Algebra

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

A1. Siano a, b, c, d numeri reali positivi tali che $a+b+c+d=1$.

Dimostrare che

$$\frac{1}{4a+3b+c}+\frac{1}{4b+3c+d}+\frac{1}{4c+3d+a}+\frac{1}{4d+3a+b}\geq 2.$$

A2. Sia x un numero reale positivo. Determinare, in funzione di x, il più piccolo numero naturale n per cui esistono n numeri reali nell'intervallo aperto $(-1,1)$ tali che la loro somma sia nulla e la somma dei loro quadrati sia uguale a x.

A3. Sia $P(x)$ un polinomio di grado d tale che

$$P(n)=\binom{d+1}{n}^{-1}$$

per ogni intero n con $0\leq n\leq d$.

Determinare $P(d+1)$.

A4. Siano a, b, c, d numeri reali qualsiasi. Determinare tutte le soluzioni (x,y,z,t) del seguente sistema

$$\begin{cases} x^2-yz-zt-ty=a,\\ y^2-zt-tx-xz=b,\\ z^2-tx-xy-yt=c,\\ t^2-xy-yz-zx=d. \end{cases}$$

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

A5. Trovare tutte le fuzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x+y)f(x-y) = (f(x)+f(y))^2 - 4x^2 f(y)$$

per ogni coppia di numeri reali x e y.

A6. Per ogni intero $n \geq 3$ determinare il massimo valore che può assumere il prodotto di n numeri reali non negativi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soggetti al vincolo

$$\frac{x_1}{1+x_1} + \frac{x_2}{1+x_2} + \cdots + \frac{x_n}{1+x_n} = 1.$$

A7. Determinare tutte le funzioni surgettive $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x + f(x) + 2f(y)) = f(2x) + f(2y).$$

per ogni coppia di numeri reali x e y.

A8. Dimostrare che

$$\frac{1}{x^2(y+1)} + \frac{1}{y^2(z+1)} + \frac{1}{z^2(x+1)} \geq \frac{3}{4(x+y+z)}$$

per ogni terna di numeri reali positivi x, y, z tali che $xyz = 3(x+y+z)$.

Combinatoria

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

C1. Per ogni intero $n \geq 2$ definiamo $S(n)$ il numero delle permutazioni $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dell'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$ tali che $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ e $|a_i - a_{i+1}| \leq 2$ per ogni $i = 2, 3, \ldots, n-1$.

(a) Determinare $S(10)$.

(b) Dimostare che $S(2011) \leq 3^{1005}$.

(c) Determinare per quali valori di n si ha che $S(n)$ è divisibile per 3.

C2. Un quadrato è suddiviso in 8×8 quadratini unitari.

Determinare il massimo numero di diagonali che possiamo tracciare in questi quadratini in modo tale che due qualunque diagonali tracciate non abbiano punti in comune, nemmeno agli estremi.

C3. Su ciascuna casella di un quadrato $n \times n$ di una tabella infinita è posta una pedina, mentre le caselle al di fuori di tale quadrato non contengono pedine. Una mossa consiste nel muovere una pedina di due caselle in orizzontale o in verticale. È possibile muovere se la casella di destinazione è libera, mentre quella in mezzo tra la casella di origine e quella di destinazione è occupata; dopo la mossa la pedina in mezzo viene tolta definitivamente dalla tabella (un po' come nel gioco della dama, solo che qui si "mangia" in orizzontale o in verticale). Vengono fatte un po' di mosse partendo dalla configurazione iniziale, finché non è più possibile muovere.

Dimostrare che sono state eseguite almeno

$$\left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$$

mosse.

C4. È dato un grafo completo su n vertici. Una *mossa* consiste nel rimuovere un lato tra quelli che fanno parte di un ciclo di lunghezza 4. Ripetiamo l'operazione fino a quando non sarà più possibile muovere.

Determinare il minimo numero di lati che possono rimanere nel grafo.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

C5. Su ogni vertice di un $(2n+1)$-agono regolare è scritto un numero intero. La somma di tutti i numeri è n. Ad ogni mossa è possibile scegliere due vertici adiacenti, sottrarre un intero k ad ognuno dei numeri ivi scritti, ed aggiungere $2k$ al numero sul vertice opposto a questi due. Il valore di k può ovviamente variare da una mossa all'altra.

(a) Supponiamo che, dopo un certo numero di mosse, ci sia un unico vertice in cui è scritto un numero diverso da 0.

Dimostrare che questo vertice dipende solo dalle condizioni iniziali e non dalla particolare successione di mosse fatte.

(b) Dimostrare che, mediante un'opportuna successione di mosse, è sempre possibile fare in modo che esista un unico vertice in cui è scritto un numero diverso da 0.

C6. Su una lavagna sono scritti tutti i divisori positivi di un intero positivo N. Alberto e Barbara, alternativamente, cancellano un numero dalla lavagna secondo le seguenti regole:

- inizia Alberto cancellando il numero N,
- se l'ultimo numero cancellato è stato un certo d, alla mossa successiva il giocatore a cui tocca cancella un multiplo od un divisore di d.

Vince il giocatore che cancella l'ultimo numero.

Determinare, in funzione di N, quale giocatore ha una strategia vincente.

C7. In ogni vertice di un n-agono regolare c'è una fortezza. Ad un certo istante, ogni fortezza spara una cannonata contro una delle fortezze ad essa adiacenti e la colpisce (due fortezze si dicono adiacenti se sono ai vertici di uno stesso lato). Definiamo *risultato del cannoneggiamento* l'insieme delle fortezze colpite, senza distinguere quelle colpite una volta da quelle colpite due volte. Indichiamo con $P(n)$ il numero dei possibili risultati di un cannoneggiamento.

Dimostrare che per ogni intero $k \geq 3$ i numeri $P(k)$ e $P(k+1)$ sono relativamente primi.

C8. Sia $n \geq 4$ un numero intero. Ad un torneo di pallavolo hanno partecipato n squadre. Ogni squadra ha incontrato ciascuna delle altre una ed una sola volta, in incontri in cui ovviamente il pareggio non è ammesso. Indichiamo con v_i e p_i il numero di partite vinte e perse dall'i-esima squadra.

(a) Dimostrare che per ogni polinomio $P(x)$, di grado minore od uguale a 2, si ha che

$$\sum_{i=1}^{n} P(v_i) = \sum_{i=1}^{n} P(p_i).$$

(b) Definiamo *bad company* un insieme di 4 squadre in cui una ha perso dalle altre 3, le quali giocando tra di loro hanno vinto una partita ciascuna.

Dimostrare che, se nel torneo non c'è nessuna bad company, allora

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^3 \geq \sum_{i=1}^{n} p_i^3, \qquad \qquad \sum_{i=1}^{n} (v_i - p_i)^3 \geq 0.$$

Geometria

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

G1. Sia ABC un triangolo equilatero e sia O il suo circocentro. Sia M un punto del segmento BC e siano K ed L le proiezioni di M sui lati AB e AC, rispettivamente.

Dimostrare che la retta OM passa per il punto medio del segmento KL.

G2. Siano Γ_1 e Γ_2 due circonferenze che si intersecano in D e P. Una tangente comune a Γ_1 e Γ_2 interseca Γ_1 in A e Γ_2 in B. Supponiamo che D sia più vicino di P alla retta AB. La retta AD incontra Γ_2 per la seconda volta in C. Sia M il punto medio di BC.

Dimostrare che $\angle DPM = \angle BDC$.

G3. Sia ABC un triangolo ed O il suo circocentro. Le bisettrici interna ed esterna dell'angolo $\angle BAC$ intersecano la retta BC nei punti D ed E, rispettivamente. Sia M il punto medio di BC ed L il punto medio di DE. I cerchi circoscritti ai triangoli ABC ed ALO si intersecano nuovamente nel punto N.

(a) Dimostrare che LA ed LN sono tangenti alla circonferenza circoscritta ad ABC.

(b) Dimostrare che $\angle BAN = \angle CAM$.

G4. Sia ABC un triangolo e siano A', B' e C' i punti medi dei lati BC, CA, AB rispettivamente. Siano P e P' punti nel piano tali che $PA = P'A'$, $PB = P'B'$, $PC = P'C'$.

Dimostrare che le rette PP', al variare di P e P', passano per un punto fissato.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

G5. Sia ABC un triangolo, e siano H_a, H_b, H_c i piedi delle altezze da A, B, C rispettivamente. Indichiamo con N il centro della circonferenza circoscritta ad $H_aH_bH_c$, con H l'ortocentro di ABC, e con O' il circocentro di HBC.

(a) Dimostrare che N è il punto medio di AO'.

(b) Posto $E = HB \cap H_aH_c$ ed $F = HC \cap H_bH_a$, dimostrare che $EF \perp AN$.

G6. Sia ABC un triangolo, siano M_a, M_b ed M_c i punti medi dei suoi lati, e siano I_a, I_b ed I_c gli excentri. Siano H l'ortocentro, O il circocentro, I l'incentro, N il punto di Nagel e K il punto di Gergonne del triangolo ABC.

(a) Dimostrare che le tre rette M_aI_a, M_bI_b e M_cI_c concorrono in un punto M.

(b) Dimostrare che i triangoli HIM e ONK sono simili.

G7. Sia ABC un triangolo acutangolo con altezze AA_1, BB_1 e CC_1. Sia A_2 un punto sul segmento AA_1 tale che $\angle BA_2C = 90°$, e similmente B_2 e C_2. Sia A_3 il punto di intersezione tra B_2C e BC_2, e similmente B_3 e C_3.

Dimostrare che i segmenti A_2A_3, B_2B_3 e C_2C_3 sono concorrenti.

G8.

Teoria dei numeri

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

N1. Determinare tutte le coppie di numeri primi (p, q) tali che

$$pq \mid 5^p + 5^q.$$

N2. Dimostrare che, dato comunque un intero positivo m, esiste un intero positivo n tale che

$$2^n \equiv n \pmod{m}.$$

N3. Determinare tutti gli interi positivi n per cui l'equazione diofantea

$$x^2 + 7y^2 = 2^n$$

ha almeno una soluzione (x, y) con x e y interi dispari.

N4. Determinare tutte le terne di interi (n, m, a) con $m \neq 0$ tali che

$$5^n - 3^m = a^2.$$

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

N5. Sia n un intero positivo tale che $p = 17^{2n} + 4$ è un numero primo. Dimostrare che

$$p \mid 7^{(p-1)/2} + 1.$$

N6. Sia A un insieme infinito di interi positivi.

Determinare tutti gli interi positivi n tali che, per ogni $a \in A$, si ha che

$$(a^n + a^{n-1} + \cdots + a + 1) \mid (a^{n!} + a^{(n-1)!} + \cdots + a^{1!} + 1).$$

N7. Siano (a, b) una coppia ordinata di numeri interi e sia $P_{a,b}(x) = ax^3 + bx$. Per ogni intero positivo n, diciamo che le la coppia (a, b) è *n-buona* se

$$n \mid \big(P_{a,b}(m) - P_{a,b}(k)\big) \implies n \mid (m - k) \qquad \text{per ogni scelta di interi } m, k.$$

Diciamo inoltre che la coppia (a, b) è *molto buona* se è n-buona per infiniti interi n.

(a) Determinare una coppia (a, b) che sia 51-buona ma non molto buona.

(b) Dimostrare che tutte le coppie 2010-buone sono molto buone.

N8. Sia p un primo dispari. Siano x e y interi positivi tali che

$$x^2 = y^p + 1.$$

Dimostrare che $2|y$ e $p|x$.

Team Selection Test

A1 Sia ABC un triangolo. La retta parallela a BC e tangente alla circonferenza inscritta interseca AB nel punto A_1 ed interseca AC nel punto A_2. Definiamo analogamente i punti B_1, B_2, C_1, C_2.

Dimostrare che

$$AA_1 \cdot AA_2 + BB_1 \cdot BB_2 + CC_1 \cdot CC_2 \geq \frac{1}{9}\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right),$$

determinando anche i casi in cui vale l'uguaglianza.

A2 Ad un concerto si devono esibire in successione k cantanti. Ogni cantante ha indicato un insieme (eventualmente vuoto) di altri cantanti, chiedendo che la sua esibizione sia programmata dopo quella di tutti gli altri cantanti presenti nell'insieme da lui indicato.

Determinare se è possibile che esistano *esattamente* 2010 ordini di esibizione che rispettano i vincoli imposti

(a) nel caso $k = 80$,

(b) nel caso $k = 70$,

(c) nel caso $k = 20$.

A3 Determinare il più piccolo intero positivo n per cui esistono polinomi $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$ a coefficienti razionali tali che

$$x^2 + 7 = [p_1(x)]^2 + [p_2(x)]^2 + \ldots + [p_n(x)]^2\,.$$

B1 Sia $n > 1$ un intero dispari, sia S l'insieme degli interi k, con $1 \leq k \leq n$, che sono relativamente primi con n, e sia T l'insieme degli interi $k \in S$ tali che $k+1$ è relativamente primo con n. Per ogni $k \in S$, sia r_k il resto che si ottiene dividendo per n il numero

$$\frac{k^{|S|} - 1}{n}.$$

Dimostrare che

$$\prod_{k \in T} (r_k - r_{n-k}) \equiv |S|^{|T|} \pmod{n}.$$

B2 Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico in cui le rette BC ed AD si incontrano in un punto P. Sia Q il punto della retta BP, diverso da B, tale che $PQ = BP$. Costruiamo i parallelogrammi $CAQR$ e $DBCS$.

Dimostrare che i punti C, Q, R, S stanno su una stessa circonferenza.

B3 Siano $x_1, \ldots, x_{100}$ numeri reali maggiori od uguali a zero tali che $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \leq 1$ per ogni $i = 1, \ldots, 100$ (gli indici vanno intesi modulo 100, nel senso che $x_{101} = x_1$ e $x_{102} = x_2$).

Determinare il massimo valore possibile della somma

$$S = \sum_{i=1}^{100} x_i x_{i+2}.$$

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.