Algebra

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

A1. Siano $p(x)$ e $q(x)$ due polinomi a coefficienti complessi, entrambi di grado 2016 e tali che

$$p(x) + (-1)^x q(x) = 2^x, \qquad \text{per } x = 1, 2, \ldots, 4034.$$

Si chiede di determinare il coefficiente di x^{2016} in $q(x)$.

A2. Sia $f : (0,1) \to (0,1)$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{se } x < \frac{1}{2} \\ x^2 & \text{se } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Fissati due numeri distinti $a_0, b_0 \in (0,1)$, si definiscono ricorsivamente le successioni a_n e b_n per $n \geq 0$, tramite

$$a_{n+1} = f(a_n) \qquad \text{e} \qquad b_{n+1} = f(b_n).$$

Dimostrare che esiste un intero positivo n per cui

$$(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) < 0.$$

A3. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ che soddisfano la seguente condizione: per ogni terna di reali positivi distinti a, b, c, si ha che $f(a)$, $f(b)$ e $f(c)$ sono le lunghezze dei lati di un triangolo se e solo se a, b e c sono le lunghezze dei lati di un triangolo.

A4. Sia n un intero positivo e sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una qualsiasi funzione crescente. Si determini quanto vale

$$\max_{0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1} \sum_{k=1}^{n} f\left(\left|x_k - \frac{2k-1}{2n}\right|\right).$$

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

A5. Sia n un intero positivo e siano $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ reali positivi tali che $x_1 x_2 \dots x_{n+1} = 1$. Dimostrare che

$$\sqrt[x_1]{n} + \cdots + \sqrt[x_{n+1}]{n} \geq n^{\sqrt[n]{x_1}} + \cdots + n^{\sqrt[n]{x_{n+1}}}$$

A6. Determinare per quali n esistono $a_0, a_1, \dots, a_n$ reali non nulli tali che per ogni scelta di $e_0, e_1, \dots, e_n \in \{-1, 1\}$ il polinomio $p(x) = \sum_{k=0}^{n} e_k a_k x^k$ ha n radici reali distinte.

A7. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x+y)^2 = f(x)^2 + 2f(xy) + f(y)^2$$

per ogni scelta di $x, y > 0$.

A8. Sia $n \geq 2$ e siano $x_1, x_2, \dots, x_n$ numeri reali tali che

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \qquad \text{e} \qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1.$$

Per ogni sottoinsieme A di $\{1, 2, \dots, n\}$, poniamo

$$s_A = \sum_{i \in A} x_i$$

intendendo che $s_\varnothing = 0$.

Si dimostri che per ogni $\lambda > 0$, il numero di insiemi A per cui $s_A \geq \lambda$ non supera $2^{n-3}\lambda^{-2}$. Per quali scelte di $x_1, x_2, \dots, x_n$ e di λ vale l'uguaglianza?

Combinatoria

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

C1. Il drago si nasconde in una casella di una tabella 2015×2015. Ad ogni mossa possiamo colpire una casella. Se quella scelta contiene il drago questo viene ferito e fugge su una casella adiacente (con un lato in comune), altrimenti rimane fermo. Se il drago viene ferito due volte, muore. Quante mosse sono necessarie, al minimo, per essere certi di uccidere il drago non sapendo né in quale casella si trova, né quando o dove si sposta una volta ferito?

C2. Ad una festa ci sono 36 partecipanti e alcuni si stringono la mano. Finita la festa, si ha che se due partecipanti si sono stretti la mano, allora hanno stretto la mano ad un numero diverso di partecipanti. Quante sono state le strette di mano al massimo?

C3. Mostrare che, dato un insieme A di persone, ne esiste un sottoinsieme S tale che ogni membro di S abbia al più tre amici in S, mentre ogni persona in $A \setminus S$ abbia almeno quattro amici all'interno di S.

C4. A e B sono due sottoinsiemi degli interi non negativi per cui ogni intero non negativo m si scrive come $m = a + b$ per una e una sola scelta di $a \in A$ e $b \in B$. Supponiamo anche che A abbia un numero finito di elementi. Dimostrare che allora esiste un $c > 0$ per cui $b \in B$ se e solo se $b + c \in B$ (cioè B è c-periodico).

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

C5. Data una 2016-upla di interi positivi $(a_1, \ldots, a_{2016})$ possiamo effettuare la seguente mossa: scegliamo degli indici $1 \leq k, l \leq 2016$ tali che a_k sia pari, quindi sostituiamo ad a_k il numero $a_k/2$ e ad a_l il numero $a_k/2+a_l$. Se all'inizio $a_i = i$ per ogni $i = 1, \ldots, 2016$, dimostrare che per ogni permutazione σ di $\{1, \ldots, 2016\}$ esiste una sequenza finita di mosse che fa ottenere la 2016-upla $(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(2016)})$.

C6. Una parola formata da lettere H e V è *buona* se comincia con una sequenza di lettere ripetuta due volte, *cattiva* altrimenti. Una macchina distingue le parole fra buone e cattive secondo lo schema che segue: per $l = 1, 2, 3, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor$, la macchina decide se la parola comincia con due copie di una stringa di l lettere confrontando la lettera 1 e la $l + 1$, la 2 e la $l + 2$, e in generale la i e la $l + i$, fino a che la macchina non incontra una coppia di lettere diverse (o constata che la parola è buona). Mostrare che esiste una parola di lunghezza n sulla quale la macchina è costretta a effettuare almeno $100n$ confronti prima di determinare se sia buona o cattiva.

C7. La giuria di una gara di bellezza matematica è composta da 100 giudici, ciascuno dei quali stila una classifica ordinando strettamente tutti i concorrenti. Le classifiche che stilano hanno la proprietà che, comunque si scelgano tre giudici distinti x, y e z e tre concorrenti distinti A, B e C, *non* si verifica (contemporaneamente) che secondo x sia A il migliore e B il peggiore dei tre, secondo y sia B il migliore e C il peggiore dei tre e secondo z sia C il migliore e A il peggiore dei tre.

Dimostrare che esiste una classifica globale che ordina strettamente i concorrenti in modo che per ogni coppia ci siano almeno 50 giudici che condividono l'ordine fissato da tale classifica tra i due concorrenti della coppia.

C8. In un paese, il parlamento è suddiviso in h camere, con $h \geq 1$ un intero, ciascuna delle quali ha posto per esattamente $m \geq 2$ parlamentari. Tra gli hm parlamentari, ci sono N coppie di nemici. Qual è il minimo N per cui esista una configurazione delle coppie di nemici tale che, comunque vengano fatti sedere i parlamentari nelle varie camere, esista almeno una coppia di nemici seduta nella stessa camera?

C9. [LUNCH PROBLEM] In un gruppo di n stagisti ogni stagista conosce esattamente d femmine e d maschi. Per quali coppie (n, d) questa situazione è possibile?

Geometria

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

G1. Sia ABC un triangolo e sia t una retta passante per A. Siano Y, Z le proiezioni di B, C su t e sia X la proiezione di A su BC.
Mostrare che il circocentro di $\triangle XYZ$ giace sul cerchio dei nove punti di ABC.

G2. Sia ABC un triangolo acutangolo e sia γ la sua circonferenza inscritta che interseca i lati AC, CB e BA rispettivamente in L, Q e P. Sia $D \in AC$ qualunque e siano γ_1 e γ_2 le circonferenze inscritte in ABD e DBC.
Mostrare che se X è preso sul segmento BD in modo tale che $BX = BP$, allora X appartiene alla tangente comune esterna di γ_1 e γ_2 che non è AC.

G3. All'interno del quadrilatero ciclico $ABCD$ vi sono due punti P e Q tali che $\angle PDC + \angle PCB$, $\angle PAB + \angle PBC$, $\angle QCD + \angle QDA$ e $\angle QBA + \angle QAD$ sono uguali a 90. Mostrare che la retta PQ forma angoli uguali con le rette AB e CD.

G4. Sia ABC un triangolo e siano D, E i piedi delle altezze relative ad A, B, le quali si intersecano in H. Sia M il punto medio di AB e supponiamo che le circonferenze circoscritte a ABH e DEM si intersechino nei punti P, Q (con P, A sullo stesso lato di CH).
Mostrare che le rette PH, MQ si incontrano sulla circonferenza circoscritta ad ABC.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

G5. Sia ABC un triangolo e siano B_1, C_1 due punti su AC, AB rispettivamente. Sia P il punto di intersezione di BB_1, CC_1 e sia P_1 quel punto tale che $BPCP_1$ sia un parallelogrammo.
Se le circonferenze circoscritte a BPC_1 e CPB_1 si incontrano nuovamente in Q, mostrare che $\angle BAQ = \angle CAP_1$.

G6. Sia ABC un triangolo di circocentro O. Sia t una retta tangente alla circonferenza circoscritta al triangolo BOC, la quale interseca i lati AB, AC nei punti X, Y. Sia A' il simmetrico di A rispetto alla retta t.
Mostrare che la circonferenza circoscritta al triangolo $XA'Y$ è tangente alla circonferenza circoscritta di ABC.

G7. Sia ABC un triangolo e sia H la proiezione di A su BC. Sia H' il simmetrico di H rispetto al punto medio di BC e sia X il punto di intersezione delle rette che tangono la circonferenza circoscritta di ABC in B, C. La perpendicolare da H' a XH' incontra AB, AC in Y, Z rispettivamente.

- Sia r la retta simmetrica di BX rispetto alla bisettrice esterna di $\angle ABC$, e analogamente s la retta simmetrica di CX rispetto alla bisettrice esterna di $\angle ACB$. Detto $D = r \cap s$, mostrare che $DH' \perp BC$.
- Mostrare che $\angle ZXC = \angle YXB$.

G8. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso. Siano P, Q, R, S punti sui lati AB, BC, CD, DA rispettivamente in modo tale che PR e QS si intersechino in un punto O e i quattro quadrilateri $APOS$, $BQOP$, $CROQ$, $DSOR$ siano circoscrivibili. Mostrare che le rette AC, PQ e RS sono concorrenti o parallele.

Teoria dei numeri

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

N1. Per ogni numero razionale q sia M_q l'insieme delle soluzioni razionali dell'equazione $x^3 - 2015x = q$.

(a) Dimostrare che ci sono dei valori di q per cui $M_q = \varnothing$.

(b) Determinare tutte le possibili cardinalità di M_q al variare di $q \in \mathbb{Q}$.

(c) Dimostrare che, per ogni polinomio a coefficienti razionali $f(x)$ di grado almeno 2, esiste un numero razionale q per cui l'equazione $f(x) = q$ non ha soluzioni razionali.

N2. Sia p un numero primo e siano l, m, n interi positivi tali che

$$p^{2l-1}m(mn+1)^2 + m^2$$

è un quadrato perfetto. Dimostrare che m è un quadrato perfetto.

N3. Determinare tutte le coppie di interi (a, b) che soddisfano l'equazione

$$(b^2 + 11(a-b))^2 = a^3 b\,.$$

N4. Chiamiamo una successione $a_1, a_2, a_3, \ldots$ di numeri interi positivi una *successione ascendente* se valgono le seguenti due proprietà:

(i) $a_n < a_{n+1}$ per ogni n;

(ii) $a_{2n} = 2a_n$ per ogni n.

(a) Sia $\{a_n\}$ una successione ascendente, e sia p un numero primo maggiore di a_1. Dimostrare che esiste un intero positivo n tale che $p \mid a_n$.

(b) Sia p un numero primo dispari. Dimostrare che esiste una successione ascendente $\{a_n\}$ che non contiene nessun multiplo di p.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

N5. Determinare tutti i polinomi $f(x)$ a coefficienti interi tali che il massimo comune divisore $(f(n), f(2^n))$ è uguale a 1 per ogni numero naturale n.

N6. Sia $p > 5$ un numero primo. Dimostrare che almeno uno dei numeri $p+1, 2p+1, 3p+1, \ldots, p(p-3)+1$ si può scrivere nella forma $x^2 + y^2$ con $x, y \in \mathbb{Z}$.

N7. Sia q un numero primo dispari. Dimostrare che esiste un intero positivo N_q tale che, se $k > N_q$ e $qk + 1 = p$ è un numero primo, allora p non divide $1^{q-1} + 2^{q-1} + \cdots + k^{q-1}$.

N8. Sia $k > 3$ un intero positivo dispari. Dimostrare che esistono infiniti interi positivi n tali che $\frac{n^2+1}{2}$ ha due divisori positivi d_1 e d_2 con $d_1 + d_2 = n + k$.

Team(s) Selection Test

A1. Sia $ABCD$ un quadrilatero. Supponiamo che esista un punto P interno al quadrilatero tale che $\angle APD = \angle BPC = 90°$ e $PA \cdot PD = PB \cdot PC$. Sia O il circocentro di CPD.

Dimostrare che la retta OP passa per il punto medio di AB.

A2. In un dato giorno un centro commerciale è stato visitato da 2016 clienti. Ognuno di questi clienti è entrato, è rimasto un po' di tempo all'interno del centro commerciale, e poi è uscito senza più rientrare.

Un gruppo di clienti si definisce "contemporaneo" se i suoi componenti sono stati tutti contemporaneamente all'interno del centro commerciale almeno in un istante. Un gruppo di clienti si definisce "sequenziale" se, comunque si scelgano due suoi componenti, questi non sono stati contemporaneamente all'interno del centro commerciale, nemmeno per un istante.

Determinare il più grande intero k con questa proprietà: comunque si siano svolti ingressi ed uscite, di sicuro esiste un gruppo contemporaneo di almeno k clienti oppure esiste un gruppo sequenziale di almeno k clienti.

A3. Dimostrare che non esistono funzioni $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ tali che

$$f(f(x) + y) = f(x) + 3x + yf(y)$$

per ogni coppia di numeri reali positivi x e y.

B1. Siano a e b interi positivi tali che $(a! + b!)$ divide $a! \cdot b!$.

Dimostrare che $3a \geq 2b + 2$.

B2. Sia a_n una successione di numeri reali positivi tali che

$$a_{n+1} \geq \frac{na_n}{a_n^2 + (n-1)}$$

per ogni intero positivo n.

Dimostrare che $a_1 + \ldots + a_n \geq n$ per ogni $n \geq 2$.

B3. Sia ABC un triangolo con $AB \neq AC$. Siano D, E ed F i punti medi dei lati BC, CA e AB, rispettivamente. Sia ω la circonferenza passante per A e tangente alla retta BC in D. La circonferenza ω interseca nuovamente la retta AB in X, la retta AC in Y, la retta DE in R, e la retta DF in S.

Sia X' il simmetrico di X rispetto ad F, e sia Y' il simmetrico di Y rispetto ad E. La retta $X'Y'$ interseca la retta AD in Q e la retta EF in M. Sia infine P l'ulteriore intersezione tra ω e la retta AM.

(a) Dimostrare che i punti R ed S stanno sulla retta $X'Y'$.

(b) Dimostrare che Q sta sull'asse radicale delle circonferenze circoscritte ai triangoli DCR e DBS.

(c) Dimostrare che $AQ = QP$.

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.