Algebra

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

A1. Determinare per quali n interi positivi la seguente equazione ha esattamente 2013 soluzioni reali positive

$$\frac{1}{x+n^{-2}} = \left\lfloor \frac{1}{x} - n^{-2} \right\rfloor .$$

Ovviamente $\lfloor y \rfloor$ denota la parte intera di y.

A2. Per ogni $n \geq 2$ intero, siano a_n, b_n e c_n gli unici numeri interi tali che

$$\left(\sqrt[3]{2}-1\right)^n = a_n + b_n\sqrt[3]{2} + c_n\sqrt[3]{4}.$$

Si dimostri che $c_n \equiv 1 \pmod 3$ se e solo se $n \equiv 2 \pmod 3$.

A3. Dimostrare che per ogni terna $a, b, c \geq 0$ per cui $a+b+c=3$, si ha

$$3(a^4+b^4+c^4)+33 \geq 14(a^2+b^2+c^2).$$

A4. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali di grado $2n-1$ tale che $p(k) = |k|$ per $k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$. Quanto vale $p(0)$?

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

A5. Dato N intero positivo e $a \in (0,1)$, trovare la costante $C(a,N)$ ottimale affinché per ogni scelta di $n \geq 1$ interi distinti $k_1, k_2, \ldots, k_n$ si abbia

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a^{k_i}\right)^N \leq C(a,N) \sum_{i=1}^{n} a^{Nk_i}.$$

A6. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfano l'equazione

$$f(x + yf(x)) = f(f(x)) + xf(y).$$

per ogni coppia di reali x, y.

A7. Determinare il più piccolo numero reale M tale che la disuguaglianza

$$\left|ab\left(a^2 - b^2\right) + bc\left(b^2 - c^2\right) + ca\left(c^2 - a^2\right)\right| \leq M\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2$$

valga per tutte le scelte di a, b e c reali.

A8. Determinare tutti i polinomi a coefficienti interi $p(x)$ tali che per ogni coppia di interi positivi a e b la cui somma è un quadrato perfetto, pure $p(a) + p(b)$ è un quadrato perfetto.

Combinatoria

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

C1. Una scacchiera $n \times n$ è inizialmente colorata a scacchi bianchi e neri alternati, come al solito. Ad ogni mossa si sceglie un quadrato 2×2 e si colorano i suoi quadrati bianchi di nero, quelli neri di verde, quelli verdi di bianco. Per quali n si può ottenere la scacchiera con la colorazione iniziale invertita dopo un certo numero di mosse?

C2. Barbara ha a disposizione una riga di m caselle ordinate in linea retta; Alberto dei numeri da 1 a N. Una partita consiste di k turni, durante ciascuno dei quali Alberto sceglie uno dei suoi numeri e Barbara deve scriverlo in una delle caselle ancora libere. Barbara vince se alla fine dei turni i k numeri che ha scritto sono in ordine crescente. Per quali m e k Barbara ha una strategia vincente?

C3. Un poligono è costituito da un numero finito di caselle di un piano colorato a scacchi bianchi e neri. Se l'area del poligono è S e il suo perimetro è P, dimostrare che il numero degli scacchi dello stesso colore nel poligono è almeno $\frac{S}{2} - \frac{P}{8}$ e al più $\frac{S}{2} + \frac{P}{8}$.

C4. S è un insieme di numeri naturali di 100 cifre; un elemento di S si dice *cattivo* se non è divisibile per la somma di altri due numeri di S (non necessariamente distinti). Si sa che S contiene al più 10 numeri cattivi: quanti elementi può avere S, al massimo?

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

C5. Da una scacchiera $n \times n$ eliminiamo i quadrati di riga e colonna simultaneamente pari. Quant'è il minimo numero di pezzi rettangolari con cui si può coprire (esattamente) quello che resta, senza sovrapposizioni?

C6. Data nel piano cartesiano una famiglia $\mathcal{F}$ di 2013 rettangoli del tipo $[a, b] \times [c, d]$ tali che ciascuno interseca almeno 1509 degli altri, mostrare che esiste almeno un rettangolo di $\mathcal{F}$ che interseca tutti gli altri.

C7. Un cerchio è diviso in $2n + 1$ archi uguali da $2n + 1$ punti. A turno, cominciando da Alberto, Alberto e Barbara cancellano un punto; vince chi lascia punti che, a tre a tre, sono sempre vertici di triangoli ottusangoli. Chi ha una strategia vincente (al variare di n)?

C8. Dimostrare che si possono orientare gli archi di un grafo planare finito in modo che per ogni vertice il numero di archi uscenti sia al più 3.

C9. [LUNCH PROBLEM] Il piano infinito è colorato a scacchi bianchi e neri; gli scacchi neri vengono però ricolorati di verde e di rosso, in modo che caselle con un vertice in comune abbiano colori diversi. Fissata una retta non parallela ai lati delle caselle, dimostrare che esiste una costante C tale che, per ogni segmento parallelo alla retta, la differenza tra la lunghezza complessiva della zona verde e quella della zona rossa ha modulo minore o uguale di C.

Geometria

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

G1. Sia $\triangle ABC$ un triangolo acutangolo di ortocentro H e circocentro O. L'asse di AH incontra AB e AC in D ed E.

Dimostrare che $\widehat{DOA} = \widehat{EOA}$.

G2. Sia data una circonferenza ω_1 internamente tangente alla circonferenza ω_2 nel punto N. Si prenda un punto K su ω_1 e si tracci la tangente ad essa per tale punto; siano A e B le intersezioni della retta con ω_2. Sia M il punto medio dell'arco AB che non contiene N.

Dimostrare che il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo $\triangle KBM$ non dipende da K.

G3. Nel triangolo $\triangle ABC$, sia AD l'altezza e P un punto su di essa. Si indichino con Q, R le proiezioni di P su AB, AC e con S, T le intersezioni di QP, RP con BC. Le circonferenze circoscritte a $\triangle BQS$ e $\triangle CRT$ intersecano QR in X, Y.

Dimostrare che SX, TY, AD concorrono in un punto.

G4. Siano AA', BB', CC' tre diametri del cerchio circoscritto al triangolo $\triangle ABC$. Sia P un punto all'interno del triangolo $\triangle ABC$, e siano D, E, F le proiezioni di P su BC, CA, AB, rispettivamente. Sia X il punto tale che D è il punto medio di $A'X$, sia Y il punto tale che E è il punto medio di $B'Y$, e similmente sia Z il punto tale che F è il punto medio di $C'Z$.

Dimostrare che il triangolo $\triangle XYZ$ è simile al triangolo $\triangle ABC$.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

G5. Sia Γ una circonferenza e si considerino tre punti allineati E, F, G tali che F sia all'interno di Γ e gli altri due all'esterno.

Dimostrare che, se $ABCD$ un qualsiasi quadrilatero inscritto in Γ tale che E, F, G appartengono alle rette AB, AD, DC rispettivamente, allora il lato BC passa per un punto fisso allineato con E, F, G, indipendente dalla scelta del quadrilatero $ABCD$.

G6. Sia $\triangle ABC$ un triangolo, siano D, E, F i piedi delle altezze sui lati BC, CA, AB; siano poi P, Q, R i piedi delle altezze da D su EF, da E su DF, da F su ED.

Dimostrare che AP, BQ, CF concorrono sulla retta di Eulero di $\triangle ABC$.

G7. Siano Γ e ω le circonferenze circoscritta ed inscritta del triangolo $\triangle ABC$. Sia X il piede su BC della bisettrice da A; si definiscano similmente Y e Z. Sia D il punto di tangenza di ω con BC; si definiscano similmente E e F. Sia ω_A la circonferenza tangente internamente a Γ e tangente alle rette AC e AB. Sia A' il punto di tangenza tra Γ e ω_A. Si definiscano similmente B' e C'.

Dimostrare che $B'C'XD$, $C'A'YE$, $A'B'ZF$ sono ciclici.

G8. Sia $\triangle ABC$ un triangolo e sia ω la sua circonferenza circoscritta. Sia inoltre l una retta che non abbia punti in comune con ω. Sia P il piede della perpendicolare condotta dal centro di ω a l. Le rette BC, AC e AB intersecano l nei punti X, Y e Z, diversi da P.

Dimostrare che le circonferenze circoscritte ai triangoli $\triangle AXP$, $\triangle BYP$ e $\triangle CZP$ hanno un punto in comune diverso da P, oppure sono mutualmente tangenti in P.

Teoria dei numeri

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

N1. (a) Determinare tutti gli interi positivi k con la proprietà seguente: per ogni numero primo dispari p esiste un intero positivo n tale che

$$p | k^n - n \qquad \text{e} \qquad p | k^{n+1} - (n+1).$$

(b) Determinare tutti gli interi positivi k con la proprietà seguente: per ogni numero primo dispari p esiste un intero positivo n tale che

$$p | k^n - n^2 \qquad \text{e} \qquad p | k^{n+1} - (n+1)^2.$$

N2. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione crescente e sia n un intero positivo. Supponiamo che esistano numeri primi $p_1, \ldots, p_n$ e numeri naturali $r_1, \ldots, r_n$ tali che per ogni $i = 1, \ldots, n$ l'insieme $\{f(p_i k + r_i) \mid k = 1, 2, \ldots\}$ sia una progressione aritmetica infinita. Dimostrare che esiste un numero naturale a tale che

$$f(a+1), \ldots, f(a+n)$$

è una progressione aritmetica.

N3. Determinare tutti gli interi positivi n per i quali esistono interi $n_1, \ldots, n_k$, maggiori di 3 tali che

$$n = n_1 n_2 \ldots n_k = 2^{\frac{1}{2^k}(n_1-1)(n_2-1)\ldots(n_k-1)} - 1.$$

N4. Per un numero reale x, deontiamo con $\{x\}$ la *parte frazionaria* di x, ossia $\{x\} = x - [x]$ (ad esempio, $\{\pi\} = 0,14\ldots$).

Determinare il massimo valore di $c \in \mathbb{R}$ per cui

$$\{n\sqrt{3}\} > \frac{c}{n\sqrt{3}} \qquad \text{per tutti gli interi } n \geq 1.$$

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

N5. Determinare tutte le coppie (m, n) di interi positivi che soddisfano l'equazione

$$m + n - \frac{3mn}{m+n} = \frac{2011}{3}.$$

N6. Dimostrare che per ogni p primo dispari si ha

$$1^{p-1} + 2^{p-1} + ... + (p-1)^{(p-1)} \equiv p + (p-1)! \pmod{p^2}.$$

N7. Trovare tutte le coppie di interi coprimi a, b per cui esistono solo un numero finito di naturali n tali che $n^2 | (a^n + b^n)$.

N8. Siano m, n interi positivi tali che $\phi(5^m - 1) = 5^n - 1$, dove ϕ è la funzione di Eulero. Dimostrare che il massimo comune divisore fra m ed n è maggiore di 1.

Team(s) Selection Test

A1. Siano n ed m due numeri interi con $n > m > 0$.

Determinare, in funzione di n ed m, il massimo valore possibile di $x_1^2 + \ldots + x_m^2$ tra tutte le n-uple di numeri reali $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ tali che $x_1 + \ldots + x_n = 1$.

A2. Sia ABC un triangolo con $AB \neq AC$, e sia O il suo circocentro. Sia D il piede della bisettrice uscente da A e sia E il simmetrico di D rispetto al punto medio di BC.

La perpendicolare a BC passante per D interseca la retta AO nel punto X. La perpendicolare a BC passante per E interseca la retta AD nel punto Y.

Dimostrare che il quadrilatero $BXCY$ è ciclico.

A3. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due polinomi non nulli a coefficienti interi tali che $\deg(f(x)) > \deg(g(x))$.

(a) Supponiamo che per infiniti primi p il polinomio $pf(x) + g(x)$ abbia una radice intera.

Dimostrare che allora $f(x)$ ha una radice intera.

(b) Supponiamo che per infiniti primi p il polinomio $pf(x) + g(x)$ abbia una radice razionale.

Dimostrare che allora $f(x)$ ha una radice razionale.

B1. Un insieme A di numeri interi si dice *grassottello* se ha la seguente proprietà:

> comunque si scelgano due elementi x e y di A (eventualmente anche uguali), si ha che $x^2 + kxy + y^2 \in A$ per ogni intero k.

Determinare tutte le coppie (m, n) di numeri interi per i quali l'unico insieme grassottello che contiene sia m sia n è tutto $\mathbb{Z}$.

B2. Per ogni intero positivo n, definiamo $C(n)$ come il massimo intero k per cui esistono k coppie disgiunte di elementi dell'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$ tali che le somme degli elementi delle singole coppie sono k interi distinti minori od uguali a n.

(Si intende che ogni coppia è costituita da due elementi distinti, e nessun elemento appartiene a più di una coppia)

(a) Determinare $C(12)$ e $C(13)$.

(b) Determinare $C(n)$ per ogni intero positivo n.

B3. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico. La circonferenza Γ_1 passa per A e B ed è tangente al lato CD nel punto E. La circonferenza Γ_2 passa per B e C ed è tangente al lato DA nel punto F. La circonferenza Γ_3 passa per C e D ed è tangente al lato AB nel punto G. La circonferenza Γ_4 passa per D ed A ed è tangente al lato BC nel punto H.

Dimostrare che le rette EG ed FH sono perpendicolari.

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.