# Algebra

## Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

A1. Sia $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una successione di numeri interi che soddisfano

$$(n-1)a_{n+1} = (n+1)a_n - 2(n-1), \qquad \forall n \geq 1.$$

Sapendo che 2000 divide $a_{1999}$, determinare il più piccolo $n \geq 2$ tale che 2000 divida $a_n$.

A2. Determinare tutti i polinomi $P, Q$ a coefficienti razionali, tali che

$$P(x)^3 + Q(x)^3 = x^{12} + 1.$$

A3. Sia $a_0, a_1, a_2, \ldots$ una successione di numeri reali tali che

$$\sum_{n=0}^{m} a_n \cdot (-1)^n \cdot \binom{m}{n} = 0$$

per ogni intero $m$ maggiore di un qualche $m_0$.

Si dimostri che allora esiste un polinomio $P(x)$ tale che $a_n = P(n)$ per ogni intero $n \geq 0$.

A4. Determinare tutti gli $\alpha$ reali per cui esiste un polinomio a coefficienti reali non nullo $P(x)$, tale che

$$\frac{P(1) + P(3) + P(5) + \cdots + P(2n-1)}{n} = \alpha P(n)$$

per ogni intero positivo $n$.

Determinare poi tutti i polinomi di questo tipo per $\alpha = 2$.

## Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

A5. Siano $a, b, c$ numeri reali positivi tali che $a + b + c = 3$. Dimostrare che

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

A6. Determinare tutte le funzioni $f$ dai reali positivi nei reali tali che

$$f(x) + f(y) \leq \frac{f(x+y)}{2}, \qquad \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y} \geq \frac{f(x+y)}{x+y}$$

per ogni $x, y > 0$.

A7. Sia $n$ un numero intero positivo e siano $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numeri reali positivi tale che $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. Sia

$$E(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{1 - x_1^2}} + \frac{x_3}{\sqrt{1 - (x_1 + x_2)^2}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{1 - (x_1 + \cdots + x_{n-1})^2}}$$

Trovare il valore della parte intera di $E(x_1, \ldots, x_n)$ al variare di $n$ e di $x_1, \ldots, x_n$.

A8. Determinare tutte le funzioni $f$ dai reali nei reali che soddisfano le due condizioni seguenti:

(a) Esiste un numero reale $M$ tale che $f(x) \leq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(b) Per ogni coppia di reali $x, y$, si ha

$$f(xf(y)) + yf(x) = xf(y) + f(xy).$$

# Combinatoria

## Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

C1. Sia $n \geq 3$ un numero intero e siano $C_1, \ldots, C_n$ circonferenze nel piano tali che, per ogni $i \neq j$, $C_i$ e $C_j$ abbiano esattamente due punti d'intersezione e che, per ogni terna di indici distinti $i, j, k$, l'intersezione $C_i \cap C_j \cap C_k$ sia vuota. Su ogni punto d'intersezione fra due circonferenze si trova inizialmente una moneta.

Alberto e Barbara giocano come segue: a turni alterni, cominciando da Alberto, uno dei due giocatori rimuove una moneta che non si trovi su una circonferenza da cui è stata rimossa una moneta al turno immediatamente precedente (durante il primo turno, Alberto può rimuovere una moneta a sua scelta). Perde chi non può muovere. Determinare per quali $n$ Alberto ha una strategia vincente.

C2. Siano $A, B$ interi positivi con $A < B < 2A$. Una pulce effettua dei salti tra gli elementi di $\mathbb{N}$, partendo da 0, ogni volta scegliendo se incrementare il numero su cui si trova di $A$ oppure di $B$. Viene scelto un insieme $C \subseteq \mathbb{N}$ tale che per ogni coppia di elementi distinti $x, y \in C$ si abbia $|x - y| \geq A$; per ogni $x \in C$ viene versata della colla sui punti $x + 1, \ldots, x + A$.

Diremo che $C$ è $F$-spaziato se fra due intervalli di colla vi sono sempre almeno $F$ punti liberi, e lo stesso vale prima del primo intervallo; ovvero se

(a) il minimo elemento di $C$ è almeno $F - 1$;

(b) dati $x, y \in C$ con $x < y$ si ha $y + 1 > x + A + F$.

Determinare il minimo $F$ tale che, per ogni insieme $C$ che sia $F$-spaziato, la pulce possa effettuare un numero arbitrario di salti senza cadere sulla colla.

C3. Sia $n \geq 3$ un numero intero e siano dati $P_1, \ldots, P_n$ punti del piano a tre a tre non allineati. Per ogni coppia $i < j$ si tracci il segmento $P_iP_j$. Diremo che uno di questi segmenti *non è tagliato* se non interseca nessun altro segmento se non agli estremi. Determinare, in funzione di $n$, il massimo numero di segmenti che non sono tagliati.

C4. Una griglia rettangolare composta da quadretti unitari è tassellata con tessere $2 \times 1$. Dimostrare che è possibile colorare i vertici della griglia con 3 colori in modo che due vertici adiacenti abbiano lo stesso colore se e solo se il segmento di griglia che li collega è coperto da una tessera (ovvero non si trova sul bordo di nessuna tessera).

## Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

C5. Un grafo completo ha 60 vertici. Per ogni arco viene fissato un verso. Dimostrare che è possibile scegliere due gruppi di vertici $A, B$ tali che

(a) $|A| = |B| = 4$;

(b) $A \cap B = \emptyset$;

(c) ogni arco tra $A$ e $B$ è diretto da $A$ a $B$.

C6. Alberto ordina segretamente e totalmente un insieme $I$ di 20 oggetti. Barbara può effettuare un qualsiasi numero di indagini di questo tipo: sceglie una tripla di oggetti $T \subseteq I$ e la propone ad Alberto, il quale sceglie se rivelarle il minimo oppure il massimo elemento di $T$. Quanto vale la cardinalità massima di un sottoinsieme $I' \subseteq I$ per il quale Barbara può conoscere completamente l'ordinamento?

C7. In una nazione ci sono $n > 1$ città, alcune coppie delle quali sono collegate da una linea aerea (nei due sensi). Si sa che per ogni coppia di città c'è un unico modo per andare da una all'altra usando queste linee (e senza percorrere la stessa linea avanti e indietro). Per ciascuna città $C$, il sindaco di $C$ conta i modi in cui può numerare le città (da 1 a $n$) in modo che, qualunque viaggio si faccia a partire da $C$ senza utilizzare linee in entrambi i sensi, lungo il percorso le città sono numerate in ordine decrescente. Tutti i sindaci tranne uno si accorgono che il numero di tali enumerazioni per la propria città è multiplo di 2016. Dimostrare che, anche per l'ultimo sindaco, tale quantità è multipla di 2016.

C8. In un grafo con $n$ vertici gli archi sono orientati ed etichettati con la lettera $A$ o la lettera $B$. Tra due vertici ci possono essere anche più archi, in qualsiasi verso e con qualsiasi etichetta. Una parola $\omega$ composta di lettere $A$ e $B$ si dice *implementabile* se esiste un cammino diretto sul grafo tale che la successione di lettere sugli archi percorsi dia esattamente $\omega$. Supponiamo che ogni parola di lunghezza esattamente $2^n$ sia implementabile; dimostrare che ogni parola finita è implementabile.

C9. [LUNCH PROBLEM] Sono dati 2016 punti distinti nel piano. Dimostrare che l'insieme delle distanze tra coppie di punti ha cardinalità almeno 45.

# Geometria

## Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

G1. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso tale che $\angle CDA = \angle BCA$ e $AC$ biseca l'angolo $\angle DAB$. Dette $X$ e $Y$ le proiezioni di $A$ su $BC$ e $CD$, mostrare che l'ortocentro di $AXY$ giace su $BD$.

G2. Sia $ABC$ un triangolo acutangolo con bisettrice $AD$. La perpendicolare condotta da $C$ ad $AB$ interseca la tangente condotta da $A$ alla circonferenza ciroscritta ad $ABC$ in un punto $P$. Detto $K$ il punto di intersezione di $PD$ con $AB$, mostrare che la perpendicolare condotta da $K$ ad $AD$ passa per l'ortocentro $H$ del triangolo $ABC$.

G3. Sia $O$ il circocentro di un triangolo acutangolo $ABC$. Sia $P$ sul lato $AB$ tale che $\angle BOP = \angle ABC$ e sia Q sul lato $AC$ tale che $\angle COQ = \angle ACB$. Mostrare che la retta simmetrica di $BC$ rispetto a $PQ$ è tangente alla circonferenza circoscritta ad $APQ$.

G4. Siano $\omega$ e $\Omega$ di centro $I$ e $O$ rispettivamente la circonferenza inscritta e circoscritta a un triangolo acutangolo $ABC$. La circonferenza $\omega$ interseca $BC$ in $D$ e le tangenti a $\Omega$ passanti per $B$ e $C$ si intersecano in $L$. Siano $AH$ l'altezza condotta da $A$ a $BC$ e $X$ l'intersezione di $AO$ con $BC$. Dette $P$ e $Q$ le intersezioni di $OI$ con $\Omega$ mostrare che $PQXH$ è ciclico se e solo se $A, D$ e $L$ sono allineati.

## Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

G5. Sia $ABC$ un triangolo acutangolo scaleno con incetro $I$ e sia $D$ la proiezione di $I$ su $BC$. Le bisettrici $BI$ e $CI$ intersecano nuovamente l'altezza $AH$ condotta da $A$ in due punti $P$ e $Q$. Sia $O$ il circocentro di $IQP$ e sia $L$ l'intersezione di $AO$ e $BC$. Mostrare che, detta $N$ l'intersezione della circonferenza passante per $A, I$ e $L$ con $BC$, vale $\frac{BD}{DC} = \frac{BN}{NC}$.

G6. Sia $D$ il piede della perpendicolare da $A$ alla retta di Eulero di un triangolo acutangolo $ABC$. Una circonferenza $\omega$ di centro $S$, passante per $A$ e $D$, interseca i lati $AB$ e $AC$ in $X$ e $Y$ rispettivamente. Sia $P$ il piede dell'altezza condotta da $A$ a $BC$ e $M$ il punto medio di $BC$. Mostrare che il circocentro di $XSY$ è equidistante da $P$ e $M$

G7. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso con $\angle ABC = \angle ADC < \frac{\pi}{2}$. Le bisettrici interne di $\angle ABC$ e $\angle ADC$ incontrano $AC$ in $E$ e $F$ rispettivamente e si intersecano in $P$. Sia $M$ il punto medio di $AC$ e sia $\omega$ la circonferenza circoscritta a $BPD$. I segmenti $BM$ e $DM$ intersecano $\omega$ nuovamente in $X$ e $Y$ rispettivamente. Detta $Q$ l'intersezione di $XE$ e $YF$ mostrare che $PQ \perp AC$.

G8. Sia $ABC$ un triangolo ottusangolo e siano $D, E, F$ i punti medi dei lati $BC, CA, AB$. Supponiamo che le circonferenze circoscritte ad $ABC$ e $DEF$ si incontrino in due punti $X, Y$. Sia $P$ l'intersezione delle rette $EF$ e $DX$, $Q$ l'intersezione di $DF$ ed $EX$ e $R$ l'intersezione di $DE$ e $FX$. Mostrare che i triangoli $PQR$ e $ABC$ sono simili.

# Teoria dei numeri

## Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

N1. Sia $k$ un intero positivo e sia $n = (2^k)!$. Denotiamo con $\sigma(n)$ la somma di tutti i divisori positivi di $n$. Dimostrare che $\sigma(n)$ ha almeno un fattore primo maggiore di $2^k$.

N2. Dimostrare che per ogni intero positivo $n$ esiste un intero $m$ divisibile per $5^n$ che contiene esclusivamennte cifre decimali dispari.

N3. Determinare tutti gli interi positivi $n$ per cui esistono numeri primi $p, q$ tali che

$$n = p(p^2 - p - 1) = q(2q + 3).$$

N4. Dimostrare che per ogni intero positivo $n$ esistono un polinomio di terzo grado $p(x)$ e degli interi distinti $a_1, \ldots, a_n$ tali che, per ogni $i$ con $1 \leq i \leq n$, tutte le radici dell'equazione $p(x) + a_i = 0$ sono dei numeri interi.

## Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

N5. Determinare il massimo valore di $\frac{n}{m}$ fra tutte le terne di interi positivi $(m, n, k)$ che soddisfano la disuguaglianza

$$|m^k - n!| \le n.$$

N6. Denotiamo con $c(n)$ la somma delle cifre in base 10 di $n$. Sia $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + c(a_n)$. Si dimostri che l'insieme dei primi che dividono qualche $a_n$ è infinito.

N7. Sia $n$ un numero intero positivo e sia $m > n^{n-1}$.

Dimostrare che esistono dei numeri primi *distinti* $p_1, \ldots, p_n$ tali che $p_k | (m+k)$ per ogni $k = 1, \ldots, n$.

N8. Sia $p(x) = x^3 + x$. Dimostrare che esistono infiniti primi $q$ per cui l'insieme $\{p(n) \bmod q \mid n \in \mathbb{N}\}$ ha cardinalità maggiore di $\frac{q}{2}$.

# Team(s) Selection Test

A1. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(a^2) - f(b^2) \leq (f(a) + b)(a - f(b))$$

per ogni coppia di numeri reali $a$ e $b$.

A2.

(a) Determinare tutte le terne $(a, b, n)$ di interi positivi con $n \geq 2$ tali che $(n^{a+b} - 1)$ è multiplo di $(n^a + n^b + 1)$.

(b) Determinare tutte le terne $(a, b, n)$ di interi positivi con $n \geq 2$ tali che $(n^{a+b} - 1)$ è multiplo di $(n^a + 5n^b + 1)$.

A3. Sia $ABC$ un triangolo con $AB = AC \neq BC$ e sia $I$ il suo incentro. La retta $BI$ interseca $AC$ in $D$. La retta passante per $D$ e perpendicolare ad $AC$ interseca $AI$ in $E$. Sia $J$ il simmetrico di $I$ rispetto alla retta $AC$.

Dimostrare che la circonferenza circoscritta al triangolo $BED$ passa per $J$.

B1. Sia $\mathbb{Z}_+$ l'insieme degli interi positivi. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ tali che il numero

$$xf(x) + [f(y)]^2 + 2xf(y)$$

è un quadrato perfetto per tutti gli interi positivi $x$ e $y$.

B2. Sia $n \geq 5$ un intero relativamente primo con 6. Coloriamo i vertici di un $n$-agono regolare con tre colori, in maniera tale che ci sia un numero dispari di vertici di ogni colore.

Dimostrare che esiste un triangolo isoscele i cui vertici sono di tre colori diversi.

B3. Determinare tutti i numeri reali positivi $\alpha$ per cui esiste una successione *strettamente crescente* $x_n$ di numeri *interi positivi* tale che

$$x_{2n} + x_{2n-1} = \alpha x_n$$

per ogni intero positivo $n$.

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.