# Algebra

## Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

A1. Sia $(a_n)_{n=1,2,\dots}$ una sequenza limitata che soddisfa

$$a_n < \sum_{k=n}^{2n+2018} \frac{a_k}{k+1} + \frac{1}{2n+2019}, \quad \forall n \geq 1.$$

Dimostra che $a_n < 1/n$ per ogni $n$.

A2. Siano $a, b, c$ numeri reali non negativi tali che $a + b + c = 2$. Dimostra che

$$\sqrt{\frac{a+b}{2} - ab} + \sqrt{\frac{b+c}{2} - bc} + \sqrt{\frac{c+a}{2} - ca} \geq \sqrt{2}.$$

A3. Sia $\mathbb{R}^+$ l'insieme dei reali (strettamente) positivi. Determinare se esiste una funzione $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tale che

$$f(x+y) \geq y(f(f(x)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

A4. Siano $a_1, \dots, a_n$ e $b_1, \dots, b_n$ interi. Dimostra che

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (|a_i - a_j| + |b_i - b_j|) \leq \sum_{i,j=1}^{n} |a_i - b_j|$$

e trova i casi di uguaglianza.

## Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

A5. Siano $a, b, c$ reali positivi. Dimostrare che

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\geq\frac{3}{5}.$$

A6. Siano $p$ e $q$ interi con $q > 0$. Mostrare che esiste un intervallo $I$ di lunghezza $1/q$ e un polinomio $f$ a coefficienti interi tale che per ogni $x \in I$ si ha che

$$\left|f(x)-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}.$$

A7. Sia $c$ un intero positivo, e $(x_n)$ la successione data da $x_1 = c$ e

$$x_k = x_{k-1}+1+\left\lfloor\frac{2x_{k-1}-(k+2)}{k}\right\rfloor,\quad \forall k>1.$$

Trova una formula generale per $x_n$ (in funzione di $n$ e di $c$, non per ricorrenza).

A8. Determina tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $f(1) \geq 0$ e

$$f(x)-f(y)\geq(x-y)f(x-y),\quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

# Combinatoria

## Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

C1. I vertici di un 99-agono regolare sono inizialmente tutti vuoti. Alberto e Barbara ripongono un cioccolatino di un gusto qualsiasi, alternativamente, sopra un vertice vuoto adiacente ad uno non vuoto, se ce n'è uno. Il gioco termina quando tutti i vertici sono coperti da un cioccolatino. Barbara vince se allora esiste un triangolo equilatero i cui vertici hanno cioccolatini dello stesso gusto. Dire se Barbara ha una strategia vincente.

C2. Una coppia di interi $m, n$ è detta *cioccolatosa* se $m > n$ e $m$ è somma di alcuni divisori positivi distinti di $n$. Dimostrare che esiste un insieme $S \subset \mathbb{Z}_{>0}$ con 2019 elementi tale che ogni coppia di interi in $S$ è cioccolatosa.

C3. Si ha a disposizione una quantità arbitraria di tavolette di cioccolato con un numero intero di quadretti tra 1 e 2019. Vengono quindi formati $n$ sacchetti, ciascuno dei quali contiene almeno 2 tavolette. Per ogni coppia di sacchetti $(s_1, s_2)$, il numero totale di quadretti in $s_1$ è diverso da quello di $s_2$; inoltre, se $s_1$ ne ha più di $s_2$, allora, se si togliesse la tavoletta più grande e la più piccola da $s_1$ e da $s_2$, $s_1$ avrebbe in totale meno quadretti di $s_2$. Quanto vale al massimo $n$?

C4. Ad una festa sono invitati 100 bambini e ciascuna coppia di amici porta un cioccolatino in regalo al festeggiato. Risulta che, qualunque bambino si tolga, gli altri 99 si possono dividere in 33 terne in cui ciascuno è amico degli altri due. Quanti cioccolatini riceve il festeggiato al minimo?

## Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

C5. Alberto e Barbara giocano alla lavagna. Ad ogni turno un giocatore scrive un numero intero $1 \leq n \leq 2018$ che non sia già presente. Il gioco termina non appena vengono scritti 3 numeri in progressione aritmetica con la sconfitta del giocatore che ha scritto l'ultimo numero. Chi ha una strategia vincente e, dunque, si merita un cioccolatino?

C6. Ad uno stage di matematica alcune coppie di stagisti si scambiano un cioccolatino. Una 25-cricca è un insieme di 25 stagisti tali che ogni coppia al suo interno si è scambiata un cioccolatino. Ogni stagista appartiene ad almeno una 25-cricca, ma ciò non sarebbe vero se venisse a mancare uno scambio di cioccolatini qualsiasi. Una 25-cricca è detta *chiusa* se almeno un suo membro non ha scambiato cioccolatini al di fuori di questa cricca. Dimostrare che ogni coppia che si è scambiata cioccolatini appartiene ad una 25-cricca chiusa.

C7. Su un grafo bipartito connesso ci sono due cioccolatini, uno fondente e uno al latte, inizialmente da due parti diverse. Il primo giocatore muove quello fondente lungo un arco, il secondo quello al latte lungo un arco, a turno, senza poter mai mettere la pedina dove c'è l'altra e senza mai poter riprodurre una configurazione già ottenuta. È vero che per ogni grafo e ogni posizione iniziale il secondo giocatore ha sempre una strategia vincente?

C8. Su ogni faccia di un cioccolatino a forma di icosaedro regolare con spigoli di lunghezza 1 vive una formica, che si muove in senso antiorario lungo i 3 lati della faccia con velocità almeno 1 in ogni istante. È vietato che due formiche si incontrino in un punto diverso da un vertice, e che 5 formiche si trovino nello stesso vertice in uno stesso momento. Esiste una strategia per far muovere le formiche per sempre?

# Geometria

## Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

G1. Sia $ABC$ un triangolo acutangolo isoscele con $AB = AC$ e sia $O$ il suo circocentro. Le rette $BO$ e $CO$ intersecano $AC$ e $AB$ rispettivamente in $B'$ e $C'$.

Mostrare che la retta $l$ parallela ad $AC$ e passante per $C'$ è tangente alla circonferenza circoscritta al triangolo $B'OC$.

G2. Sia $ABC$ un triangolo acutangolo inscritto in una circonferenza $\gamma$. Sia $D$ un punto appartenente all'arco $BC$ di $\gamma$ che non contiene $A$. Definiamo $E$ e $M$ come le intersezioni della bisettrice uscente da $B$ rispettivamente con $AD$ e $\gamma$. Sia $\omega$ la circonferenza tangente ad $AD$ in $E$ e passante per $B$ e sia $X$ la seconda intersezione, diversa da $B$, di $\gamma$ e $\omega$, e $Y$ la seconda intersezione, diversa da $B$, di $\omega$ e $BC$.

Mostrare che $XY$, $AE$ e la parallela a $EY$ passante per $M$ concorrono.

G3. Sia $ABCDEF$ un esagono inscritto in una circonferenza e assumiamo che i lati soddisfino la proprietà $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$. Sia $B_1$ il simmetrico di $B$ rispetto alla retta $AC$, $D_1$ il simmetrico di $D$ rispetto alla retta $CE$ e $F_1$ il simmetrico di $F$ rispetto alla retta $AE$.

Mostrare che il triangolo $B_1D_1F_1$ è simile al triangolo $BDF$.

G4. Sia $ABC$ un triangolo acutangolo non isoscele. Siano $D$, $E$ ed $F$ rispettivamente i punti medi di $BC$, $AC$ e $AB$. Siano $\gamma$ e $\omega$ rispettivamente la circonferenza circoscritta e il cerchio dei nove punti del triangolo $ABC$ e siano $O$ e $O'$ i loro rispettivi centri. Sia $P$ un punto all'interno del triangolo $DEF$. I prolungamenti dei segmenti $DP$, $EP$ ed $FP$ intersecano $\omega$ nuovamente in $D'$, $E'$ e $F'$ rispettivamente. Si prenda $A'$ tale che $D'$ sia il punto medio di $AA'$ e definiamo $B', C'$ analogamente.

a) Mostrare che se $PO = PO'$ allora $O$ appartiene alla circonferenza circoscritta al triangolo $A'B'C'$.

b) Sia $X$ il simmetrico di $A'$ rispetto ad $OD$ e definiamo $Y$ e $Z$ analogamente. Sia $H$ l'ortocentro di $ABC$ e chiamiamo $M$, $N$ e $L$ le intersezioni di $XH$, $YH$ e $ZH$ rispettivamente con $BC$, $AC$ ed $AB$.

Mostrare che $M, N, L$ sono allineati.

## Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

G5. Siano $\omega_1$ e $\omega_2$ due circonferenze di centro $O_1$ e $O_2$ che si intersecano nei punti $A$ e $B$. La retta $O_1A$ interseca nuovamente la circonferenza $\omega_2$ in $C$. La retta $O_2A$ interseca nuovamente la circonferenza $\omega_1$ in $D$. La retta parallela a $O_2A$ passante per $B$ interseca nuovamente la circonferenza $\omega_1$ nel punto $E$. Supponiamo che $DE \parallel O_1A$.

Mostrare che $DC \perp CO_2$.

G6. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico inscritto nella circonferenza $\Gamma$ e sia $M = AC \cap BD$ l'intersezione delle diagonali. $\omega$ è la circonferenza tangente ai segmenti $MA$ e $MD$ in $P$ e $Q$ rispettivamente e in $X$ a $\Gamma$. Dimostrare che $X$ appartiene all'asse radicale delle circonferenze circoscritte ai triangoli $\triangle ACQ$ e $\triangle BDP$.

G7. Siano $I$ l'incentro del triangolo $ABC$ e $\gamma$ il suo incerchio. I punti di tangenza di $\gamma$ con $AB$ e $AC$ sono rispettivamente $D$ ed $E$. Definiamo $F \doteq BI \cap AC$, $G \doteq CI \cap AB$, $M \doteq DE \cap BI$, $N \doteq DE \cap CI$, $P \doteq DE \cap FG$, $Q \doteq BC \cap IP$.

Mostrare che $BC = 2MN$ se e solo se $IQ = 2IP$.

G8. Sia $ABC$ un triangolo acutangolo inscritto in una circonferenza $\omega$ di centro $O$. Sia $P$ un punto generico su $\omega$ distinto dai vertici $A$, $B$, $C$ e dai loro simmetrici rispetto ad $O$. Siano $O_A$, $O_B$ e $O_C$ rispettivamente i centri delle circonferenze circoscritte ai triangoli $AOP$, $BOP$ e $COP$ e chiamiamo $l_A$, $l_B$ e $l_C$ rispettivamente le perpendicolari a $BC$, $CA$ e $AB$ condotte per $O_A$, $O_B$ e $O_C$.

Mostrare che la retta $OP$ tange la circonferenza circoscritta al triangolo formato dalle rette $l_A$, $l_B$ e $l_C$.

# Teoria dei numeri

## Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

N1. Se $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ è la fattorizzazione di $n$ come prodotto di numeri primi distinti, denotiamo con $\Omega(n) = a_1 + \cdots + a_k$ la somma degli esponenti della sua fattorizzazione.

Dimostrare che esistono 2019 interi positivi consecutivi tali che esattamente 1000 di essi hanno la proprietà $\Omega(n) < 11$.

N2. Sia $p$ un numero primo e siano $u, v$ numeri interi distinti $p^2 = \frac{u^2+v^2}{2}$.

Dimostrare che esiste $x \in \mathbb{Z}$ take che $2p - u - v = x^2$ oppure $2p - u - v = 2x^2$.

N3. Sia $a_n$ la prima cifra decimale di $2^n$. Il numero $0, a_1 a_2 \ldots$ è razionale?

N4. Per quali interi positivi $n$ esistono $2n$ interi positivi distinti $a_1, a_2 \ldots, a_n$, $b_1, b_2 \ldots, b_n$ tali che

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

e

$$a_1 a_2 \cdots a_n = b_1 b_2 \cdots b_n ?$$

## Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

N5. Si dimostri che, per $n > 1$, $2^n + 1$ è primo se e solo se divide $3^{2^{n-1}} + 1$.

N6. Sia $p$ un numero primo. Si dimostri che il numero di residui quadratici modulo $p$ che appartengano all'intervallo $[0, \frac{p}{2})$ è maggiore di $p/12$.

N7. Sia $P(x) = a_d x^d + \cdots + a_2 x^2 + a_0$ un polinomio a coefficienti interi positivi non costante. Consideriamo la successione definita da $b_1 = a_0$ e $b_{n+1} = P(b_n)$.

Dimostrare che per ogni $n \geq 2$ esiste un primo $p \mid b_n$, ma $p \nmid b_1 \cdots b_{n-1}$.

N8. Siano $M, k$ interi positivi tali che $k - 1$ non è squarefree. Dimostrare che esiste un $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\lfloor \alpha \cdot k^n \rfloor$ sia coprimo con $M$ per ogni intero $n \geq 1$.

# Team Selection Test

## Primo giorno

A1. Sia $ABC$ un triangolo acutangolo, e sia $D$ il piede dell'altezza uscente da $A$. La circonferenza con centro in $A$ e passante per $D$ interseca la circonferenza circoscritta ad $ABC$ in due punti $X$ e $Y$, con $X$ che sta dalla stessa parte di $B$ rispetto alla retta $AD$.

Dimostrare che $\angle BXD = \angle CYD$.

A2. Sia $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ una successione di interi positivi con la proprietà che, per ogni intero $n \geq 1$, l'elemento $a_n$ è il più piccolo intero positivo tale che $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ è multiplo di $n$.

Dimostrare che esiste un intero positivo $m$ tale che $a_n = a_m$ per ogni $n \geq m$.

A3. Consideriamo la successione $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ definita da

$$a_n = 2^n + 2^{\lfloor n/2 \rfloor} \qquad \forall n \geq 0.$$

(a) Dimostrare che esistono infiniti termini della successione che si possono scrivere come somma di due o più termini distinti della successione stessa.

(b) Dimostrare che esistono infiniti termini della successione che non si possono scrivere come somma di due o più termini distinti della successione stessa.

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

# Team Selection Test

## Secondo giorno

B1. Determinare tutte le coppie $(a, b)$ di interi positivi con questa proprietà: esiste un intero positivo $n$ tale che $na$ ed $nb$ hanno lo stesso numero di divisori.

B2. Sia $ABC$ un triangolo con $AB = AC$, e sia $M$ il punto medio del lato $BC$. Sia $P$ un punto tale che la retta $PA$ è parallela alla retta $BC$, e vale la relazione $PB < PC$. Siano $X$ un punto della retta $PB$ e $Y$ un punto della retta $PC$ tali che $B$ sta sul segmento $PX$, $C$ sta sul segmento $PY$, e $\angle PXM = \angle PYM$.

Dimostrare che il quadrilatero $APXY$ è ciclico.

B3. Determinare il più grande intero $k$ con questa proprietà. Comunque si riempiano le caselle di una tabella $5 \times 5$ usando esattamente una volta tutti numeri da 1 a 25, esiste sempre un quadrato $2 \times 2$ costituito da caselle adiacenti della tabella la somma dei cui elementi è maggiore o uguale di $k$.

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.