli di lunghezza 2 (quanti sono infatti i percorsi di lunghezza 2 con scalo intermedio in A?).

Svolgendo i calcoli si ha che 10000 dovrebbe essere la somma di 2000 potenze di 2 con esponente pari, il che è assurdo per la congruenza modulo 3.

(b) Rispetto a prima dobbiamo escludere tutti quei percorsi $A \to B \to C$ in cui A e C sono collegate direttamente; ma allora dovremmo escludere anche $B \to C \to A$ e $C \to A \to B$ e i tre persorsi inversi, ovvero 6 percorsi per ogni "triangolo" presente sul grafo.

G1. Ponendo l'origine nel centro della circonferenza, ed indicando con A, B, C, D i vettori corrispondenti ai vertici del quadrilatero, si ha che le coordinate degli ortocentri sono del tipo $A+B+C$ (e cicliche), quelle dei baricentri analoghe, ma solo divise per 3. A questo punto per concludere che il quadrilatero degli ortocentri è congruente a quello iniziale ci sono 2 strade:

- mostrare che vengono mandati l'uno nell'altro dall'isometria che manda il vettore x nel vettore $A+B+C+D-x$;
- mostrare che i vettori differenza che rappresentano i lati del secondo quadrilatero sono uguali a quelli del primo (è importante che le uguaglianze siano vettoriali, non solo in modulo, in modo che anche gli angoli siano uguali!).

In entrambi i casi il quadrilatero dei baricentri si ottiene da quello degli ortocenti mediante una omotetia di fattore 1/3.

G2. (a) Sia P la proiezione di I_A sulla retta AC, e sia Q la proiezione di I_A sulla retta BC. I triangoli CIP e CIQ sono congruenti.

(b) Ceva trigonometrico: i seni degli angoli che servono si ricavano utilizzando le lunghezze di AI_A, BI_B e CI_C e le distanze di cui al punto (a).

G3. Fissiamo le notazioni: siano I_1 l'incentro di ABE, I_2 quello di ABD, I_3 quello di BEC ed I_4 quello di BDC. Segnaliamo ora 2 approcci, il primo che interpreta la ciclicità in termini di potenza, il secondo di soli angoli.

- Il quadrilatero $I_1I_2I_3I_4$ è ciclico se e solo se $BI_1 \cdot BI_2 = BI_3 \cdot BI_4$. Essendo gli angoli in B dei 4 triangoli tutti uguali, questo equivale a dire che $r_1/r_4 = r_3/r_2$, in cui ovviamente gli r_i indicano i raggi delle corrispondenti circonferenze inscritte.

  Ora utilizzando le similitudini $BDC \sim BAE$ e $BDA \sim BCE$, ed il fatto che i raggi delle circonferenze inscritte di triangoli simili stanno tra di loro come lati omologhi, la tesi segue.
- Siano M, N, P, Q i punti medi, rispettivamente, degli archi AB, BC, CD, DA (punti di arrivo di opportune bisettrici). I quadrilateri I_1I_4NB ed I_2I_3BM sono ciclici. Di conseguenza $I_1\widehat{I_4}I_3 = I_1\widehat{I_4}B = I_1\widehat{N}B = A\widehat{D}B$, e analogamente $I_1\widehat{I_2}I_3 = C\widehat{D}B$. Dunque $I_1I_2I_3I_4$ è ciclico se e solo se $A\widehat{D}B = C\widehat{D}B$.

G4. Segnaliamo 2 approcci.

(a) Sia T l'intersezione tra le rette EF e AC. La tesi è equivalente all'uguaglianza $G\widehat{C}D = C\widehat{F}T$, la quale a sua volta è equivalente alla similitudine $GCD \sim CFT$, la quale a sua volta è equivalente all'uguaglianza $GD \cdot FT = CT \cdot CD$. Questo segue facilmente dal teorema di Talete e dal fatto che i triangoli BDC e TEC sono isosceli.

(b) Poniamo $G\widehat{C}B = \delta$ e $B\widehat{C}F = \varepsilon$. Non è difficile verificare che $A\widehat{F}T = \beta - \gamma$ e $T\widehat{F}C = \gamma - \varepsilon$. Applicando Ceva trigonometrico nel triangolo ABC rispetto a G, e nel triangolo AFC rispetto ad E, si ottiene che

$$\frac{\sin\delta}{\sin(\gamma-\delta)}=\frac{\sin\varepsilon}{\sin(\gamma-\varepsilon)}.$$

Si conclude quindi sfruttando l'iniettività della funzione $\sin x/(\sin(\gamma-x))$ (in quale intervallo? come si dimostra?).

G5. La parallela a KL per J interseca AC in P. La tesi è equivalente a dimostrare che $AP = 2AL$. Intanto AL si calcola facilmente in funzione dei lati. Sia ora H la proiezione di J su AC. Il triangolo DJP è isoscele (angoli alla base uguali: perché?) e quindi $AP = AD+2DH$. Non resta che calcolare DH ragionando nel triangolo DBC (non occorre calcolare AD perché si semplifica).

G6. Intanto occorre prestare attenzione alle configurazioni, in quanto i punti P e Q possono presentarsi in 2 ordini diversi sul segmento KL. In ogni caso le rette AD, KL, BC concorrono in un punto T. A questo punto si presentano almeno 2 possibilità.

- Sia E l'intersezione tra le rette DQ e AP, e sia F l'intersezione tra le rette PB e CQ. Sfruttando la ciclicità di $EQFP$ e un po' di angoli, si dimostra che la tesi è equivalente al parallelismo tra EF e le 2 basi. Per dimostrare il parallelismo, basta applicare Menelao nel triangolo APT con la trasversale DQ, e poi nel triangolo PTB con la trasversale QC.
- La tesi è equivalente all'uguaglianza $TC\cdot TB = TP\cdot TQ$. Per questione di angoli, TB è tangente in C alla circonferenza per D, C e Q; similmente, TB è anche tangente alla circonferenza per A, P e B. Consideriamo l'omotetia di centro T che porta C in B: essa porta la circonferenza per D, C, Q in quella per A, P, B (perché?), ed il punto Q in un certo punto Q'. Dalle relazioni $TQ/TQ' = TC/TB$ e $TP\cdot TQ' = TB^2$ si ottiene la tesi.

G7. Calcolando le coordinate trilineari di I, O, H, K, P, Q si verifica che I sta su HK se e solo se $\cos\alpha-\cos\beta-\cos\gamma = 0$, e che O sta su PQ se e solo se è verificata esattamente la stessa relazione.

G8. Presentiamo 2 approcci.

- Le tre funzioni che ad M associano AC', BA' e CB' (rispettivamente) sono affini, quindi anche la loro somma f lo è. Gli insiemi di livello di f sono dunque rette tutte parallele tra loro, e non resta che verificare che $f(O) = f(I)$.
- Tracciamo le tre rette per A, B, C perpendicolari (rispettivamente) ad AB, BC e CA. Esse individuano un nuovo triangolo $A'B'C'$ ed $f(M)$ coincide con la somma delle distanze di M dai 3 lati del nuovo triangolo.

  Supponiamo che $B'C'$ sia il lato più corto di $A'B'C'$, e prendiamo un punto P su $A'B'$ tale che $B'P = B'C'$, ed un punto Q su $A'C'$ tale che $C'Q = B'C'$. Allora $f(M)$ è proporzionale all'area del pentagono $B'PMQC'$, dunque $f(M) = f(N)$ se e solo se MN è parallelo a PQ. Questo mostra che le linee di livello di f sono tutte parallele tra di loro. Come prima si conclude verificando che $f(O) = f(I)$.

N1. Il problema equivale a trovare le soluzioni intere dell'equazione $2^{x^2-y} = y^2 - x$. Come prima cosa si dimostra che x e y devono avere la stessa parità. Poi conviene distinguere 4 casi a seconda dei segni di x e y.

- Nel caso $x \geq 0$, $y \geq 0$ si può riscrivere l'equazione nella forma
$$x = \left(y + 2^{(x^2-y)/2}\right)\left(y + 2^{(x^2-y)/2}\right).$$
Applicando ora la disuguaglianza $2^A \geq 2A$ (quando vale?) al primo fattore ...
- Nel caso $x \geq 0$, $y < 0$ riscriviamo l'equazione nella forma $2^{x^2+z} = z^2 - x$. Applicando ora la disuguaglianza $2^A \geq A^2$ (quando vale?) al primo membro otteniamo che ... (occhio a trattare separatamente i casi che restano fuori!).
- Nei restanti 2 casi si procede analogamente.

N2. Il primo passo è dimostrare che n è pari: questo si può fare ragionando modulo 5 (o anche modulo 7). Riscritta l'equazione nella forma $x^2 = 5^{2k} + 2^{2k} - 65$ si dimostra che per $k \geq 4$ il secondo membro è maggiore di $(5^k)^2$ e minore di $(5^k + 1)^2$, dunque non può essere un quadrato perfetto. I casi rimanenti si trattano a parte.

N3. Dalla seconda condizione $qt = (r^2 - p)(r^2 + p)$ si ricava che r e p non sono entrambi dispari. Escluso il caso $r = 2$, resta $p = 2$. Escluso che uno dei fattori possa essere 1, si ha che uno è q e l'altro è t. In ogni caso, passando alla prima equazione, si ha che $s = 2$ (se fosse $s \geq 3$ si avrebbe che LHS $<$ RHS). A questo punto si conclude facilmente.

N4. Questo problema ammette 2 approcci sostanzialmente diversi: uno che punta a piazzare gli zeri a sinistra della rappresentazione, uno che punta a piazzarli a destra.

- Tutto sta a dimostrare il seguente fatto generale: per ogni sequenza k di cifre, esiste una potenza di 2 la cui scrittura decimale inizia (a destra) con la sequenza k (questo ovviamente vale non solo per le potenze di 2, ma per le potenze di tutti i numeri tranne ...). Dopo essere passati ai logaritmi, questo fatto è equivalente a trovare un valore di n per cui la parte frazionaria di $\{n \log_{10} 2\}$ sta in un (piccolo) intervallino assegnato (dipendente da k). L'esistenza di una tale n, a sua volta, segue dal fatto generale che la successione $\{n \log_{10} 2\}$ è densa in $[0, 1]$ (e qui serve l'irrazionalità del logaritmo).
- Sia i un intero, sia n_i il numero di cifre di 2^i, e sia m_i l'ordine moltiplicativo di 2 modulo 5^i. Allora $2^{i+m_i} \equiv 2^i$ modulo 10^i (e non modulo 10^{i+1}: perché?). Allora la rappresentazione decimale di 2^{i+m_i} presenta a destra le cifre di 2^i, precedute (a sinistra) da un blocco di $i - n_i$ zeri. Non resta che verificare che $i - n_i$ assume tutti i valori positivi.

Entrambi gli approcci, se non ottimizzati, portano a trovare una potenza di 2 con un blocco di *almeno* k zeri consecutivi. Per eliminare gli zeri in più, basta ora continuare a moltiplicare per 2 in modo che gli zeri vengano mangiati pian piano da destra. Occorre però accertarsi che non compaiano nuovi zeri da sinistra: questo può accadere se a sinistra dell'ultimo zero c'è un 5 o una potenza di 5. Il loro effetto però dopo un po' termina ...

N5. Mostrare con opportune congruenze che a e d sono pari, dunque scrivere $(2^{a'}-7^{d'})(2^{a'}+7^{d'}) = 3^b5^c$. Indicati con A e B i due fattori del LHS, mostrare che sono coprimi, e quindi ridursi a 3 casi.

- Primo caso: $2^{a'} = 1 + 7^{d'}$. Mostrare che deve essere $a' \geq 3$, quindi d' dispari, quindi osservare che nella fattorizzazione $2^{a'} = (7+1)(7^{d'-1} - 7^{d'-2} + \cdots - 7 + 1)$, il secondo fattore è ..., dunque $d' = 1$.
- Secondo caso: $A = 3^b$ e $B = 5^c$. Mostrare con opportune congruenze che a' e d' sono pari, quindi $3^b = (2^{a''} - 7^{d''})(2^{a''} + 7^{d''})$. Ancora una volta i 2 fattori sono coprimi, quindi ...
- Terzo caso: $A = 5^c$ e $B = 3^b$. Mostrare che a' e d' sono dispari, mentre c è pari. Allora $3^b = 2^{a'+1} - 5^{2c'}$. Fattorizzando si scopre che $2^{(a'+1)/2} - 5^{c'}$ deve essere uguale ad 1, ma allora l'esponente di 2 deve essere multiplo di 4, ma allora portando la potenza di 2 al RHS e fattorizando ancora ...

N6. Ponendo $a = 1$ si trova un'espressione del tipo $p(b)/q(b)$, dove p e q sono polinomi. Condizione necessaria e sufficiente affinché tale espressione sia intera per infiniti valori interi di b è che $q(x)$ divida $p(x)$ come polinomi, dunque che le radici di $q(x)$ siano anche radici di $p(x)$. Sostituendole in $p(x)$ si trova $1 = \alpha^m + \beta^m$, dove α e β sono radici seste dell'unità, e si ottiene $m \equiv \pm 1$ modulo 6.

La condizione è anche sufficiente: questo si mostra partendo dal fatto che $q(b/a)$ divide (come polinomi) $p(b/a)$ e omogenizzando.

N7. Vogliamo trovare un primo p che divide il RHS ma non il LHS. Intanto occorre mostrare (e questo è un fatto generale) che i primi che dividono il LHS sono o 7 o congrui ad 1 modulo 7. A questo punto si distinguono 2 casi.

- Se $7|LHS$, allora y è congruo a ... modulo 7, dunque $RHS = (y-1)(y^4 + y^3 + y^2 + y + 1)$ ha un fattore primo non congruo da 1 modulo 7.
- Nel restante caso abbiamo che LHS $\equiv 1$ modulo 7, ma allora y è congruo a ... modulo 7, dunque ancora una volta $RHS = (y-1)(y^4 + y^3 + y^2 + y + 1)$ ha un fattore primo non congruo da 1 modulo 7.

N8. (a) Tutto sta a dimostrare che deve essere $a = b$, perché a quel punto si conclude abbastanza agevolmente. Consideriamo dunque l'equazione

$$\frac{a^2 + b^2 + 1}{ab} = m,$$

e supponiamo che abbia soluzioni intere. Fissato m, scegliamo, tra tutte le coppie (a, b) che la verificano, una coppia (a_0, b_0) con $a_0 \geq b_0$ e b_0 minimo possibile. L'equazione di partenza può essere riscritta come $a^2 - mb_0a + (b_0^2 + 1)$, cioè come equazione di secondo grado in a. Oltre alla soluzione a_0, questa equazione ha un'altra soluzione intera $a_1 = (b_0^2 + 1)/a_0$. Per la minimalità di b_0 dovrà essere $a_1 \geq b_0$, e si vede abbastanza facilmente che questa condizione implica $a_0 = b_0$.

(b) Dal punto precedente si arriva facilmente all'equazione $a^{m-1}b^{n-1} = 5$, e da qui la conclusione è vicina.

(c) Per i più esperti, può essere interessante considerare l'equazione anche per valori non negativi delle variabili. In questo caso si giunge velocemente all'equazione $a^m = x^2 + 1$, la quale non ha soluzioni intere. Per verificarlo, si può ricorrere al teorema di Catalan (e cioè che le uniche 2 potenze perfette che differiscono di 1 sono 8 e 9), oppure rifarsi la dimostrazione di questo risultato nel caso particolare in cui una potenza è un quadrato. Questo è un ottimo esercizio sugli interi di Gauss, per il quale si può procedere attraverso i seguenti passi.

- Si dimostra che m è dispari (se fosse pari si porta x^2 al LHS e ...).
- Si dimostra (congruenze) che x deve essere pari, dunque $a^m = (2y+i)(2y-i)$.
- Si dimostra che i 2 fattori nella scomposizione sono coprimi, dunque $2y \pm i = (c \pm di)^m$, o viceversa.
- Si dimostra che $d = 1$ (guardando le parti immaginarie), e che c è pari (guardando le norme).
- A questo punto guardando le parti immaginarie dovrebbe essere

$$\pm\binom{m}{2}c^2 \pm \binom{m}{4}c^4 \pm \binom{m}{6}c^6 \pm \ldots = 0,$$

il che non può essere perché la massima potenza di 2 che divide il primo termine è strettamente minore della massima potenza di 2 che divide i restanti termini. Per quest'ultimo punto occorre andare a stimare la massima potenza di 2 che divide un binomiale del tipo $\binom{m}{2i}$ e per questo si può usare che la massima potenza di 2 che divide $(2i)!$ è minore od uguale di $2i - 1$.

TST1. (a) Intanto basta determinare il luogo dei centri dei rettangoli con 2 vertici su AB. Qual è il luogo dei punti medi dell'altro lato del rettangolo parallelo ad AB? Come si ottiene il centro del rettangolo dal punto medio dell'altro lato parallelo ad AB?

(b) Si tratta di dimostrare che i 3 segmenti trovati al punto precedente concorrono. Tali segmenti sono 3 ceviane del triangolo mediale, ed i loro piedi dividono i rispettivi lati in parti proporzionali a quelle determinare dai piedi delle altezze nel triangolo originario. Il punto in cui concorrono risulta il coniugato isotomico dell'ortocentro del triangolo mediale.

TST2. Contare il numero di terne non cicliche, osservando che in ogni terna non ciclica vi è un'unica squadra che ha battuto le altre 2. Indicando con v_i il numero di partite vinte da una squadra S_i, si ha pertanto che

$$|\{\text{Terne non cicliche}\}| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n+1} v_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n+1} v_i.$$

Il primo addendo si maggiora con AM–QM. Non resta dunque che calcolare $v_1 + \ldots + v_{2n+1}$.

TST3. Un modo di procedere è attraverso i seguenti punti.

- Mostrare che, se $f(a) = f(b) \neq 0$, allora $a = b$ (si può fare sfruttando la simmetria). Questa si potrebbe dire "iniettività fuori da 0".
- Mostrare che $f(0) = 0$ e $f(f(x)) = f(x)$.
- Dedurre che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che $f(x) = 0$ oppure $f(x) = x$.
- Escludere le situazioni miste: se esistessero a e b non nulli tali che $f(a) = 0$ e $f(b) = b$, allora $f(ab + b) = f(b)$, ma allora semplificando f (perché si può?) si avrebbe un assurdo.

TST4. È molto semplice mostrare che n colori servono. Per esibire una colorazione ci sono 2 approcci sostanzialmente equivalenti:

- pensare il grafo come un poligono regolare e colorare lati e diagonali per classi di parallelismo;
- numerare vertici e colori con interi modulo n e quindi colorare il lato che unisce V_i a V_j con il colore $i + j$. E i vertici?

TST5. (a) Guardando opportuni quadrilateri ciclici si trovano gli angoli sotto cui P vede i 3 lati. D'altra parte c'è un punto notevole che vede i lati sotto questi angoli .... È l'unico punto con questa proprietà?

(b) Ci sono vari approcci.

- Cercare di descrivere la trasformazione che manda $O_aO_bO_c$ in ABC. Questo si può fare in più modi:
  - vedendola come composizione di trasformazioni (cosa accade facendo l'omotetia con centro H e fattore 2?);
  - usando i vettori con origine nel circocentro di ABC: quali sono in questo caso i vettori che rappresentano O_a, O_b, O_c? Un altro modo di vederlo è mostrare che le 3 circonferenze circoscritte ad ABP, BCP, CAP sono le simmetriche della circonferenza circoscritta ad ABC rispetto ai lati.
- Mostrare che i segmenti AH, BH, CH bisecano i lati di $O_aO_bO_c$, dunque H è il circocentro di $O_aO_bO_c$, ed i 2 triangoli hanno lo stessa circonferenza di Feuerbach. Cosa accade applicando la simmetria centrale rispetto al centro di tale circonferenza?

(c) Tutto si riduce a calcolare la distanza OF in funzione dei lati e di R. Indicando con x, y, z i vettori (con centro in O) corrispondenti ai vertici, si ha che $F = (x+y+z)/2$. Usando quindi relazioni del tipo $c^2 = |x-y|^2$ si trovano i prodotti scalari tra questi vettori, che poi servono per calcolare la norma del vettore corrispondente ad F.

TST6. (a) Dopo aver fattorizzato $(p-1)^p + 1$ nel modo classico (somma di potenze con lo stesso esponente dispari), mostrare che il fattore diverso da p è maggiore di p e congruo a p modulo p^2 (risultato classico).

(b) Mostrare che tutti i q_i sono o p oppure della forma $2kp + 1$, ed in particolare maggiori di p. Applicare quindi AM–GM con p termini, di cui α_1 uguali a q_1, α_2 uguali a q_2 e così via, completando con quanti uni servono.

Team Selection Test – Soluzioni

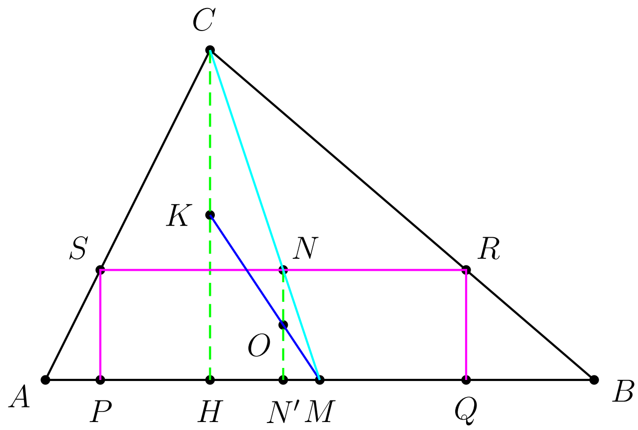
Per ogni problema della gara finale riportiamo

- una soluzione completa, come dovrebbe essere scritta durante una gara;
- alcune idee e osservazioni su possibili soluzioni alternative (spesso non complete);
- alcuni modi classici di perdere punti pur avendo capito come si risolveva il problema.

Soluzione problema 1

Parte (a). Il luogo richiesto è l'unione dei 3 segmenti (estremi esclusi) che congiungono il punto medio di un lato con il centro dell'altezza relativa al lato stesso.

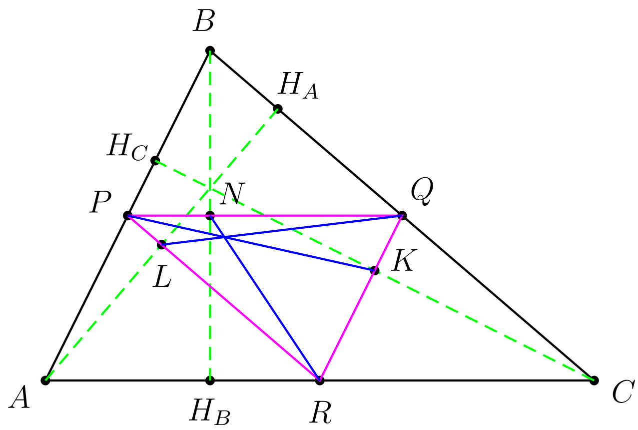
Per dimostrarlo, iniziamo osservando che ogni rettangolo avrà 2 vertici P e Q su di un lato (che supponiamo wlog essere AB), ed i restanti vertici R ed S sui restanti 2 lati. È inoltre immediato verificare che la retta RS determina univocamente un rettangolo, purché intersechi l'altezza CH del triangolo (che è sempre interna al triangolo, essendo il triangolo acutangolo).



Sia ora K il punto medio dell'altezza, N il punto medio di RS, N' la proiezione di N su AB, O il punto medio di NN', che è anche il centro del rettangolo. Con facili similitudini si vede che il punto N sta sulla mediana CM. Analogamente, ragionando nel triangolo CHM e sfruttando il parallelismo tra CH ed NN', si ha che O appartiene al segmento KM.

Viceversa, dato un qualunque punto O sul segmento KM (diverso dagli estremi), tracciamo per esso la perpendicolare ad AB, la quale interseca CM in un punto N. Tracciata per N la parallela ad AB, indicate con R ed S le sue intersezioni con CB e CA, rispettivamente, ed indicate con P e Q le proiezioni di S ed R su AB, è immediato verificare che $PQRS$ è un rettangolo con i vertici sui lati del triangolo ed il centro in O.

Parte (b). La tesi è equivalente a dimostrare che i 3 segmenti trovati al punto precedente concorrono. Per fissare le notazioni, siano P, Q, R i punti medi dei lati, e siano K, L, N i punti medi delle altezze relative ai lati stessi, i cui piedi indichiamo con H_A, H_B, H_C.



Per il teorema di Talete si ha che K, L, N stanno sui lati del triangolo mediale PQR, di cui pertanto PK, QL, RN sono 3 ceviane. Inoltre, per ovvie similitudini tra triangoli, si ha che $PN/NQ = AH_B/H_BC$ e similmente per i punti K ed L. Ne segue che

$$\frac{PN}{NQ} \cdot \frac{QK}{KR} \cdot \frac{RL}{LP} = \frac{AH_B}{H_BC} \cdot \frac{BH_C}{H_CA} \cdot \frac{CH_A}{H_AB} = 1,$$

in cui la prima uguaglianza è conseguenza delle proporzioni che abbiamo appena descritto e la seconda segue dal teorema di Ceva applicato alle altezze di ABC. Pertanto, per il teorema di Ceva in PQR si ha che PN, QL ed RN concorrono.

Soluzioni alternative

Per la parte (a) esistono vari approcci possibili.

- Dopo aver determinato il luogo descritto dal punto N, mostrare che il luogo descritto da O è l'immagine del luogo precedente mediante l'affinità che "dimezza la distanza dalla retta AB" (ponendo l'asse x lungo la retta AB sarebbe l'applicazione $(x, y) \to (x, y/2)$). Non resta dunque che calcolare l'immagine della mediana.
- Da subito si può impostare il problema analiticamente. Con riferimento alla prima figura, si pone $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (\alpha, \beta)$, $P = (x, 0)$, quindi si determinano le coordinate di S, R, O e si verifica che O sta sulla retta voluta.

Osservazione

Nella parte (b) abbiamo in realtà dimostrarto che il punto in cui concorrono i 3 segmenti è il coniugato isotomico dell'ortocentro del triangolo mediale.

Come perdere punti

Si tratta di un problema abbastanza facile, dunque bisogna aspettarsi che i correttori siano in agguato per togliere punti.

Nella parte (a) si perde un punto non spiegando perché *tutti* i punti del segmento considerato stanno nel luogo (cioè la costruzione inversa).

Nella parte (b) si perde un punto non osservando esplicitamente che i punti medi delle altezze giacciono sui lati del triangolo mediale.

Soluzione problema 2

Il massimo numero di terne cicliche è $n(n-1)(2n+1)/6$.

Per dimostrarlo, contiamo quante sono le terne non cicliche. Rappresentando il torneo con un grafo orientato, è facile vedere che ogni terna non ciclica contiene un('unic)a squadra che ha battuto le altre 2, e che per questo chiameremo "capoterna" [in gara aggiungerei una figura con le frecce].

Indicando con v_i il numero di partite vinte da una squadra S_i, abbiamo pertanto che il numero di terne non cicliche con capoterna S_i è $\binom{v_i}{2}$ e pertanto

$$|\{\text{Terne non cicliche}\}| = \sum_{i=1}^{2n+1} \binom{v_i}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n+1} v_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n+1} v_i \geq \frac{1}{2(2n+1)}\left(\sum_{i=1}^{2n+1} v_i\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n+1} v_i,$$

dove la disuguaglianza segue da AM–QM.

Ora $v_1 + \ldots + v_{2n+1}$ è uguale al numero totale di partite giocate nel torneo, e cioè $\binom{2n+1}{2}$. Ne segue che

$$|\{\text{Terne non cicliche}\}| \geq \frac{1}{2n}\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 - \frac{n(n-1)}{4} = \frac{n(n-1)(2n+1)}{2},$$

e per differenza

$$|\{\text{Terne cicliche}\}| \leq \binom{2n+1}{3} - \frac{n(n-1)(2n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Bisogna ora far vedere che è possibile realizzare un torneo in cui vale il segno di uguale. Esaminando la dimostrazione si evince che si ha l'uguaglianza se e solo se $v_1 = \ldots = v_{2n+1} = n$, cioè se e solo se ogni squadra ha esattamente n vittorie ed n sconfitte.

Per realizzare un torneo del genere basta identificare le squadre con i vertici di un poligono regolare di $2n+1$ lati e fare sì che ogni squadra vinca con le n che stanno alla sua destra e perda con le rimanenti.

Osservazione

È interessante considerare questo problema anche per un torneo con un numero pari $2n$ di squadre. In questo caso si dimostare che il massimo numero di terne cicliche è dato da $n(n-1)(n+1)/3$. La dimostrazione è leggermente più complicata: si può infatti applicare AM–QM nello stesso modo? Come si può poi costruire l'esempio?

Come perdere punti

Non mostrando l'esempio di un torneo per cui vale l'uguaglianza.

Soluzione problema 3

Step 1. L'equazione funzionale ha 2 soluzioni: la funzione identicamente nulla $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e la funzione identica $f(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

È immediato verificare che le 2 funzioni indicate soddisfano l'equazione funzionale. Resta da dimostrare che sono le uniche a farlo.

Step 2. Ponendo $x = 0$ otteniamo che

$$f(f(0)) = f(0). \tag{3.1}$$

Ponendo $y = 0$ otteniamo che

$$f(f(x)) = xf(0) + f(x) \tag{3.2}$$

Step 3. Mostriamo che f è "iniettiva fuori da 0".

Siano infatti a e b numeri reali tali che $f(a) = f(b) = k \neq 0$. Allora

$$(a+1)k = af(b) + f(a) = f(ab + f(a)) = f(ba + f(b)) = bf(a) + f(b) = (b+1)k,$$

da cui, essendo $k \neq 0$, si deduce facilmente che $a = b$. Questo mostra che la controimmagine di ogni valore non nullo è costituita da al più un elemento.

Step 4. Mostriamo che $f(0) = 0$ e quindi per la (3.2) si ha che

$$f(f(x)) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Supponiamo infatti per assurdo che $f(0) \neq 0$. Allora applicando lo step 3 con $a = k = f(0)$ e $b = 0$ potremmo dedurre che $a = b$, e cioè $f(0) = 0$.

Step 5. Mostriamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che $f(x) = 0$ oppure $f(x) = x$.

Se infatti $f(x) \neq 0$, allora per lo step 3 possiamo "semplificare f" nella (3.3) ottenendo che $f(x) = x$.

Step 6. Siamo ora pronti per concludere la dimostrazione. Se $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora abbiamo la funzione identicamente nulla, che già sappiamo essere una soluzione. Se $f(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora abbiamo la funzione identica, che già sappiamo essere una soluzione.

Restano da escludere le situazioni miste. Supponiamo dunque per assurdo che esista $a \neq 0$ tale che $f(a) = 0$, ed esista $b \neq 0$ tale che $f(b) = b$. Applicando l'equazione funzionale con $x = b$ ed $y = a$ otteniamo che $f(ab+b) = f(b)$ (si noti che abbiamo lasciato $f(b)$ al RHS). Essendo $f(b) \neq 0$ possiamo applicare lo step 3 e "semplificare f" deducendo che $ab + b = b$, il che è assurdo.

Soluzione alternativa

Consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - x$, in modo che si abbia $f(x) = g(x) + x$. Andando a sostituire nell'equazione funzionale otteniamo che

$$g(xy + g(x) + x) + xy + f(x) = x(g(y) + y) + f(x),$$

da cui semplificando si ottiene

$$g(xy + g(x) + x) = xg(y). \tag{3.4}$$

In particolare ponendo $y = -1$ nella (3.4) abbiamo che

$$g(g(x)) = xg(-1). \tag{3.5}$$

Distinguiamo ora 2 casi.

- Se $g(-1) = 0$, allora la (3.5) ci dice che g è iniettiva e surgettiva. Ponendo $y = g(z)$ nella (3.4), e sfruttando la simmetria di quello che si ottiene, abbiamo che

  $$g(xg(z)+g(x)+x) = xg(g(z)) = xzg(-1) = zxg(-1) = zg(g(x)) = g(zg(x)+g(z)+z),$$

  da cui, per l'iniettività di g, si ha che

  $$xg(z) + g(x) + x = zg(x) + g(z) + z.$$

  Ponendo ora $z = 0$ (o anche $z = 2007 \ldots$) si ottiene che g è una funzione affine del tipo $g(x) = ax + b$, e sostituendo nell'equazione funzionale data si ricavano facilmente i possibili valori dei parametri a e b.

- Se $g(-1) = 0$, allora la (3.5) ci dice che $g(g(x)) = 0$. Vogliamo dimostrare che in questo caso la g è identicamente nulla (dunque $f(x)$ è la funzione identica, già trovata nel caso precedente). Supponiamo allora per assurdo che esista $a \in \mathbb{R}$ tale che $g(a) \neq 0$. Ponendo $y = a$ nella (3.4) si avrebbe allora che $g(ax + g(x) + x)$ è surgettiva, dunque anche g è surgettiva, dunque anche $g(g(x))$ è surgettiva, il che contraddice il fatto che $g(g(x)) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Come perdere punti

Trattandosi di un'equazione funzionale, c'è sempre un modo molto semplice di perdere punti: non verificare che le soluzioni, ottenute ragionando per condizioni necessarie, sono poi effettivamente soluzioni dell'equazione data (la verifica!).

Un modo elegante (e molto classico) per perdere sostanzialmente tutti i punti è di porre $f(x) = y$ e riscrivere la (3.3) come $f(y) = y$ e dedurne che la funzione f è l'identità.

Un altro modo classico di perdere buona parte del punteggio è concludere al termine dello step 5 della prima soluzione proposta, e cioè senza escludere le situazioni miste in cui $f(x) = 0$ per un po' di valori della x ed $f(x) = x$ per altri valori della x.

Soluzione problema 4

Il minimo richiesto è n.

È chiaro intanto che almeno n colori sono necessari in quanto, dato un vertice, serve un colore per quel vertice ed altri $n-1$ colori per i lati che vi concorrono.

Per mostrare che n colori sono sufficienti, indichiamo i vertici con $v_1, \ldots, v_n$ ed i colori con $c_1, \ldots, c_n$. Coloriamo quindi il lato che congiunge V_i e V_j con il colore di indice $i+j \pmod n$, e coloriamo il vertice V_i con il colore di indice $2i \pmod n$. In questo modo, in un certo senso, stiamo colorando un vertice come se fosse un lato che unisce quel vertice con se stesso. Dobbiamo ora fare 2 verifiche.

- Consideriamo 2 lati concorrenti nel vertice V_i, ed indichiamo con V_j e V_k i restanti estremi. Il loro colore coincide se e solo se $i+j \equiv i+k \pmod n$, cioè se e solo se $j \equiv k \pmod n$. Questo mostra che 2 lati diversi con un vertice in comune hanno colori diversi.

- Il colore del lato che congiunge V_i e V_j coincide con quello di V_i se e solo se $i+j \equiv 2i \pmod n$, cioè se e solo se $j \equiv i \pmod n$, cosa impossibile. Questo mostra che il colore di un vertice è diverso da quello dei lati che vi concorrono.

Soluzioni alternative

Un modo alternativo di descrivere l'esempio precedente è il seguente. Identifichiamo il grafo con un poligono regolare. A questo punto coloriamo lati e diagonali per "classi di parallelismo", cioè colorandone 2 dello stesso colore se e solo se sono paralleli (dunque non si incontrano). Si dimostra abbastanza facilmente che le classi di parallelismo sono n (numerando i vertici da 1 ad n in qualche verso, la classe di parallelismo del lato/diagonale che unisce V_i a V_j è determinata da $i+j \pmod n$).

In questo modo da ogni vertice escono $n-1$ lati/diagonali di colori diversi, e resta libero un colore per il vertice stesso.

Seguendo le costruzioni che abbiamo mostrato, nel caso dispari alla fine tutti i vertici risultano di colori diversi, mentre nel caso pari 2 vertici hanno lo stesso colore se e solo se sono opposti (pensiamo sempre all'identificazione del grafo con un poligono regolare).

Nel caso pari è invece anche possibile colorare tutti i vertici dello stesso colore. Pensiamo infatti un grafo completo su $2k$ punti come un grafo completo su $2k-1$ punti al quale abbiamo aggiunto un $2k$-esimo punto collegato con tutti i precedenti. Seguiamo allora il procedimento precedente per colorare il sottografo con $2k-1$ punti, con l'unica variante che, invece di colorare i vertici, coloriamo i lati che li congiungono al $2k$-esimo punto. In questo modo con $2k-1$ colori abbiamo colorato tutti i lati del grafo completo su $2k$ punti. Ora non ci resta che colorare tutti i vertici con il restante $2k$-esimo colore.

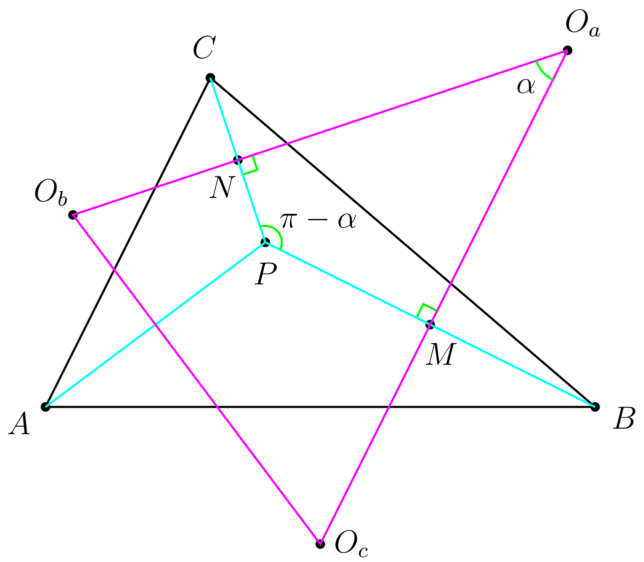
Come perdere punti

Esibendo la colorazione ma non mostrando che effettivamente funziona.

Soluzione problema 5

Parte (a). Mostriamo che il luogo richiesto è costituito dal solo ortocentro (che in questo caso è interno al triangolo).

Utilizziamo le notazioni classiche per gli elementi di un triangolo. La condizione richiesta è equivalente alla similitudine $ABC \sim O_aO_bO_c$, la quale a sua volta si traduce in termini di angoli dicendo che $O_c\widehat{O_a}O_b = \alpha$, e cicliche.



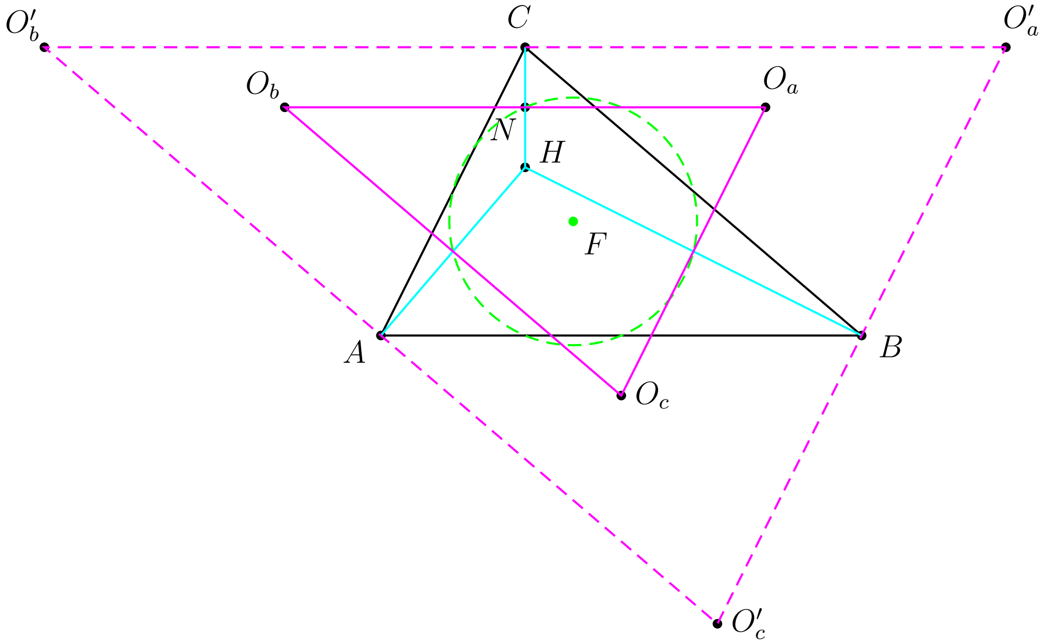
I lati di $O_aO_bO_c$ sono gli assi dei segmenti AP, BP, CP. Indicato con M il punto medio di BP e con N il punto medio di CP, il quadrilatero $MPNO_a$ è ciclico (avendo 2 angoli opposti retti) e quindi $B\widehat{P}C = 180° - \alpha$. In modo del tutto analogo si dimostra che $C\widehat{P}A = 180° - \beta$ e $A\widehat{P}B = 180° - \gamma$.

È immediato verificare che l'ortocentro H del triangolo ha questa proprietà. Resta da dimostrare che è l'unico punto ad avercela. Per far questo osserviamo che il luogo dei punti interni al triangolo che vedono il segmento BC sotto un angolo di $180° - \alpha$ è un arco di circonferenza passante per B, C, H. Analogamente, il luogo dei punti interni al triangolo che vedono il segmento CA sotto un angolo di $180° - \beta$ è un arco di circonferenza passante per C, A, H. Questi 2 archi si incontrano in 2 punti, che sono C ed H. Quando aggiungiamo il terzo arco (quello passante per A, B, H) l'unico punto in comune resta H.

Parte (b). D'ora in poi supponiamo che P coincida con l'ortocentro H. Come osservato precedentemente i lati del triangolo $O_aO_bO_c$ sono gli assi dei segmenti AH, BH, CH, dunque sono paralleli a quelli di ABC.

Di conseguenza l'omotetia di centro H e fattore 2 manda $O_aO_bO_c$ in un triangolo $O'_aO'_bO'_c$ i cui lati sono paralleli a quelli di ABC e passano per i vertici di ABC: ne segue che ABC è il triangolo mediale di $O'_aO'_bO'_c$. Pertanto $O'_aO'_bO'_c$ viene a sua volta mandato in ABC mediante l'omotetia con centro nel baricentro G (di ABC o di $O'_aO'_bO'_c$, che tanto è lo stesso) e fattore $-1/2$.

La composizione di queste 2 omotetie manda $O_aO_bO_c$ in ABC. Poiché la composizione di 2 omotetie è un'omotetia che ha come fattore il prodotto dei 2 fattori, nel nostro caso la composizione ha fattore -1, dunque è una simmetria centrale rispetto ad un opportuno punto fisso F. Essendo F il punto fisso della simmetria centrale che manda $O_aO_bO_c$ in ABC, è chiaro che in F concorrono AO_a, BO_b, CO_c.



Componendo in successione le 2 omotetie appena descritte si ha che il punto N, intersezione di CH ed O_aO_b, viene mandato prima in C, e poi nel punto medio di AB. Questo mostra che N è il punto medio di O_aO_b. Ripetendo questo discorso sui 3 lati si vede che AH, BH, CH sono gli assi di $O_aO_bO_c$, e dunque H è il circocentro di $O_aO_bO_c$, mentre viceversa il circocentro O di ABC è l'ortocentro di $O_aO_bO_c$. Il punto fisso della simmetria centrale è quindi il punto medio di OH, cioè il centro della circonferenza di Feuerbach (di ABC o di $O_aO_bO_c$, che tanto è lo stesso).

Parte (c). Per quanto dimostrato nel punto precedente, dobbiamo calcolare la potenza del punto F rispetto alla criconferenza circoscritta. Consideriamo i punti del piano come vettori con origine nel circocentro di ABC. Indichiamo con x, y, z i vettori corrispondenti ai vertici A, B, C, rispettivamente. Allora

$$c^2 = |x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2x \cdot y = 2R^2 - 2x \cdot y,$$

da cui $-2x \cdot y = c^2 - 2R^2$ e analogamente $-2y \cdot z = a^2 - 2R^2$ e $-2z \cdot x = b^2 - 2R^2$.

In questo sistema di riferimento è ben noto che $H = x+y+z$ e quindi $F = (x+y+z)/2$. La potenza di F rispetto alla circonferenza circoscritta ad ABC è quindi data da

$$R^2 - OF^2 = R^2 - \frac{|x+y+z|^2}{4} = R^2 - \frac{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + 2x \cdot y + 2y \cdot z + 2z \cdot x}{4} =$$

$$= \frac{4R^2 - 3R^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 6R^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 5R^2}{4},$$

che è quanto volevamo dimostrare.

Soluzioni alternative

Segnaliamo alcuni dei possibili approcci alternativi al punto (b).

- Una volta scoperto che i lati di $O_aO_bO_c$ sono paralleli a quelli di ABC, la concorrenza richiesta segue immediatamente dal teorema di Desargues.

- Indicati con x, y, z i vettori, con origine in O, corrispondenti ai vertici A, B, C, non è difficile dimostrare che $O_a = y + z$ (basta mostrare che la sua distanza dai punti C, B ed H è la stessa) ed analogamente $O_b = z + x$, $O_c = x + y$. Ricordando che $H = x + y + z$, abbiamo pertanto che la trasformazione del piano $w \to H - w$ manda ABC in $O_aO_bO_c$. Trattandosi di una simmetria centrale la concorrenza è dimostrata. Inoltre è immediato verificare che il punto fisso è proprio $H/2$.

- In vari modi si può dimostrare che N è il punto medio di O_aO_b, ad esempio

  - con un calcolo trigonometrico nei triangoli HCA ed HCB (si tratta di determinare la distanza dei 2 circocentri dal lato CH in funzione della lunghezza del lato CH stesso e degli angoli);
  - mostrando che i triangoli isosceli CHO_a e CHO_b sono congruenti: a tal fine basta mostrare che i loro angoli in O_a ed O_b sono uguali, il che segue dall'essere questi angoli il doppio (per questioni di angoli al centro ed alla circonferenza) degli angoli $C\widehat{A}H$ e $C\widehat{B}H$, i quali a loro volta sono uguali.

  A questo punto consideriamo l'affinità (unica) che manda ABC in $O_aO_bO_c$. Questa manda dunque i punti medi dei lati di ABC nei punti medi dei segmenti che congiungono H con i vertici di ABC. Ma noi conosciamo già un'affinità con questa proprietà: la simmetria centrale rispetto al centro della circonferenza di Feuerbach (si ricorda che, per esempio, il punto medio di AB ed il punto N sono diametralmente opposti nella circonferenza di Feuerbach di ABC).

- Dopo aver dimostrato che N è il punto medio di O_aO_b, abbiamo che i 2 triangoli hanno la stessa circonferenza di Feurebach, dunque sono anche congruenti. Sfruttando anche il parallelismo tra i lati, non è difficile concludere che l'angolo $C\widehat{F}O_c$ misura 180°.

- Le circonferenze circoscritte ai 3 triangoli ABH, BCH, CAH sono le simmetriche della circonferenza circoscritta ad ABC rispetto ai 3 lati (semplice conto di angoli). In particolare hanno tutte lo stesso raggio ed i centri O_a, O_b, O_c sono i simmetrici di O rispetto ai lati. Da qui si aprono varie possibilità: o si considera l'omotetia con centro in O e fattore $1/2$ che manda $O_aO_bO_c$ nel triangolo mediale di ABC e si prosegue poi come nella prima soluzione presentata, o si deduce che i 2 traingoli hanno la stessa circonferenza di Feuerbach e si prosegue come al punto precedente, o dopo aver dedotto la concorrenza con Desargues si osserva che il punto in questione è proprio F visto che ortocentro e circocentro si scambiano.

Come perdere punti

Il modo classico per perdere un punto sulla parte (a) è di non dimostrare che l'ortocentro è l'*unico* punto che vede i lati sotto determinati angoli.

Soluzione problema 6.

Parte (a). Per una classica scomposizione abbiamo che

$$(p-1)^p + 1 = (p-1+1)\left[(p-1)^{p-1} - (p-1)^{p-2} + \ldots - (p-1) + 1\right].$$

Mostriamo ora che il secondo fattore è maggiore di p ed è congruo a p modulo p^2: questo basta per concludere che è divisibile per un fattore primo diverso da p.

Per dimostrare che è maggiore di p basta scriverlo nella forma

$$(p-1)^{p-2}((p-1)-1) + (p-1)^{p-4}((p-1)-1) + \ldots + (p-1)((p-1)-1) + 1$$

ed osservare che, anche trascurando l'addendo 1 finale, abbiamo comunque $(p-1)/2$ addendi, tutti maggiori od uguali a 3.

Per dimostrare che è congruo a p modulo p^2, osserviamo che per la formula del binomio di Newton si ha che

$$(p-1)^k \equiv (-1)^k + k(-1)^{k-1}p \pmod{p^2}$$

e quindi, essendo $p \neq 2$,

$$\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k(p-1)^k \equiv \sum_{k=0}^{p-1}(1-kp) \equiv p - p\sum_{k=0}^{p-1} k \equiv p - p\cdot\frac{p(p-1)}{2} \equiv p \pmod{p^2}.$$

Parte (b). Dimostriamo preliminarmente che tutti i primi diversi da p che dividono $(p-1)^p+1$ sono della forma $2kp+1$.

Sia dunque q un qualunque primo, diverso da p, che divide $(p-1)^p+1$. Allora $(p-1)^p \equiv -1 \pmod q$ e quindi $(p-1)^{2p} \equiv 1 \pmod q$. Ne segue che $\mathrm{ord}_q(p-1) | 2p$ e dunque tale ordine moltiplicativo può essere solo 1, 2, p, $2p$. Escludiamo ora le prime 3 possibilità.

Se l'ordine fosse 1 oppure p, allora avremmo che $(p-1)^p \equiv 1 \pmod q$, ma noi sappiamo già che $(p-1)^p \equiv -1 \pmod q$: ne segue che dovrebbe essere $1 \equiv -1 \pmod q$, il che è possibile solo per $q=2$, cosa che non può essere perché $(p-1)^p+1$ è dispari. Se fosse invece $\mathrm{ord}_q(p-1) = 2$, allora avremmo che $p-1 \equiv -1 \pmod q$, cioè $p \equiv 0 \pmod q$, e quindi $p = q$, cosa che abbiamo escluso.

Ne segue che $\mathrm{ord}_q(p-1) = 2p$ e, poiché l'ordine divide $q-1$, ne segue che $2p|(q-1)$ e quindi q è della forma $2kp+1$.

Ora sappiamo in particolare che tutti i fattori primi di $(p-1)^p+1$ sono maggiori od uguali di p. Abbiamo allora che

$$p^p = [(p-1)+1]^p \geq (p-1)^p + 1 = q_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot q_n^{\alpha_n} \geq p^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p^{\alpha_n} = p^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n},$$

da cui $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leq p$. Applicando ora AM–GM alla p-upla

$$\underbrace{q_1,\ldots,q_1}_{\alpha_1},\underbrace{q_2,\ldots,q_2}_{\alpha_2},\ldots,\underbrace{q_n,\ldots,q_n}_{\alpha_n},\underbrace{1,\ldots,1}_{p-\sum\alpha_i}$$

otteniamo che

$$\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i q_i \geq \sqrt[p]{q_1^{\alpha_1}\cdot q_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot q_n^{\alpha_n}} = \sqrt[p]{(p-1)^p+1} > p-1,$$

e pertanto

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i > p(p-1) \geq \frac{p^2}{2}$$

non appena $p \geq 3$.

Soluzioni alternative

Per il punto (a) una soluzione "furbetta" consiste nel ricorrere al teorema di Catalan (le uniche potenze perfette che differiscono di 1 sono 8 e 9).

Un approccio alternativo alla disuguaglianza del punto (b) è il seguente.

Consideriamo i numeri reali β_i tali che $q_i^{\alpha_i} = p^{\beta_i}$, e cioè $\beta_i = \alpha_i \log q_i / \log p$. Mostriamo ora che per $q_i \geq p$ (cosa che accade nel nostro caso) si ha che $\alpha_i q_i \geq \beta_i p$. Infatti con semplici calcoli tale relazione risulta equivalente a

$$\frac{q_i}{\log q_i} \geq \frac{p}{\log p},$$

la quale segue immediatamente dalla crescenza della funzione $x/\log x$ per $x \geq e$ (calcolare la derivata!) e dal fatto che $p \geq 3 > e$. Di conseguenza

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i \geq \sum_{i=1}^{n} \beta_i p = p \sum_{i=1}^{n} \beta_i.$$

Per stimare l'ultima sommatoria osserviamo che

$$(p-1)^p + 1 = \prod_{i=1}^{n} q_i^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{n} p^{\beta_i} = p^{\beta_1 + \ldots + \beta_n},$$

e quindi

$$p \sum_{i=1}^{n} \beta_i = p \log_p \left[(p-1)^p + 1\right] > p^2 \log_p (p-1).$$

Non resta dunque che dimostrare che $\log_p(p-1) \geq 1/2$, e cioè che $(p-1)^2 \geq p$, il che è banale per $p \geq 3$.

Come perdere punti

C'è solo l'imbarazzo della scelta:

- non mostrando nel punto (a) che il secondo fattore è maggiore di p;
- non escludendo correttamente che l'ordine moltiplicativo $\mathrm{ord}_q(p-1)$ sia 1, 2 oppure p;
- ricorrendo strada facendo a disuguaglianze che sono chiaramente verificate (per questioni di ordini di grandezza) per valori sufficientemente grandi del parametro coinvolto, senza verificarle per tutti i valori del parametro coinvolti nella dimostrazione. Se, per esempio, ci serve che $(n-3)^n > n^2$ per ogni intero $n \geq 5$, non basta dire che per $n = 5$ è vero e poi il LHS cresce più velocemente del RHS.