# Algebra

## Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

1. Determinare tutte le funzioni iniettive $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tali che

$$f(f(n)) \leq \frac{n + f(n)}{2}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2. Trovare tutti i polinomi $p(x)$ a coefficienti reali tali che

$$p(-x^2) = p(x) \cdot p(x-1).$$

3. Siano $a$, $b$, $c$ numeri reali positivi tali che $(a+b)(b+c)(c+a) = 8$.
Dimostrare che

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[27]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}.$$

4. Siano $m, n$ interi positivi con $m$ dispari. Dimostrare che

$$\frac{1}{2^m n} \sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{2k} (2n-1)^k$$

è un numero intero.

## Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

5. Siano $a$, $b$, $c$ numeri reali positivi tali che

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \geq 1.$$

Dimostrare che

$$a+b+c \geq ab+bc+ca.$$

6. Sia $n$ un intero positivo.

   (a) Dimostrare che non esistono polinomi $p(x)$ a coefficienti reali di grado $n$ tali che $p(i) = 2^i$ per ogni $i = 0, 1, \ldots, n, n+1$ e $p(n+2) = 2^{n+2} - n - 3$.

   (b) Dimostrare che esiste un unico polinomio $p(x)$ a coefficienti reali che soddisfa $n+2$ delle $n+3$ condizioni imposte al punto precedente.

7. Determinare tutte le funzioni $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ tali che

$$f(x)f(y) = 2008 \cdot f(x + yf(x))$$

per ogni coppia di numeri reali positivi $x$ e $y$.

8. Sia $n$ un intero positivo. Determinare più grande costante $k_n$ tale che

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i^2) \geq k_n \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

per ogni $n$-upla di numeri reali $x_1, \ldots, x_n$.

# Combinatoria

## Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

1. Dimostrare che ogni insieme di 12 interi positivi distinti di 2 cifre contiene 2 sottoinsiemi non vuoti $A$ e $B$ tali che

   - $A \cap B = \emptyset$;
   - $|A| \leq 3$ e $|B| \leq 3$;
   - la somma degli elementi di $A$ è uguale alla somma degli elementi di $B$.

2. Una scacchiera $6 \times 6$ è tassellata con 18 pezzi $2 \times 1$ di domino.

   Dimostrare che la scacchiera può essere suddivisa in due rettangoli senza tagliare nessun domino.

3. In una scacchiera $2008 \times 2008$ sono piazzate alcune pedine con la seguente proprietà: comunque si scelgano 2008 caselle della scacchiera, in modo che ce ne sia una per ogni riga ed una per ogni colonna, in queste 2008 caselle ci sono *esattamente* 2 pedine.

   Dimostrare che ci sono due righe o due colonne della scacchiera che contengono tutte le pedine.

4. Sia $n \geq 2$ un numero intero, e siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numeri interi tali che $0 < a_i \leq i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Supponiamo inoltre che $a_1 + \ldots + a_n$ sia pari.

   Dimostrare che nella somma

   $$a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n$$

   possiamo scegliere i segni in modo tale che il risultato sia 0.

## Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

5. Sia $G$ un grafo connesso in cui almeno un vertice è connesso con un numero dispari di altri vertici. Dimostrare che gli archi di $G$ possono essere colorati in rosso e in blu in modo tale che per ogni vertice $V$ di $G$ si abbia

$$|r(V) - b(V)| \leq 1,$$

dove $r(V)$ e $b(V)$ indicano rispettivamente il numero degli archi partenti da $V$ colorati in rosso e in blu.

6. Sia data una tabella $A$ di dimensione $2n \times 2m$ in cui in ogni casella è scritto $+1$ o $-1$. Fissata una casella in cui c'è scritto $-1$, chiamiamo *croce completa* l'insieme delle $2(n+m)$ caselle che stanno sulla sua stessa riga o sulla sua stessa colonna; chiamiamo *croce bucata* l'insieme delle $2(n+m)-1$ caselle che stanno sulla sua stessa riga o sulla sua stessa colonna, esclusa la casella "di incrocio".

   Indichiamo con $F(A)$ la matrice ottenuta da $A$ cambiando il segno di ogni casella tante volte quante è il numero di croci complete a cui la casella stessa appartiene. Indichiamo con $G(A)$ la matrice ottenuta da $A$ cambiando il segno di ogni casella tante volte quante è il numero di croci bucate a cui la casella stessa appartiene.

   (a) Determinare la cardinalità dell'immagine della funzione $F$.

   (b) Determinare la cardinalità dell'immagine della funzione $G$.

7. Sia $n \geq 3$ un intero, e sia $X$ un insieme di $n$ punti nel piano, a due a due non allineati. Un sottoinsieme $S$ degli $n$ punti di dice *buono* se forma un poligono convesso senza altri punti di $X$ al suo interno. Per ogni $i = 3, \ldots, n$ sia $c_i$ il numero dei sottoinsiemi buoni di $X$ con $i$ punti.

   Dimostrare che

$$f(X) = \sum_{i=3}^{n} (-1)^i c_i$$

   dipende solo da $n$.

8. Sia $n$ un intero positivo, e sia $X$ un insieme di $\binom{2n}{n} + 1$ numeri reali.

   Dimostrare che esistono $x_1, \ldots, x_{n+2}$ elementi distinti di $X$ che costituiscono una successione monotona e tale che

$$|x_{i+1} - x_1| \geq 2|x_i - x_1|$$

   per ogni $i = 1, \ldots, n+1$.

# Geometria

## Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

1. Sia $ABC$ un triangolo isoscele con $CA = CB$. Sia $P$ un punto sulla circonferenza circoscritta, appartenente all'arco $AB$ che non contiene $C$. Sia $D$ la proiezione di $C$ su $PB$.

   Dimostrare che $PA + PB = 2 \cdot PD$.

2. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico in cui $AB$ e $CD$ non sono paralleli. Sia $\mathcal{A}$ l'insieme delle circonferenze che passano per $A$ e per $B$, e sia $\mathcal{B}$ l'insieme delle circonferenze che passano per $C$ e per $D$.

   Determinare il luogo dei punti $P$ per cui esistono una circonferenza in $\mathcal{A}$ ed una in $\mathcal{B}$ tangenti tra di loro nel punto $P$.

3. Sia $\Gamma$ un semicerchio di centro $O$ e raggio 1. Sia $n$ un intero positivo *dispari*, e siano $P_1$, $P_2$, $\ldots$, $P_n$ punti su $\Gamma$.

   Dimostrare che
   $$\left|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \ldots + \overrightarrow{OP_n}\right| \geq 1.$$

4. Sia $\omega$ una circonferenza e siano $A$, $B$ due punti esterni ad $\omega$ tali che la retta $AB$ non interseca la circonferenza. Preso un punto $P_0$ su $\omega$, definiamo ricorsivamente una successione di punti $P_i$ come segue: $P_{n+1}$ è la seconda intersezione con $\omega$ della retta passante per $B$ e per la seconda intersezione con $\omega$ della retta $AP_n$.

   Dimostrare che, se per un qualche $k \in \mathbb{N}$ e per un qualche $P_0 \in \omega$ si ha che $P_k = P_0$, allora questo accade, con lo stesso $k$, per ogni scelta di $P_0$.

## Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

5. Sia $ABC$ un triangolo, sia $AD$ una sua altezza, e sia $PQ$ una corda della sua circonferenza circoscritta parallela a $BC$.

   Dimostrare che $AD$ e le rette di Simson del triangolo $ABC$ rispetto ai punti $P$ e $Q$ sono concorrenti.

6. Sia $ABCDEF$ un esagono convesso in cui

$$AD = BC + EF, \qquad BE = CD + FA, \qquad CF = AB + DE.$$

   Dimostrare che

$$\frac{AB}{DE} = \frac{EF}{BC} = \frac{CD}{FA}.$$

7. Sia $ABC$ un triangolo con circocentro $O$ ed ortocentro $H$. Sia $A'B'C'$ il triangolo tangenziale di $ABC$ (cioè $A'B'$ è tangente in $C$ alla circonferenza circoscritta ad $ABC$, e cicliche).

   Fissato $t \neq 0$, siano $X$, $Y$, $Z$ i punti sulle rette $OA'$, $OB'$, $OC'$, rispettivamente, tali che

$$\frac{OX}{OA'} = \frac{OY}{OB'} = \frac{OZ}{OC'} = t.$$

   Dimostrare che le rette $AX$, $BY$, $CZ$ concorrono in un punto $P'$ che è il coniugato isogonale del punto $P$ sulla retta di Eulero di $ABC$ tale che $OP : PH = 1 : 2t$.

8. Sia $ABC$ un triangolo con incentro $I$. Siano $A_1$ ed $A_2$ punti su $BC$ tali che $BI$ è perpendicolare ad $IA_1$ e $CI$ è perpendicolare ad $IA_2$. Sia $A'$ il punto medio dell'arco $BC$ della circonferenza circoscritta ad $ABC$ non contenente $A$. Sia $A_1'$ l'intersezione tra $A'A_1$ ed $AC$, e sia $A_2'$ l'intersezione tra $A'A_2$ ed $AC$.

   Definiamo in modo analogo i punti $B_1'$, $B_2'$, $C_1'$, $C_2'$.

   (a) Dimostrare che il cerchio tangente a $BA$ in $C_2$ ed a $BC$ in $A_1$ è tangente alla circonferenza circoscritta ad $ABC$ in un punto $B''$.
   (b) Dimostrare che $A'$, $A_1$ e $B''$ sono allineati.
   (c) Dimostrare che $AA''$, $BB''$ e $CC''$ sono concorrenti in un certo punto $X$.
   (d) Dimostrare che le rette $A_1'A_2'$, $B_1'B_2'$, $C_1'C_2'$ concorrono in $X$.

# Teoria dei numeri

## Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

1. Determinare se esistono interi $n$ per cui $n^2 - 4$ ha esattamente 10 divisori (positivi).

2. Sia $n > 1$ un numero intero, e sia $k$ il numero dei numeri primi minori od uguali a $n$. Siano dati $k + 1$ interi positivi $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$, con la proprietà che nessuno di essi divide il prodotto di tutti gli altri.

   Dimostrare che almeno uno degli $a_i$ è maggiore di $n$.

3. Trovare tutte le coppie $(a, b)$ di interi positivi per cui $a^2 - b$ divide $b^2 + a$, e $b^2 - a$ divide $a^2 + b$.

4. Determinare tutte le coppie $(p, q)$ di numeri primi tali che $p^p + q^q + 1$ è divisibile per $pq$.

## Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

5. Dimostrare che, per ogni intero positivo $n$, esiste un intero positivo $k$ tale che
$$2^n | (19^k - 97).$$

6. Determinare tutte le terne $(x, y, z)$ di interi positivi tali che
$$1 + 4^x + 4^y = z^2.$$

7. Dimostrare che per ogni primo $p > 3$ si ha che
$$\binom{2p-1}{p-1} - 1$$
è multiplo di $p^3$.

8. Sia $p$ un numero primo. Determinare il minimo grado di un polinomio monico $q(x)$, a coefficienti interi, tale che $q(0)$, $q(1)$, …, $q(p-1)$ siano tutte potenze $(p-1)$-esime distinte.

# Team Selection Test

1. Sia $n > 1$ un intero. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi di grado $n$. Sia $A$ un insieme di $n+1$ interi *consecutivi*.

   Dimostrare che esiste un elemento $a \in A$ tale che $p(x) \neq a$ per ogni numero intero $x$.

2. Dimostrare che per ogni intero positivo $a$ esiste un intero positivo $n$ che soddisfa le seguenti due proprietà:

   - la rappresentazione decimale di $a$ coincide con il primo tratto (a sinistra) della rappresentazione decimale di $n$;
   - detto $m$ il numero ottenuto da $n$ spostando da sinistra a destra il blocco contenente le cifre di $a$, ed eliminando gli eventuali zeri iniziali, si ha che $n = a \cdot m$.

   Ad esempio, per $a = 4$ possiamo prendere $n = \boxed{4}10256$, dunque $m = 10256\boxed{4}$. Infatti

   $$410256 = 4 \cdot 102564.$$

   Per $a = 58$ possiamo prendere $n = \boxed{58}0100017244352474564$, dunque, spostando le cifre $\boxed{58}$ ed eliminando lo zero iniziale, $m = 100017244352474564\boxed{58}$. Infatti

   $$5801000172443524745640 = 58 \cdot 10001724435247456458.$$

3. Sia $ABC$ un triangolo acutangolo, sia $AM$ una mediana, e siano $BK$ e $CL$ due altezze (si intende che $M \in BC$, $K \in AC$, $L \in AB$). Sia $s$ la retta perpendicolare ad $AM$ passante per $A$. Sia $E$ l'intersezione tra $s$ e $CL$, e sia $F$ l'intersezione tra $s$ e $BK$.

   (a) Dimostrare che $A$ è il punto medio di $EF$.

   (b) Sia $\Gamma$ la circonferenza circoscritta al triangolo $MEF$, e siano $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ due qualunque circonferenze che hanno due punti $P$ e $Q$ in comune, e sono tangenti al segmento $EF$ ed all'arco $EF$ di $\Gamma$ non contenente il punto $M$.

   Dimostrare che $M$, $P$, $Q$ sono allineati.

4. Sia $ABC$ un triangolo scaleno. Siano $X$ e $Y$ punti sui segmenti $AB$ ed $AC$, rispettivamente, tali che $BX = CY$. Siano $M$ il punto medio di $BC$, $N$ il punto medio di $XY$, $K$ l'intersezione tra $XY$ e $BC$.

   Dimostrare che, al variare di $X$ e $Y$, le circonferenze circoscritte ai triangoli $KMN$ hanno un secondo punto in comune, oltre ad $M$.

5. Siano $a$ e $b$ interi positivi. Sia $M$ una qualunque matrice $(2a+1) \times (2b+1)$ che contiene $(2a+1)(2b+1)$ numeri reali distinti. Uno di questi elementi si dice *speciale* se si trova in una delle seguenti 2 situazioni:

   - è il numero più grande della sua riga, ed è il numero mediano della sua colonna (cioè nella sua colonna ne esistono tanti più grandi di lui quanti più piccoli di lui);

- è il numero più grande della sua colonna, ed è il numero mediano della sua riga.

Determinare il massimo numero di elementi speciali che può avere $M$.

6. Dimostrare che per ogni funzione $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ esistono almeno due numeri reali $x > 0$ ed $y > 0$ tali che

$$f(x + y) < f(x) + yf(f(x)).$$

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.