Algebra

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

A1. Determinare tutte le funzioni $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tali che

$$f(x + y - z) + f(2\sqrt{xz}) + f(2\sqrt{yz}) = f(x + y + z)$$

per ogni scelta di $x, y, z \geq 0$ tali che $x + y \geq z$.

A2. Sia n un intero positivo.

(a) Dimostrare che non esistono polinomi $p(x)$ a coefficienti reali di grado n tali che $p(i) = 2^i$ per ogni $i = 0, 1, \ldots, n, n + 1$ e $p(n + 2) = 2^{n+2} - n - 3$.

(b) Dimostrare che esiste un unico polinomio $p(x)$ a coefficienti reali che soddisfa $n+2$ delle $n + 3$ condizioni imposte al punto precedente.

A3. Dimostrare che per ogni scelta dei reali non negativi x, y, z si ha che

$$\frac{x + y + z}{3} - \sqrt[3]{xyz} \leq \frac{2}{3} \max\left\{(\sqrt{y} - \sqrt{z})^2, (\sqrt{z} - \sqrt{x})^2, (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2\right\}$$

A4. Consideriamo dei reali a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 che soddisfano le seguenti equazioni,

$$\frac{a_1}{k^2 + 1} + \frac{a_2}{k^2 + 2} + \frac{a_3}{k^2 + 3} + \frac{a_4}{k^2 + 4} + \frac{a_5}{k^2 + 5} = \frac{1}{k^2} \qquad \text{per } k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Quanto vale $\frac{a_1}{37} + \frac{a_2}{38} + \frac{a_3}{39} + \frac{a_4}{40} + \frac{a_5}{41}$? (Scrivere il risultato sotto forma di frazione.)

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

A5. Determinare il minimo valore della seguente espressione

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3+5}{a^3(b+c)}$$

al variare di a, b, c reali positivi tali che $abc = 1$.

A6. Determinare tutte le funzioni reali tali che

$$f(f(x)+y) = f(f(x)-y) + 4f(x)y,$$

per ogni coppia di reali x, y.

A7. Fissati tre numeri reali a, b, c tali che $a+b+c=0$, determinare il massimo valore di

$$ax + by + cz$$

al variare dei reali x, y, z che rispettano il vincolo $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=3$.

A8. Dimostrare che esiste un'unica funzione f dagli interi positivi in sé tale che $f(1) = f(2) = 1$ e

$$f(n) = f(f(n-1)) + f(n-f(n-1)), \qquad \text{per } n \geq 3$$

Determinare il valore di $f(2^m)$ per ogni intero $m \geq 2$.

Combinatoria

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

C1. Dati $n \geq 2$ e $1 \leq k \leq n-1$ prendiamo n punti distinti su una circonferenza, che determinano n archi, che chiamiamo "archi vecchi"; successivamente ruotiamo la circonferenza di $\frac{2k\pi}{n}$ e supponiamo di ottenere n punti tutti diversi da quelli di prima che determinano sulla circonferenza n archi che chiameremo "archi nuovi". Dimostrare che esiste un arco vecchio contenuto interamente in un arco nuovo (tutti gli archi contengono i loro estremi).

C2. Sia $n \geq 2$. Abbiamo $A_1, \cdots, A_n$ insiemi finiti; $\forall 1 \leq i, j \leq n \quad |A_i \Delta A_j| = |i-j|$, ove con Δ indichiamo la differenza simmetrica.

Trovare il minimo valore possibile di $\sum_{i=1}^{n} |A_i|$.

C3. Sia n un intero positivo e X un insieme di n elementi; diciamo che $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ha la proprietà P se esistono A e B in $\mathcal{F}$ che differiscano per uno e un solo elemento (nel senso che uno è contenuto nell'altro, che contiene però un elemento in più).

a) Determinare il minimo m tale che se $\mathcal{F}$ ha più di m elementi allora ha la proprietà P.

b) Descrivere tutte le famiglie $\mathcal{F}$ di cardinalità esattamente m prive della proprietà P.

C4. Si considerino tutte le n-ple di 0 e 1 (considerati come vettori di classi di resto modulo 2). Per quali n è possibile suddividerle in coppie in modo che le somme dei due elementi delle 2^{n-1} coppie siano tutte diverse (la somma si fa come vettori)?

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

C5. Sia $P = \{1, \cdots, n\}^k$. Dato $A \subseteq P$ non vuoto, diciamo che A è decrescente se soddisfa la seguente proprietà: comunque si scelgano due k-uple $(x_1, \cdots, x_k)$ e $(y_1, \cdots, y_k)$ con $(x_1, \cdots, x_k) \in A$ e $\forall 1 \leq i \leq k \quad y_i \leq x_i$, allora anche $(y_1, \cdots, y_k) \in A$.

Dato $B \subseteq P$, non vuoto, diciamo che B è crescente se soddisfa la seguente proprietà: comunque si scelgano due k-uple $(x_1, \cdots, x_k)$ e $(y_1, \cdots, y_k)$ con $(x_1, \cdots, x_k) \in B$ e $\forall 1 \leq i \leq k \quad y_i \geq x_i$, allora anche $(y_1, \cdots, y_k) \in B$.

Trovare, al variare di A fra i sottoinsiemi decrescenti e di B tra i sottoinsiemi crescenti, il massimo valore di

$$\frac{|A \cap B|}{|A| \cdot |B|}.$$

C6. Alberto possiede n monete disposte sul tavolo in un certo numero di pile non vuote e può effettuare solo un tipo di mossa: sceglie 2 pile di monete, tali che il numero n_1 di monete delle prima pila non ecceda il numero n_2 della seconda, e sposta n_1 dalla seconda pila alla prima, in modo da raddoppiare l'altezza della prima pila. Nel caso in cui $n_1 = n_2$, la seconda pila scompare.

Determinare le configurazioni iniziali di pile di monete tali che a partire da quelle, con un numero finito di mosse, Alberto riesce a spostare tutte le n monete in un'unica pila.

C7. Abbiamo un grafo connesso su n vertici; ogni vertice ha grado $\geq k$. Dimostrare che allora è possibile colorare gli archi con $n - k$ colori in modo che per ogni coppia di vertici v, w esista un cammino che congiunge v e w costituito da archi di colori tutti diversi.

C8. Barbara scrive su ognuna di 2014 carte un numero diverso, quindi le posa voltate sul tavolo. Alberto ad ogni turno sceglie 10 carte e Barbara gli dice uno dei numeri presenti nelle carte scelte, senza specificare su quale carta sia scritto. Dopo un numero finito di turni Alberto deve dichiarare il valore esatto del maggior numero di carte possibili. Quante ne può indovinare come minimo?

C9. [LUNCH PROBLEM] Sia E un insieme di n elementi. Trovare il massimo k per cui esistono $A_1, \cdots, A_k \subseteq E$ distinti tali che per ogni $1 \leq i, j \leq k$ si abbia $A_i \cap A_j = \emptyset$ oppure $A_i \subset A_j$ o ancora $A_j \subset A_i$.

Geometria

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

G1. Sia ABC un triangolo acutangolo e sia Ω la sua circonferenza circoscritta. Le rette tangenti a Ω in B e C si intersecano in P. I punti D e E si trovano su AB e AC in modo tale che PD e PE siano perpendicolari a AB e AC rispettivamente.

Dimostrare che l'ortocentro del triangolo ADE e' il punto medio di BC.

G2. Sia ABC un triangolo con $AB > BC$ e Ω la sua circonferenza circoscritta. Definiamo M, N come punti sui segmenti AB, BC (rispettivamente), tali che $AM = CN$. Sia $K = MN \cap AC$, sia P l'incentro del triangolo AMK e sia Q il K-excentro del triangolo CNK.

(a) Siano U e V le intersezioni (diverse da K) tra la retta KP e le circonferenze circoscritte a KAM e KCN. Dimostrare che U e V sono i circocentri di APM e di CQN.

(b) Detto R il punto medio dell'arco AC di Ω contentente B , dimostrare che $RP = RQ$.

G3. Sia ABC un triangolo, sia I il suo incentro e sia ω il suo incerchio. Siano A', B' e C' i punti di tangenza di ω con i lati del triangolo ABC. Sia K un punto interno al triangolo $A'B'C'$. La retta $A'K$ interseca $B'C'$ in A_1 e interseca nuovamente ω in A_2. Definiamo B_1, B_2, C_1 e C_2 in modo analogo.

(a) Dimostrare che le rette AA_1, BB_1 e CC_1 concorrono.

(b) Dimostrare che le rette AA_2, BB_2 e CC_2 concorrono.

G4. Sia ABC un triangolo, sia I il suo incentro e sia ω il suo incerchio. Siano A', B' e C' i punti di tangenza di ω con i lati del triangolo ABC. Sia K un punto interno al triangolo $A'B'C'$. La retta $A'K$ interseca $B'C'$ in A_1 e interseca ω in A_2 ($A_2 \neq A'$). Definiamo B_1, B_2, C_1 e C_2 in modo analogo.

Definiamo P come il punto di concorrenza delle tre rette AA_1, BB_1 e CC_1. Definiamo Q come il punto di concorrenza delle tre rette AA_2, BB_2 e CC_2.

Dimostrare che i punti K, P e Q sono allineati.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

G5. Sia ABC un triangolo con $\angle B > \angle C$. Siano P e Q due punti distinti sulla retta AC tali che $\angle PBA = \angle QBA = \angle ACB$ e tali che A si trovi tra P e C. Supponiamo che esista un punto D interno al segmento BQ tale che $PD = PB$. Sia infine $R \neq A$ il secondo punto di intersezione della retta AD con il circocerchio di ABC.

(a) Dimostrare che $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

(b) Dimostrare che $QB = QR$.

G6. Sia ABC un triangolo e sia C_1 un punto arbitrario sul lato AB. Supponiamo che esistano i punti A_1 e B_1 rispettivamente sui lati BC e AC tali che $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1 = \angle ACB$. Le rette AA_1 e BB_1 si intersecano in un punto C_2.

Dimostrare che esiste un punto fisso P tale che C_1, C_2 e P sono allineati indipendentemente dalla scelta di C_1 su AB.

G7. Sia ABC un triangolo e sia Γ la sua circonferenza circoscritta. Sia M un punto all'interno del triangolo ABC. AM, BM, CM intersecano Γ nuovamente in A', B', C' rispettivamente. Gli assi dei segmenti MA', MB', MC' intersecano BC, CA, AB in A_1, B_1, C_1 rispettivamente.

(a) Dimostrare che A_1, B_1, C_1 sono allineati.

(b) Sia M' il simmetrico di M rispetto alla retta $A_1B_1C_1$. Dimostrare che $M' \in \Gamma$.

G8. Sia ABC un triangolo, sia I il suo incentro e sia ω il suo incerchio. Siano D, E e F i punti di tangenza di ω con i lati del triangolo ABC. Siano X, Y e Z i punti medi dei lati del triangolo ABC. Definiamo $P = EF \cap BC$ e $Q = EF \cap YZ$. Definiamo M come il punto medio del segmento DP. Definiamo infine R come il punto di intersezione tra il segmento QM e ω.

(a) Dimostrare che le rette EF, XY e BI concorrono in un punto U. Dimostrare che le rette EF, XZ e CI concorrono in un punto V.

(b) Dimostrare che $\angle BRC = 90°$.

Teoria dei numeri

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

N1. Determinare tutte le terne di interi positivi (x, y, p), con p numero primo, tali che

$$\frac{xy^3}{x+y} = p^3.$$

N2. Sia $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ una n-upla di interi positivi che soddisfa le condizioni seguenti:

(a) $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leq 50$;

(b) per ogni n-upla di interi positivi $b_1, b_2, \ldots, b_n$ esistono un intero positivo m ed interi positivi $c_1, \ldots, c_n$ tali che

$$c_i^{a_i} = m \cdot b_i \qquad \text{for } i = 1, \ldots, n.$$

Dimostrare che $n \leq 16$ e determinare il numero di n-uple che soddisfano le proprietà date per $n = 16$.

N3. Sia n un intero positivo dispari. Dimostrare che

$$((n-1)^n + 1)^2 \text{ divide } n(n-1)^{(n-1)^n+1} + n.$$

N4. Sia $t(n)$ la somma delle cifre di n in base 2, e sia $k \geq 2$ un intero.

(a) Dimostrare che esiste una successione $a_1, a_2, \ldots$ tale che, per ogni $m \geq 1$,

  (i) a_m è un intero dispari maggiore o uguale a 3;

  (ii) $t(a_1 a_2 \cdots a_m) = k$.

(b) Dimostrare che esiste un intero N tale che $t(3 \cdot 5 \cdots (2m+1)) > k$ per ogni intero $m > N$.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

N5. Sia p un numero primo dispari, e

$$f(X) = a_1 + a_2X + \cdots + a_{p-1}X^{p-2},$$

dove a_i è il simbolo di Legendre $\left(\frac{i}{p}\right)$, ossia $a_i = 1$ se i è un quadrato modulo p e $a_i = -1$ se a_i non è un quadrato modulo p.

(a) Dimostrare che 1 è una radice di $f(X)$ di molteplicità 1 se e solo se $p \equiv 3 \pmod 4$.

(b) Dimostrare che se $p \equiv 5 \pmod 8$ la radice 1 ha molteplicità uguale a 2.

N6. Denotiamo con P l'insieme dei numeri primi e con M un sottoinsieme di P con le seguenti proprietà:

(a) M ha almeno 3 elementi;

(b) per ogni sottoinsieme proprio A di M, tutti i fattori primi di

$$\left(\prod_{p \in A} p\right) - 1$$

appartengono a M.

Dimostrare che $M = P$.

N7. Dimostrare che gli interi positivi che non possono essere scritti come somma di quadrati distinti sono in numero finito.

N8. Determinare tutte le terne (a, b, c) di interi non negativi tali che $2ab$ non è un quadrato perfetto e $(a^n + 2^n)|b^n + c$ per ogni $n > 0$.

Team(s) Selection Test

A1. Sia a_1, a_2, a_3, $\ldots$ la successione definita da

- $a_1 = a_2 = 1$,
- $a_{2n+1} = 2a_{2n} - a_n$ per ogni $n \geq 1$,
- $a_{2n+2} = 2a_{2n+1}$ per ogni $n \geq 1$.

Dimostrare che a_n è divisibile per 5 per ogni $n > 3$ tale che $(n-3)$ è divisibile per 8.

A2. Sia p un numero primo, e sia $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ una p-upla di numeri interi tali che

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_p^n \equiv 0 \pmod p$$

per ogni intero positivo n.

Dimostrare che $x_1 \equiv x_2 \equiv \ldots \equiv x_p \pmod p$.

A3. Sia ω_1 una circonferenza con centro in O. Sia AB un diametro di ω_1 e sia C un punto di ω_1 tale che $90^\circ < \angle AOC < 180^\circ$. Sia K un punto della retta OC tale che C sta tra K e O, e sia ω_2 la circonferenza con centro in K e passante per C. Sia E l'ulteriore intersezione tra la retta KB ed ω_1, e siano S e T i due punti di ω_2 tali che le rette ES ed ET sono tangenti ad ω_2.

Dimostrare che le rette AC, EK ed ST concorrono.

B1. Sia $A_0B_0C_0$ un triangolo di area $\sqrt{2}$ nel piano cartesiano. Sia $A_1B_1C_1$ il triangolo i cui vertici sono gli ex-centri di $A_0B_0C_0$. Sia $A_2B_2C_2$ il triangolo i cui vertici sono gli ex-centri di $A_1B_1C_1$, e così via.

Determinare se, iterando questa procedura, è possibile arrivare prima o poi ad avere un triangolo i cui vertici hanno tutti entrambe le coordinate razionali.

B2. Ad una gara di matematica partecipano 30 concorrenti e vengono assegnati 8 problemi. Ogni problema può essere solo risolto o non risolto. Il valore di ogni problema viene determinato alla fine della competizione, ed è uguale al numero di concorrenti che non lo hanno risolto (ad esempio, un problema risolto da tutti vale 0 punti, un problema risolto da 8 concorrenti vale 22 punti). Il punteggio finale di ogni concorrente è la somma dei punteggi finali dei problemi che ha risolto.

Al termine della competizione risulta che c'è un unico concorrente in fondo alla classifica, cioè con un punteggio strettamente inferiore agli altri.

Determinare il massimo punteggio possibile per questo concorrente in fondo alla classifica.

B3. Siano a, b, c, p, q, r numeri interi positivi tali che

$$a^p + b^q + c^r = a^q + b^r + c^p = a^r + b^p + c^q.$$

Dimostrare che $a = b = c$ oppure $p = q = r$.

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.