Algebra

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

1. Sia n un intero positivo, e siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numeri reali positivi il cui prodotto è uguale ad 1. Poniamo $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

   Dimostrare che

$$\frac{a_1^2}{S+1-a_1} + \frac{a_2^2}{S+1-a_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{S+1-a_n} \geq 1.$$

2. Determinare tutti i valori positivi del parametro α per cui si ha che

$$x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha + w^\alpha \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w}$$

   per ogni quaterna di numeri reali positivi (x, y, z, w) tali che $xyzw = 1$.

3. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x^3) + f(y^3) = (x+y)\big(f(x^2) + f(y^2) - f(xy)\big)$$

   per ogni coppia di numeri reali x e y.

4. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali positivi (debolmente) decrescente. Supponiamo che esista una costante reale M tale che

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n \leq M \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Dimostrare che la successione

$$b_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$$

   non è limitata superiormente.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

5. Siano a, b, c numeri reali positivi tali che $a+b+c=3$.

   Dimostrare che
$$\frac{a+3}{3a+bc}+\frac{b+3}{3b+ca}+\frac{c+3}{3c+ab}\geq 3.$$

6. Sia $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ un polinomio a coefficienti reali tale che
$$\min\{d,b+d\}>\max\{|c|,|a+c|\}.$$

   Dimostrare che $p(x)$ non ha radici reali contenute nell'intervallo $[-1,1]$.

7. Dimostrare che, per ogni funzione $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, esistono almeno due numeri reali $x>0$ e $y>0$ tali che
$$f(x+y)<yf(f(x)).$$

8. Sia $n\geq 2$ un numero intero, e siano a_1, a_2, $\ldots$, a_n numeri reali positivi.

   Dimostrare che
$$\sum_{i<j}\frac{a_ia_j}{a_i+a_j}\leq\frac{n}{2(a_1+a_2+\ldots+a_n)}\cdot\sum_{i<j}a_ia_j.$$

Combinatoria

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

1. Sulla lavagna è scritto inizialmente un numero intero positivo. Successivamente, ad ogni passaggio è possibile scegliere un numero x scritto sulla lavagna e scrivere (senza cancellare nulla) uno a scelta tra i numeri $2x+1$ e $x/(x+2)$. Ad un certo punto risulta che sulla lavagna c'è scritto il numero 2010.

   Dimostrare che 2010 era il numero scritto inizialmente sulla lavagna.

2. I 300 partecipanti alla gara nazionale di Cesenatico sono stati suddivisi in 3 aule, 100 per aula.

   Dimostrare che esistono due concorrenti di aule diverse tali che la restante aula contiene almeno 17 concorrenti che entrambi conoscono, o almeno 17 concorrenti che entrambi non conoscono (si intende che la conoscenza è simmetrica).

3. Sia dato un grafo connesso in cui tutti i cicli (percorsi chiusi che passano al più una volta per ogni vertice) hanno lunghezza dispari. Scegliamo ora un po' di cicli e cancelliamo tutti i collegamenti che li compongono (la scelta viene fatta all'inizio, una volta per tutte). In questo modo non è detto che il grafo resti connesso.

   Dimostrare che in ogni caso il grafo finale ha numero dispari di componenti connesse.

4. In un parlamento ci sono n parlamentari (con n intero positivo). Questi parlamentari hanno formato alcune commissioni rispettando le seguenti regole:

   - ogni parlamentare può far parte di un numero qualsiasi di commissioni,
   - ogni commissione è costituita da almeno 2 parlamentari,
   - se 2 commissioni hanno almeno 2 parlamentari in comune, allora queste 2 commissioni hanno un numero diverso di elementi.

   Dimostrare che il numero di commissioni è minore od uguale di $(n-1)^2$.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

5. Indichiamo con V_1, V_2, $\ldots$, V_n i vertici di un n-agono regolare. Inizialmente in ogni vertice V_k c'è una pila di k monete. Successivamente, ad ogni passo è possibile scegliere 2 qualunque monete (nella stessa pila oppure in pile diverse) e spostarle in un vertice adiacente a quello in cui si trovano, una in senso orario, ed una in senso antiorario.

   Determinare per quali valori di n è possibile giungere alla configurazione in cui in ogni vertice V_k ci sono esattamente $(n + 1 - k)$ monete.

6. L'orario di lavoro nell'amministrazione del dipartimento di matematica è costituito da 8 ore giornaliere. Durante queste 8 ore, i dipendenti si assentano più volte per andare al bar. Il tempo che ogni dipendente trascorre al bar è l'unione di intervalli temporali disgiunti, il cui numero, durata e distribuzione all'interno della giornata può variare da dipendente a dipendente. Al termine della giornata risulta che esiste un numero reale $x > 4$ con questa proprietà: "comunque si scelgano 2 dipendenti, il tempo complessivo in cui *esattamente* uno di loro era al bar è maggiore od uguale di x ore".

   Determinare, in funzione di x, il massimo numero di amministrativi che ci possono essere nel dipartimento.

7. (a) Ad un meeting partecipano 100 rappresentanti di 50 nazioni (2 per nazione), i quali siedono intorno ad una tavola rotonda.

      Dimostrare che è possibile suddividere i rappresentanti in 2 gruppi da 50, in modo che ogni gruppo ne contenga uno per nazione e nessuno sieda tra 2 persone del suo stesso gruppo.

   (b) Ad un meeting partecipano 100 rappresentanti di 25 nazioni (4 per nazione), i quali siedono intorno ad una tavola rotonda.

      Dimostrare che è possibile suddividere i rappresentanti in 4 gruppi da 25, in modo che ogni gruppo ne contenga uno per nazione e nessuno sieda accanto ad una persona del suo stesso gruppo.

8. Siano k ed ℓ due interi positivi, e sia $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k+\ell}\}$ un insieme di $(k + \ell)$ numeri reali contenuti nell'intervallo $[0, 1]$. Un sottoinsieme $A \subseteq S$ di k elementi è detto *equilibrato* se

$$\left| \frac{1}{k} \sum_{x_i \in A} x_i - \frac{1}{\ell} \sum_{x_i \in S \setminus A} x_i \right| \leq \frac{k+\ell}{2k\ell}.$$

   Dimostrare che il numero di sottoinsiemi equilibrati è almeno $\dfrac{2}{k+\ell}\dbinom{k+\ell}{k}$.

Geometria

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

1. In un triangolo ABC, sia D la proiezione di B sulla bisettrice dell'angolo in C, e sia E la proiezione di C sulla bisettrice dell'angolo in B.

   Dimostrare che la retta DE interseca i lati AB ed AC nei rispettivi punti di tangenza del cerchio inscritto in ABC.

2. Sia $A_1A_2A_3$ un triangolo, e siano $A_1A_2B_3$, $A_2A_3B_1$, $A_3A_1B_2$ i triangoli equilateri costruiti sui lati di $A_1A_2A_3$, esternamente rispetto al triangolo stesso. Siano C_3, C_1, C_2 i centri di questi triangoli.

   Dimostrare che il baricentro del triangolo $C_1C_2C_3$ giace sulla retta di Eulero del triangolo ABC.

3. Due circonferenze S_1 ed S_2 si intersecano nei punti P e Q. Consideriamo due punti distinti A_1 e B_1 (diversi anche da P e Q) su S_1. Le rette A_1P e B_1P incontrano nuovamente la circonferenza S_2 in A_2 e B_2, rispettivamente. Le rette A_1B_1 e A_2B_2 si incontrano in C.

   Dimostrare che, al variare di A_1 e B_1, i circocentri dei triangoli A_1A_2C giacciono su una circonferenza fissata.

4. In un quadrilatero ciclico $ABCD$ le diagonali AC e BD si intersecano in E e le rette AD e BC si intersecano in F. Siano G ed H i punti medi di AB e CD, rispettivamente.

   Dimostrare che la retta EF è tangente in E alla circonferenza circoscritta al triangolo EGH.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

5. Sia ABC un triangolo, e sia P un punto che non sta sulla circonferenza circoscritta al triangolo. Siano U, V, W i circocentri dei triangoli BPC, CPA, APB, rispettivamente.

   Dimostrare che le circonferenze circoscritte ai triangoli BCU, CAV, ABW passano per uno stesso punto.

6. Sia ABC un triangolo, e sia Γ_1 una circonferenza passante per A e C, e che interseca nuovamente i segmenti BA e BC. Sia Γ_2 la circonferenza tangente al segmento BA in un punto X, tangente al segmento BC in un punto Y, e tangente esternamente alla circonferenza Γ_1 in un punto T. Sia Γ_3 la circonferenza circoscritta ad ATX, e sia Γ_4 la circonferenza circoscritta a CTY. Sia M l'ulteriore intersezione tra Γ_3 e Γ_4, e siano A' e C' le ulteriori intersezioni di AM e CM con Γ_4 e Γ_3, rispettivamente.

   (a) Dimostrare che il quadrilatero $ACA'C'$ è ciclico.
   (b) Dimostrare che M è l'incentro di ABC.
   (c) Dimostrare che la retta TM è la bisettrice dell'angolo $\angle ATC$.

   Viceversa: in un triangolo ABC, siano X e Y punti sui lati AB e CB, rispettivamente, tali che $BX = BY$, e sia P la seconda intersezione tra le circonferenze circoscritte ai triangoli AIX e BIY.

   Dimostare che la circonferenza circoscritta a PXY tange i lati AB e CB.

7. Sia ABC un triangolo con $AB < AC$, sia Γ la circonferenza circoscritta, e sia D un punto della retta BC preso in modo che B stia tra D e C. Sia ω la circonferenza tangente al segmento DA in un punto N, tangente al segmento DC in un punto M, e tangente esternamente a Γ in un punto T.

   Sia I' l'incentro di ADC e sia C' l'ulteriore intersezione di CI' con la circonferenza circoscritta al triangolo TNI'. Sia X l'ulteriore intersezione tra la circonferenza circoscritta al triangolo ATN e quella circoscritta al triangolo ABI.

   (a) Dimostrare che M, N, C' sono allineati.
   (b) Dimostrare che X, I, I' sono allineati.
   (c) Dimostrare che $C' = X = I_C$, dove I_C è l'excentro opposto al vertice C.

8. Sia ABC un triangolo, e siano D, E, F i punti medi dei lati BC, CA, ed AB, rispettivamente. Le rette AD, BE, CF intersecano nuovamente la circonferenza circoscritta ad ABC in A_1, B_1, C_1, rispettivamente. Le rette A_1E ed A_1F intersecano nuovamente la circonferenza circoscritta ad ABC nei punti A' ed A'', rispettivamente. Sia A_2 l'intersezione tra BA' e CA''. Definiamo similmente B_2 e C_2.

   Dimostrare che le rette AA_2, BB_2, CC_2 concorrono.

Teoria dei numeri

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

1. Determinare tutte le coppie (p, q) di numeri primi tali che
$$p^3 - q^5 = (p + q)^2.$$

2. Dimostrare che, per ogni intero positivo n, esistono n interi positivi distinti tali che la loro somma è una potenza 2009-esima ed il loro prodotto è una potenza 2010-esima.

3. Siano a e b due interi positivi tali che $a > b$. Supponiamo che $(a - b, ab + 1) = 1$ e $(a + b, ab - 1) = 1$.

   Dimostrare che
$$(a - b)^2 + (ab + 1)^2$$
   non è un quadrato perfetto.

4. Determinare tutte le successioni $a_0, a_1, a_2, \ldots$ che soddisfano le seguenti condizioni:
   - a_0 è un numero razionale,
   - $a_{n+1} = 2a_n^2 - 1$ per ogni intero $n \geq 0$,
   - esistono due interi positivi $i \neq j$ tali che $a_i = a_j$.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

5. Dimostrare che ci sono infiniti numeri primi p per cui esiste un intero positivo n con le seguenti proprietà:
   - $n! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$,
   - $p \not\equiv 1 \pmod{n}$.

6. (a) Sia $n \geq 2$ un numero intero, e sia p un fattore primo di $2^{2^n} + 1$.
   Dimostrare che $p - 1$ è multiplo di 2^{n+2}.

   (b) Dimostrare che esistono infinite coppie di numeri primi (p, q) tali che p divide $2^{q-1} - 1$ e q divide $2^{p-1} - 1$.

7. Determinare se è possibile scrivere l'insieme di tutti gli interi come unione disgiunta di insiemi A_n, ciascuno costituito da 3 elementi $\{a_n, b_n, c_n\}$ tali che

$$\left| a_n^3 b_n + b_n^3 c_n + c_n^3 a_n \right|$$

   è un quadrato perfetto.

8. Consideriamo le due condizioni di divisibilità

$$(x + 1) | (y^2 + 1), \qquad (y + 1) | (x^2 + 1).$$

   (a) Determinare se esistono coppie di interi *dispari* e maggiori di 1 che le soddisfano entrambe.

   (b) Determinare se esistono coppie di interi positivi *pari* che le soddisfano entrambe.

Team Selection Test

A1 Sono date n carte (con $n \geq 50$ numero intero), ciascuna delle quali ha un lato nero ed un lato azzurro. Inizialmente le carte sono disposte in fila su un tavolo, e mostrano tutte il loro lato azzurro. Alberto e Barbara, stando dalla stessa parte del tavolo, alternativamente scelgono un blocco di 50 carte consecutive, di cui quella più a sinistra è azzurra, e le girano. Inizia Alberto, ed il gioco termina nel momento in cui non è più possibile muovere secondo la regola prescelta. Vince chi effettua l'ultima mossa valida.

(a) Dimostrare che per ogni n il gioco prima o poi termina.

(b) Determinare, in funzione di n, quale dei 2 giocatori ha una strategia vincente.

A2 Consideriamo un quadrilatero ciclico in cui i punti medi dei lati sono a loro volta i vertici di un quadrilatero ciclico.

Dimostrare che l'area del cerchio delimitato dalla circonferenza circoscritta al quadrilatero più piccolo è minore od uguale di metà dell'area del cerchio delimitato dalla circonferenza circoscritta al quadrilatero più grande.

A3 Siano a, b, c numeri reali positivi tali che

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c.$$

Dimostrare che

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(2b+c+a)^2}+\frac{1}{(2c+a+b)^2} \leq \frac{3}{16}.$$

B1 Determinare tutte le soluzioni $(p, n; x_0, x_1, \ldots, x_p)$ dell'equazione

$$\sum_{i=0}^{p} x_i^{p!} = p^n,$$

dove p è un numero primo, n è un intero non negativo, e

$$x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_p$$

sono $(p+1)$ numeri interi non negativi.

B2 Ad un torneo di calcio partecipano n squadre (con $n \geq 3$). Ogni squadra incontra una ed una sola volta ciascuna delle altre. In ogni partita si assegnano 3 punti alla squadra vincente, 0 punti alla squadra perdente, oppure 1 punto ad entrambe le squadre in caso di pareggio.

Al termine del torneo risulta che i punteggi totali ottenuti dalle varie squadre sono tutti diversi ed in progressione aritmetica, con la squadra in fondo alla classifica che ha un solo punto.

Determinare tutte le configurazioni in cui questo è possibile (con "configurazione" si intende il valore di n, la classifica finale del torneo, ed i risultati delle singole partite).

B3 In un triangolo ABC un excerchio è tangente al lato BC nel punto D, ed è tangente ai prolungamenti dei lati AB ed AC nei punti E ed F, rispettivamente. Siano P la proiezione di D su EF, M il punto medio di EF, e Γ la circonferenza circoscritta ad ABC.

Dimostrare che P sta su Γ se e solo se M sta su Γ.

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.