Algebra

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

A1. Determinare tutte le soluzioni reali (x, y, z) del sistema

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^3+y^3+z^3=18, \\ x^7+y^7+z^7=2058. \end{cases}$$

A2. Determinare il più grande numero reale k tale che

$$\frac{a}{b+2c+d}+\frac{b}{c+2d+a}+\frac{c}{d+2a+b}+\frac{d}{a+2b+c} \geq k$$

per ogni quaterna di numeri reali positivi a, b, c, d.

A3. Determinare tutti i polinomi $f(x)$ e $g(x)$ a coefficienti reali tali che

$$(x^2+x+1) \cdot f(x^2-x+1) = (x^2-x+1) \cdot g(x^2+x+1),$$

per ogni numero reale x.

A4. Sia $\mathbb{N}^*$ l'insieme degli interi positivi, e sia $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ una funzione tale che $f(1) = 1$ e

$$f(n) = n - f(f(n-1)) \qquad \forall n \geq 2.$$

Dimostrare che $f(n + f(n)) = n$ per ogni intero positivo n.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

A5. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x)f(y) - xy;$$

per ogni coppia di numeri reali x e y.

A6. Sia $n \geq 3$ un numero intero.

Dimostrare che

$$\frac{a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}{a_1 + n - 2} + \frac{a_1 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}{a_2 + n - 2} + \cdots + \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}}{a_n + n - 2} \leq \frac{1}{(n-1)^2}$$

per ogni n-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ di numeri reali positivi tali che $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$.

A7. Determinare tutte le quintuple $(a, b, c, d, e) \in [-2, 2]^5$ che risolvono il sistema

$$\begin{cases} a + b + c + d + e = 0, \\ a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 = 0, \\ a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 = 10. \end{cases}$$

A8. Dimostrare che, per ogni intero positivo n, esistono n numeri reali $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nell'intervallo $(0, 1)$ per cui la seguente condizione è soddisfatta: per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$ e per ogni polinomio $P(x)$ di grado $(n+1)$ che si annulla in 0, 1 e in tutti gli a_k con $k \neq i$ (quindi in tutto sono $(n+1)$ annullamenti) si ha che

$$\max_{x \in [0,1]} |P(x)| = |P(a_i)|.$$

Combinatoria

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

C1. Gli interi da 1 a 2012 sono scritti in una riga, ma in ordine sparso. La seguente operazione viene eseguita ripetutamente: se il primo numero è k, i primi k numeri vengono riscritti nell'ordine inverso a quello in cui sono.

Dimostrare che dopo un certo numero (finito) di queste operazioni il primo numero della fila sarà 1.

C2. Ad una festa si ha che

- ogni invitato conosce esattamente altri 22 invitati,
- per ogni coppia di invitati che si conoscono non c'è nessun altro invitato che li conosce entrambi,
- per ogni coppia di invitati che non si conoscono ci sono esattamente 6 altri invitati che li conoscono entrambi.

Determinare quanti sono gli invitati.

(Si suppone che la conoscenza sia simmetrica e che nessuno includa se stesso nella lista dei suoi conoscenti)

C3. In un gioco a due giocatori (Alberto e Barbara, tanto per cambiare), inizialmente Alberto scrive N numeri interi positivi in una striscia di N caselle. Poi, ad ogni mossa successiva, Alberto dice un numero intero positivo a sua scelta e Barbara deve sostituire un numero della striscia con quello detto da Alberto. Barbara vince se riesce ad ottenere che ad un certo punto la striscia contenga una successione non decrescente di interi positivi.

Determinare se Barbara ha una strategia vincente, indipendentemente dalle scelte (iniziale e successive) di Alberto.

C4. Ogni casella di una tabella 1000×1000 contiene uno 0 o un 1.

Dimostrare che si possono eliminare 990 righe in modo che rimanga almeno un 1 in ogni colonna, oppure si possono eliminare 990 colonne in modo che rimanga almeno uno 0 in ogni riga.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

C5. Sia $n \geq 2$ un numero intero, e sia $(x_1, \ldots, x_n)$ una n-upla i cui elementi possono essere solo $+1$ o -1. Per ogni siffatta n-upla, definiamo il suo *rafforzamento* come la n-upla $(x_1 \cdot x_2, x_2 \cdot x_3, \ldots, x_{n-1} \cdot x_n, x_n \cdot x_1)$.

Determinare tutti i valori di n per cui, a forza di rafforzarla, ogni n-upla iniziale diventa prima o poi la n-upla superforte $(1, 1, \ldots, 1)$.

C6. Su un tavolo sono disposte n carte in fila, inizialmente tutte coperte. Ad ogni mossa possiamo scegliere una carta tra quelle coperte, che non si trovi ad una delle due estremità della fila, toglierla, quindi rovesciare le due carte ad essa adiacenti e "ricompattare la fila".

Determinare per quali valori di n esiste una successione di mosse al termine della quale restano solo due carte sul tavolo.

C7. Ad uno stage partecipano 5000 studenti, ciascuno dei quali ha risolto almeno un problema di ammissione. I partecipanti devono essere suddivisi in gruppi di lavoro che possono essere solo di due tipi:

- gruppi in cui si discute di un problema che tutti i membri del gruppo hanno risolto,
- gruppi in cui ciascuno deve parlare di un problema che ha risolto, ma che nessun altro membro dello stesso gruppo ha risolto.

Dimostrare che gli organizzatori possono sempre creare esattamente 100 gruppi in modo che ciascun partecipante sia in uno ed uno solo di essi (sono ammessi gruppi con un solo membro).

C8. Siano n e d due interi positivi con $n > 2d$. Consideriamo un gruppo di n ragazze ed n ragazzi in cui ciascun membro ha al più d amici del sesso opposto.

Dimostrare che si possono creare alcune nuove amicizie in modo che alla fine ognuno abbia esattamente $2d$ amici del sesso opposto (si intende che l'amicizia è simmetrica).

Geometria

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

G1. In un triangolo ABC sia A_1 il piede dell'altezza uscente da A, e sia A_2 il punto medio del lato BC. Si definiscano analogamente i punti B_1, C_1, B_2 e C_2. Si conduca da A_2 la perpendicolare a B_1C_1, da B_2 la perpendicolare a C_1A_1 e da C_2 la perpendicolare a A_1B_1.

Dimostrare che le tre rette concorrono.

G2. Sia P un punto di intersezione di due cerchi con centri O_1, O_2. La tangente comune ai due cerchi che si trova più vicina a P tocca tali cerchi in A e B, rispettivamente. Siano A' il simmetrico di A rispetto ad O_1 e B' il simmetrico di B rispetto a O_2. La retta O_1O_2 interseca $A'P$ in C e $B'P$ in D.

Dimostrare che i triangoli $AA'C$ e $B'BD$ sono simili.

G3. Sia ABC un triangolo e P un punto al suo interno tale che $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120°$.

Dimostrare che le rette di Eulero dei triangoli APB, BPC, CPA concorrono.

G4. Sia ω il cerchio circoscritto al triangolo acutangolo ABC. Le tangenti per ω passanti per B e C si intersecano nel punto P. AP e BC si intersecano in D. I punti E, F giacciono su AC e AB rispettivamente, in modo che DE sia parallelo a BA e DF sia parallelo a CA.

(a) Dimostrare che F, B, C, E sono conciclici.

(b) Sia A_1 il centro della circonferenza passante per F, B, C, E e siano B_1, C_1 definiti similmente. Dimostrare che AA_1, BB_1, CC_1 concorrono.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

G5. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso in cui i lati AD e BC non sono paralleli. Supponiamo che le circonferenze con diametri AB e CD si incontrino nei punti E ed F all'interno del quadrilatero. Sia ω_E la circonferenza passante per i piedi delle perpendicolari da E alle rette AB, BC, e CD. Sia ω_F la circonferenza passante per i piedi delle perpendicolari da F alle rette CD, DA, e AB.

Dimostrare che il punto medio del segmento EF giace sulla retta passante per i punti di intersezione di ω_E ed ω_F.

G6. Siano E ed F le intersezioni dei lati opposti di un quadrilatero convesso $ABCD$. Le due diagonali si incontrano in P. Sia O il piede della perpendicolare da P ad EF.

Dimostrare che $\angle BOC = \angle AOD$.

G7. Sia ABC un triangolo con $AB = AC$, e sia D il punto medio di AC. La bisettrice di $\angle BAC$ interseca la circonferenza per D, B, e C in un punto E all'interno del triangolo ABC. La retta BD interseca la circonferenza per A, E, e B nei punti B ed F. Le rette AF e BE si intersecano nel punto I, e le rette CI e BD si intersecano nel punto K.

Dimostrare che I è l'incentro del triangolo KAB.

Teoria dei numeri

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

N1. Sia $\nu(n)$ l'esponente di 2 che compare nella fattorizzazione di $n!$.

Dimostrare che, dati comunque due interi positivi a ed m, esiste un intero $n > 1$ tale che $\nu(n) \equiv a \pmod{m}$.

N2. Sia n un numero intero positivo che non sia una potenza di 2.

Dimostrare che esiste un intero positivo m con le seguenti proprietà:

- m è il prodotto di due interi positivi consecutivi,
- la rappresentazione decimale di m consiste di due blocchi identici di n cifre.

N3. Due successioni x_n ed y_n sono definite ponendo $x_1 = 1$, $y_1 = 2$ e poi, ricorsivamente,

$$x_{n+1} = 22y_n - 15x_n, \qquad y_{n+1} = 17y_n - 12x_n$$

per ogni $n \geq 1$.

(a) Dimostrare che $x_n \neq 0$ e $y_n \neq 0$ per ogni $n \geq 1$.

(b) Dimostrare che entrambe le successioni hanno infiniti termini positivi ed infiniti termini negativi.

(c) Determinare se x_n ed y_n sono divisibili per 7 quando $n = 1999^{1945}$.

N4. Determinare tutte le soluzioni (intere) dell'equazione diofantea

$$3^x 7^y + 1 = a^d,$$

con $x \geq 0$, $y \geq 0$, $a \geq 2$, $d \geq 3$ e d dispari.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

N5. Determinare per quali interi $n > 2$ esiste una n-upla di interi positivi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ per cui i numeri

$$a_1a_2,\ a_2a_3,\ \ldots,\ a_na_1$$

formano, nell'ordine, una progressione aritmetica non costante.

N6. Siano p un numero primo ed n un intero positivo. Indichiamo con $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ l'insieme delle classi di resto modulo p^n.

Determinare quante sono le funzioni $f : \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ tali che

$$f(a) + f(b) = f(a + b + pab)$$

per ogni a e b in $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.

N7. Sia Q_k l'insieme degli interi che possono essere espressi come somma dei quadrati di k interi positivi consecutivi.

Dimostrare che, per ogni intero $k \geq 2$, l'insieme $Q_k \cap Q_{k+1}$ ha infiniti elementi.

N8. Sia n un intero positivo dispari.

Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tali che

$$f(x) - f(y) | x^n - y^n$$

per ogni x e y in $\mathbb{Z}$.

Team(s) Selection Test

A1. Determinare se esiste una successione $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ di interi positivi che verifica contemporaneamente le seguenti due proprietà:

- per ogni $n \geq 1$ si ha che
$$a_{n+1} = a_n + \tau(n),$$
dove $\tau(n)$ indica il numero di divisori positivi di n,
- almeno due termini consecutivi della successione sono quadrati perfetti.

A2. Un n-agono convesso è stato suddiviso in triangoli tracciando opportune diagonali che non si intersecano all'interno del poligono. I triangoli sono colorati di bianco o di nero, in modo che due triangoli con un lato in comune abbiano sempre colore diverso.

Determinare, in funzione di n, la massima differenza fra il numero dei triangoli bianchi ed il numero dei triangoli neri.

A3. Sia ABC un triangolo, sia O il suo circocentro, e sia Γ la circonferenza circoscritta. Sia D un punto sul segmento BC diverso dagli estremi e dal punto medio.

La circonferenza circoscritta al triangolo BOD interseca nuovamente Γ in K ed interseca nuovamente la retta AB in E. La circonferenza circoscritta al triangolo COD interseca nuovamente Γ in L ed interseca nuovamente la retta AC in F. La circonferenza circoscritta al triangolo AEF interseca nuovamente Γ in M. Supponiamo che E sia interno al segmento AB, ed F sia interno al segmento AC.

Dimostrare che i triangoli ABC e MKL sono congruenti.

B1. Sia ABC un triangolo, e sia ℓ la retta passante per il circocentro di ABC e parallela alla bisettrice dell'angolo in A.

Dimostrare che la retta ℓ passa per l'ortocentro di ABC se e solo se $AB = AC$ oppure $\angle BAC = 120°$.

B2. Consideriamo il polinomio

$$P(x) = (x + d_1)(x + d_2) \cdot \ldots \cdot (x + d_9),$$

dove $d_1, d_2, \ldots, d_9$ sono 9 interi distinti.

Dimostrare che esiste un intero N tale che, per ogni $x \geq N$, il numero intero $P(x)$ è divisibile per un primo maggiore di 20.

B3. Data una funzione $f(x)$ da un insieme in se stesso, ed un intero positivo k, indichiamo con $f^{(k)}(x)$ l'iterata k-esima di $f(x)$, definita cioè ponendo $f^{(1)}(x) = f(x)$ e poi per ricorrenza $f^{(k+1)}(x) = f(f^{(k)}(x))$.

(a) Determinare tutte le funzioni f, che mandano interi positivi in interi positivi, e tali che

$$f^{(n+1)}(n) < f(n+1)$$

per ogni intero positivo n.

(b) Determinare tutte le coppie di funzioni (f, g), ciascuna delle quali manda interi positivi in interi positivi, e tali che

$$f^{(g(n)+1)}(n) + g^{(f(n))}(n) = f(n+1) - g(n+1) + 1$$

per ogni intero positivo n.

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.