Algebra

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

A1. Determinare tutti i polinomi $p(x), q(x)$ a coefficienti reali, monici e con lo stesso grado tale che

$$[p(x)]^2 - p(x^2) = q(x)$$

A2. Sia $n \geq 4$ un intero positivo. Siano a_i e b_i reali non negativi $(i = 1, 2, \cdots, n)$ tali che $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots b_n > 0$.

Trovare il massimo di

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i + b_i)}{\sum_{i=1}^{n} b_i(a_i + b_i)}$$

A3. Sia $g(x)$ un polinomio di grado almeno 2 a coefficienti reali e postivi. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tali che

$$[f(f(x) + g(x) + 2y) = f(x) + g(x) + 2f(y)$$

vale per ogni $x, y \in \mathbb{R}^+$

A4. Siano a, b, c reali positivi. Dimostrare che

$$\sum_{cyc} \frac{ab^2}{a^2 + 2b^2 + c^2} \leq \frac{a + b + c}{4}$$

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

A5. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha che

$$f(f(y) + x^2 + 1) + 2x = y + (f(x+1))^2$$

A6. Trovare tutti i polinomi $p(x), q(x)$ a coefficienti reali tali che

$$[p(x)]^3 - [q(x)]^2$$

sia una funzione lineare ma non costante.

A7. Siano a, b, c reali positivi. Dimostrare che

$$\sum_{cyc} \sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}} \leq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

A8. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ si ha che

$$f(f(x) + f(y) + f(z)) = f(f(x) - f(y)) + f(2xy + f(z)) + 2f(xz - yz)$$

Combinatoria

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

C1. Nel piano ci sono 2018 punti rossi. Un punto del piano è detto *noioso* se è il punto medio di una coppia di punti rossi. Quanti sono al minimo i punti noiosi?

C2. Una circonferenza di lunghezza 999 è suddivisa da punti equispaziati in archi di lunghezza 1. Sia ora d un intero positivo. Su questa circonferenza vengono posizionati d archi di lunghezze $1, \ldots, d$ in modo che ciascuno abbia per estremi due di questi punti. Si nota che, comunque presi 2 di questi archi, non succede mai che uno contenga l'altro. Quanto vale al massimo d?

C3. Ci sono 100 nani, i cui pesi sono $1, \ldots, 100$ kg, che vogliono attraversare un fiume. I nani hanno a disposizione una piccola barca che può trasportare solo 100 kg per volta senza affondare. Per ogni viaggio della barca viene scelto un sottoinsieme non vuoto dei nani da quella parte della sponda da far salire sulla barca e uno di questi viene scelto come *vogatore* per quel viaggio. Dato che i viaggi al ritorno sono contro corrente, nessun nano riesce a sostenere l'incarico di vogatore per più di un viaggio di ritorno. È possibile che tutti i nani raggiungano l'altra parte del fiume?

C4. Sulla lavagna è disegnato un albero con n vertici che possono essere colorati con uno tra 4 colori. Alberto e Barbara colorano i vertici a turno (iniziando da Alberto) rispettando la condizione che nessun arco connetta vertici delle stesso colore. Il gioco termina quando non ci sono mosse possibili e vince Alberto se tutti i vertici sono stati colorati, Barbara altrimenti. Chi ha una strategia vincente?

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

C5. Sono fissati 2017 interi positivi $a_1, \dots, a_{2017}$ non necessariamente distinti. Alberto ha a disposizione 2017 scatoloni e una quantità arbitrariamente grande di sassolini. Inizia dunque il seguente solitario. Ad ogni mossa riordina gli scatoloni e aggiunge a_i sassolini a quello in posizione i-esima per ogni $i = 1, \dots, 2017$. Alberto vince se riesce ad ottenere lo stesso numero di sassolini in tutti gli scatoloni dopo un numero positivo di mosse. È possibile scegliere $a_1, \dots, a_{2017}$ in modo che Alberto possa vincere in 43 mosse, ma non in meno?

C6. Sia n un numero intero positivo. In una tabella $n \times n$ tutte le caselle sono colorate e in tutto si contano k colori diversi. Si osserva anche che per ogni riga r e ogni coppia $i < j$ di colonne tali che le caselle (r, i) e (r, j) hanno lo stesso colore $\mathcal{C}$, in nessuna casella sopra (r, i), ossia (r', i) con $r' < r$, compare il colore $\mathcal{C}$. Determinare il minimo k possibile.

C7. In una tabella 100×100 tutte le caselle sono colorate o di bianco o di nero. Si sa che il bordo è tutto nero e nessun quadrato 2×2 è monocromatico. Dimostrare che esiste un quadrato 2×2 colorato a scacchiera.

C8. A un quiz televisivo partecipano un campione in carica e $n > 1$ sfidanti. Il quiz è composto da molte domande e il campione ha il privilegio di rispondere dopo aver sentito le risposte degli altri. Al termine di ogni turno si assegnano 2 punti a chi ha dato la risposta giusta; per una risposta sbagliata, gli sfidanti prendono 0 punti mentre il campione 1. Supponiamo che in un momento il campione sia in vantaggio di almeno $2^{n-2} + 1$ punti su ciascuno degli altri; dimostrare che ha una strategia che gli consente di rimanere in vantaggio su tutti gli sfidanti a fine partita.

Geometria

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

G1. Sia ABC un triangolo, e siano D, E ed F i piedi delle perpendicolari da A a BC, da B a CA e da C ad AB rispettivamente. Siano P, Q, R ed S i piedi delle perpendicolari da D a BA, BE, CF e CA rispettivamente.

Mostrare che P, Q, R ed S sono allineati.

G2. Sia ABC un triangolo, e siano BE e CF due altezze.La bisettrice interna dell'angolo $\angle BAC$ interseca EF e BC in M e N rispettivamente. Sia P l'intersezione tra la perpendicolare ad EF per M e quella a BC per N.

Dimostrare che AP passa per il punto medio di BC.

G3. Siano ω_A, ω_B e ω_C tre circonferenze a due a due tangenti esternamente. Sia A_1 il punto di tangenza tra ω_B e ω_C e siano B_1 e C_1 definiti ciclicamente. Sia r_A la tangente esterna comune a ω_B e ω_C dalla parte opposta rispetto ad ω_A, e siano r_B ed r_C definite similmente. Sia infine A il punto di intersezione tra r_B ed r_C, e siano B e C definiti similmente.

Dimostrare che AA_1, BB_1 e CC_1 concorrono.

G4. Sia ABC un triangolo e siano P e Q punti scelti sui lati AB e AC rispettivamente in modo che PQ sia parallelo a BC. Sia $O = BQ \cap CP$, e sia A' il simmetrico di A rispetto a BC. Sia ω la circonferenza circoscritta di APQ, e sia S l'unica intersezione del segmento $A'O$ con ω.

Mostrare che la circonferenza circoscritta del triangolo BSC tange ω.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

G5. Denotiamo con X_{YZ} il piede della perpendicolare condotto dal punto X alla retta YZ. Sia $ABCDEF$ un esagono ciclico.

Dimostrare che il triangolo determinato dalle rette $A_{FD}A_{DE}$, $B_{DE}B_{EF}$ e $C_{EF}C_{FD}$ e il triangolo determinato dalle rette $D_{CA}D_{AB}$, $E_{AB}E_{BC}$ e $F_{BC}F_{CA}$ hanno la medesima circonferenza circoscritta.

G6. Siano ω e Ω due circonferenze che si intersecano nei punti A e B. Sia M il punto medio dell'arco AB di ω interno a Ω. Una corda MP di ω interseca Ω in un punto Q interno a ω. Sia r_P la retta tangente a ω in P e r_Q la retta tangente a Ω in Q.

Dimostrare che la circonferenza circoscritta del triangolo formato dalle rette r_P, r_Q e AB tange Ω.

G7. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico, e siano $E = AC \cap BD$, $F = AB \cap CD$ e $G = BC \cap DA$. Supponiamo che la circonferenza circoscritta al triangolo ABE intersechi CB in B e P, e che la circonferenza circoscritta del triangolo ADE intersechi CD in D e Q, con C, B, P, G e C, Q, D, F allineati in questo ordine. Sia infine $M = FP \cap GQ$.

Dimostrare che $\angle MAC = \frac{\pi}{2}$.

G8. Sia P un punto interno al lato AB di un quadrilatero convesso $ABCD$. Sia ω la circonferenza inscritta al triangolo CPD e I il suo incentro. Supponiamo che ω sia tangente alle circonferenze inscritte dei triangoli APD e BPC nei punti K ed L rispettivamente. Sia $E = AC \cap BD$ e $F = AK \cap BL$.

Dimostrare che E, F, I sono allineati.

Teoria dei numeri

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

N1. Supponiamo che $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$ siano interi positivi tali che il prodotto

$$(a_1^{2017} + a_2)(a_2^{2017} + a_3) \cdots (a_{2017}^{2017} + a_1)$$

sia uguale a p^k , dove p è un numero primo e $k \geq 1$ è un intero. Determinare i valori di p e di k per cui questo è possibile.

N2. Dato un naturale n, si costruiscano le sequenze a_i, b_i nel seguente modo. Si ponga $a_0 = 1, b_0 = n$ e poi

$$(a_i, b_i) = \begin{cases} (2a_{i-1} + 1, b_{i-1} - a_{i-1} - 1) & \text{se } a_{i-1} < b_{i-1}, \\ (a_{i-1} - b_{i-1} - 1, 2b_{i-1} + 1) & \text{se } a_{i-1} > b_{i-1}, \\ (a_{i-1}, b_{i-1}) & \text{se } a_{i-1} = b_{i-1}. \end{cases}$$

Sapendo che $a_k = b_k$ per qualche indice, mostrare che $n + 3$ è una potenza di 2.

N3. Siano $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Le successioni $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ sono definite da

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} - 3u_{n-2} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_0 = a, v_1 = b, v_2 = c \\ v_n = v_{n-1} - 3v_{n-2} + 27v_{n-3} \quad n \geq 3 \end{cases}$$

Sappiamo che esiste un intero positivo N tale che, se $n > N$, si ha $u_n \mid v_n$. Dimostrare che $3a = 2b + c.$.

N4. Trovare tutte le coppie di interi non negativi x, y tali che $x^4 - x^2y^2 + y^4 + 2x^3y - 2xy^3 = 1$.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

N5. Sia p un primo dispari. Dimostrare che $\left\lfloor(\sqrt{5}+2)^p - 2^{p+1}\right\rfloor$ è divisibile per $20p$.

N6. Siano f, g due polinomi a coefficienti interi, entrambi con il coefficiente di testa positivo. Supponiamo che $\deg f$ sia dispari, e che gli insiemi $\{f(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ e $\{g(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ siano gli stessi. Mostrare che esiste un k intero per cui $g(x) = f(x+k)$.

N7. Determinare per quali numeri interi $k \geq 2$ la successione dei coefficienti binomiali $\binom{2n}{n} \pmod{k}$ è definitivamente periodica.

N8. Dimostrare che per ogni intero non negativo n il numero $7^{7^n} + 1$ è prodotto di almeno $2n+3$ fattori primi (non necessariamente distinti).

Team Selection Test

Primo giorno

A1. Le lunghezze dei lati di un rettangolo R sono interi positivi dispari. Il rettangolo è suddiviso in rettangolini più piccoli, tutti con i lati di lunghezza intera.

Dimostrare che esiste almeno un rettangolino tale che le distanze dei suoi lati dai corrispondenti lati di R sono tutte pari oppure tutte dispari.

A2. Una successione $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ di numeri reali soddisfa la relazione

$$a_n = -\max\{a_i + a_j : i + j = n\}$$

per ogni $n \geq 2018$.

Dimostrare che la successione è limitata, cioè esiste un numero reale M tale che $|a_n| \leq M$ per ogni intero positivo n.

A3. Un numero razionale si dice *finito* se la sua espressione decimale ha un numero finito di cifre non nulle. Per ogni intero positivo m, indichiamo con $S(m)$ l'insieme degli interi positivi k per cui esiste $c \in \{1, 2, \ldots, 2018\}$ tale che

$$k = \min \left\{ i \geq 1 : \frac{10^i - 1}{c \cdot m} \text{ è un razionale finito} \right\}.$$

Determinare il massimo numero di elementi di $S(m)$ al variare di m tra tutti gli interi positivi.

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

Team Selection Test

Secondo giorno

B1. Sia p un numero primo. Alberto e Barbara giocano costruendo un numero di p cifre, che eventualmente può anche avere una o più cifre 0 a sinistra, nel seguente modo. Ad ogni turno, il giocatore a cui tocca la mossa sceglie una delle p posizioni all'interno del numero, purché ovviamente quella posizione non sia già stata scelta precedentemente da lui o dall'altro giocatore, e decide quale cifra mettere in quella posizione (le cifre vanno, come sempre, da 0 a 9). La prima scelta tocca ad Alberto.

Alberto vince se il numero finale è divisibile per p, altrimenti vice Barbara.

Dimostrare che Alberto ha una strategia vincente.

B2. Sia ABC un triangolo. L'ex-cerchio ω opposto ad A è tangente al lato BC in D, alla retta AC in E, ed alla retta AB in F. La circonferenza circoscritta al triangolo AEF interseca la retta BC in P e Q. Sia M il punto medio di AD.

Dimostrare che la circonferenza circoscritta al triangolo MPQ è tangente ad ω.

B3. Sia S un insieme finito, e sia $\mathcal{F}$ l'insieme di tutte le funzioni da S in S. Sia f un elemento di $\mathcal{F}$, e sia $T = f(S) = \{f(x) : x \in S\}$ la sua immagine.

Supponiamo che per ogni $g \in \mathcal{F}$, con $g \neq f$, esista un elemento $s \in S$ tale che

$$f(g(f(s))) \neq g(f(g(s))).$$

Dimostrare che per ogni $t \in T$ esiste $x \in T$ tale che $f(x) = t$.

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.