Algebra

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

A1. Siano x, y, z reali non negativi distinti. Dimostrare che

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\geq\frac{4}{xy+yz+zx}$$

e trovare i casi di uguaglianza.

A2. Trovare tutte le funzioni $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tale che per ogni $x, y\in\mathbb{R}$

$$f\left(xf\left(y\right)-f\left(x\right)-y\right)=yf\left(x\right)-f\left(y\right)-x$$

A3. Sia n un intero positivo. Per j intero positivo e r reale positivo, definiamo $f_j(r)$ e $g_j(r)$ come

$$f_j(r)=\min(jr,n)+\min\left(\frac{j}{r},n\right),\ \text{ e } g_j(r)=\min(\lceil jr\rceil,n)+\min\left(\left\lceil\frac{j}{r}\right\rceil,n\right),$$

dove $\lceil x\rceil$ indica il più piccolo intero maggiore o uguale a x. Dimostrare che

$$\sum_{j=1}^{n}f_j(r)\leq n^2+n\leq\sum_{j=1}^{n}g_j(r)$$

per tutti i reali positivi r.

A4. Sia $n\geq 1$ un intero e siano $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ $n+2$ numeri reali non negativi che soddisfano $x_ix_{i+1}-x_{i-1}^2\geq 1$ per ogni $i=1,2,\dots,n$. Dimostrare che

$$x_0+x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}>\left(\frac{2n}{3}\right)^{3/2}.$$

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

A5. Sia $n \geq 3$ un intero. Siano $f(x)$ e $g(x)$ polinomi a coefficienti reali tali che i punti $(f(1), g(1)), (f(2), g(2)), \ldots, (f(n), g(n))$ sul piano cartesiano sono i vertici di un n-agono regolare in senso antiorario. Dimostrare che almeno un polinomio tra $f(x)$ e $g(x)$ ha grado maggiore o uguale di $n-1$.

A6. Definiamo *buona* ogni sequenza di interi positivi $b_1, b_2, \ldots$ che soddisfa

$$1 = \frac{b_1}{1^2} > \frac{b_2}{2^2} > \frac{b_3}{3^2} > \frac{b_4}{4^2} > \cdots$$

e sia r il più grande numero reale che soddisfa $\frac{b_n}{n^2} \geq r$ per ogni intero positivo n. Al variare delle sequenze buone (b_n), quali sono tutti i possibili valori che può assumere r?

A7. Sia $n \geq 2$ un intero e siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numeri reali positivi con somma unitaria. Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1-a_k} (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1})^2 < \frac{1}{3}$$

.

A8. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$(f(a) - f(b))(f(b) - f(c))(f(c) - f(a)) = f(ab^2 + bc^2 + ca^2) - f(a^2b + b^2c + c^2a)$$

Combinatoria

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

C1. È possibile tassellare un quadrato 100×100 usando un egual numero di tessere 1×8 e 2×4?

C2. Un insieme P di punti del piano è detto *quasi-ciclico* se tutti i punti di P tranne al più uno appartengono ad una stessa circonferenza. Supponiamo che un insieme Q contenente esattamente 2022 punti sia tale che ogni sottoinsieme di 5 punti in Q sia *quasi-ciclico*. È vero che Q è *quasi-ciclico*?

C3. Sia $n > 0$ un intero. Lungo una retta camminano n formiche per un tempo indefinito, ciascuna a velocità costante, ma non necessariamente alla stessa, in modo che mai tre o più formiche si trovino nello stesso punto simultaneamente. Se in un istante due formiche si scontrano (cosa che può capitare anche se procedono nello stesso verso), immediatamente cambiano entrambe verso di percorrenza.

(a) È possibile che ci siano un numero infinito di scontri?

(b) Assumendo che esista solo un numero finito di scontri, determinare il massimo numero di questi.

C4. Un grafo è detto *testardo* se, comunque vengano colorati i suoi archi con i colori rosso e blu, si trova sempre un triangolo monocromatico. Un grafo G ha $n > 2021$ vertici ed è testardo. È sempre possibile eliminare $n - 2021$ vertici e ottenere un grafo testardo?

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

C5. Sia $k \geq 0$ un numero intero. Sono date 2^{2^k} monete, esattamente una delle quali è falsa. Si hanno a disposizione anche infiniti cani, esattamente uno dei quali è malato. Un test consiste nello scegliere un insieme di monete e un cane; se è sano, annusandole, abbaierà se e solo se l'insieme di monete scelto contiene quella falsa, altrimenti risponderà casualmente. Mostrare che esiste una strategia consistente in al più $2^k + k + 2$ test che determina con certezza la moneta falsa.

C6. Alberto e Barbara giocano a turno con due pile di monete. Ad ogni mossa, un giocatore può togliere $n > 0$ monete da una o da entrambe le pile. Inizia Alberto e vince chi toglie l'ultima moneta. Sia A l'insieme di tutti gli interi positivi x per cui esiste un intero $0 < y < x$ tale che, se le due pile di monete all'inizio del gioco avessero rispettivamente x e y monete, allora Barbara avrebbe una strategia vincente.

Dimostrare che A è infinito. Se $A = \{x_1 < x_2 < \dots\}$ e $d_i = x_{i+1} - x_i$ per $i = 1, 2, \dots$, dimostrare che la successione d_i non è definitivamente periodica.

C7. Un cacciatore e un coniglio invisibile giocano in una griglia quadrata infinita. Il cacciatore colora dapprima ogni casella con uno fra i finiti colori della sua tavolozza. Il coniglio entra nella griglia in una casella ignota al cacciatore e, a ogni mossa, si muove su una casella adiacente. Ogni volta che entra in una casella (compresa la prima) dichiara al cacciatore il colore di quella casella. Il cacciatore vince se:

- il coniglio entra in una casella già visitata, oppure
- il cacciatore determina con esattezza la casella dove si trovava inizialmente il coniglio.

Determinare se il cacciatore ha una strategia vincente.

C8. Una tabella ha 100 colonne e $N > 0$ righe. In ogni riga sono scritti tutti gli interi fra 1 e 100 in qualche ordine. Comunque considerate due righe i, j della tabella, esiste una colonna c tale che la differenza tra gli elementi della colonna c nelle due righe i, j è almeno 2. Quanto può valere al massimo N?

Geometria

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

G1. In un triangolo ABC, siano D, E, F i punti medi dei lati BC, AC, AB. X è il simmetrico di F rispetto ad AD e Y è il simmetrico di F rispetto a BE.
Dimostrare che le circonferenze circoscritte ai triangoli ADY e BEX sono concentriche.

G2. Sia ABC un triangolo ottuso con $\angle A > \angle B > \angle C$, e sia M il punto medio di BC. Sia D un punto sull'arco AB che non contiene C. Sia ω la circonferenza tangente a BD in D e passante per A. Si supponga che ω intersechi la circonferenza circoscritta al triangolo $\triangle ABM$ nuovamente in E e $\overline{BD} = \overline{BE}$. Sia F la seconda intersezione di EM con ω.
Dimostrare che le rette BD e AE si intersecano sulla retta tangente a ω in F.

G3. Sia $ABCD$ un quadrilatero inscritto in un cerchio Ω. La tangente in D a Ω interseca i raggi BA e BC nei punti E e F rispettivamente. Un punto T è preso dentro ABC in modo che $TE//CD$ e $TF//AD$. Sia $K \neq D$ un punto sul segmento DF tale che $TD = TK$.
Dimostrare che le rette AC, DT, BK concorrono.

G4. Sia ABC un triangolo acuto con circocentro O e circoscritta Ω. Siano D e E due punti sui lati AB e AC rispettivamente e sia l la retta passante per A perpendicolare a DE. l interseca la circoscritta ad ADE in P e Ω in Q. Sia N l'intersezione di OQ e BC, sia S l'intersezione di OP e DE e sia W l'ortocentro del triangolo ASO.
Dimostrare che il quadrilatero $SNOW$ è ciclico.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

G5. Sia ABC un triangolo acuto e PQ un diametro qualunque della sua circonferenza circoscritta tale che P appartenga all'arco minore AB e Q all'arco minore AC. Siano X, Y, Z rispettivamente le proiezioni di P su AB, Q su AC e A su PQ.
Mostrare che il circocentro del triangolo XYZ giace su una circonferenza fissata al variare del diametro PQ.

G6. Sia n un intero positivo, e sia $\mathcal{S}$ l'insieme dei punti (x, y) a coordinate intere tali che $0 \leq x, y < 2n$ (quindi $|\mathcal{S}| = 4n^2$). Sia $\mathcal{F}$ un insieme di n^2 quadrilateri tali che tutti i loro vertici siano in $\mathcal{S}$ e ogni punto di $\mathcal{S}$ sia vertice di esattamente un quadrilatero in $\mathcal{F}$.
Determinare la massima somma possibile delle aree degli n^2 quadrilateri in $\mathcal{F}$.

G7. Sia $\triangle ABC$ un triangolo con incentro I e circonferenza circoscritta Ω. Il punto X, diverso da A appartiene alla circonferenza Ω e soddisfa $AI = XI$. La circonferenza inscritta tange AC e AB rispettivamente nei punti E e F. Siano M_a, M_b e M_c rispettivamente i punti medi dei lati BC, CA e AB. Sia T l'intersezione delle rette M_bF e M_cE. Supponiamo che AT intersechi Ω nuovamente in S.
Dimostrare che il quadrilatero XM_aST è ciclico.

G8. Sia ABC un triangolo e siano ω e Ω_A la sua circonferenza circoscritta e la sua circonferenza excritta tangente a BC, rispettivamente. Siano X, Y le intersezioni di ω e Ω_A e siano P, Q le proiezioni di A sulle rette tangenti a Ω_A in X e Y, rispettivamente. La retta tangente in P alla circonferenza per A, P, X e la retta tangente in Q alla circonferenza per A, Q, Y si intersecano in R.
Dimostrare che $AR \perp BC$.

Teoria dei numeri

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

N1. Si dimostri che esistono infiniti interi positivi n per cui non esiste alcun intero positivo $m < n$ tale che $m^2 + 1 \mid n^2 + 1$.

N2. Si sa che $q = 2129$ e $p = 2q + 1$ sono numeri primi. Si determini il numero di cifre zero del periodo (in base dieci) di $1/p$.

N3. Determinare le soluzioni (p, n) dell'equazione $n^2 = 3p^5 - 24p^2 + 12p + 1$, dove p è un numero primo ed n un intero positivo.

N4. Sia $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ una successione strettamente crescente di interi positivi tale che $a_n \leq n^{3/2}$. Un numero primo q è detto *cososo* se esiste $n \geq 1$ tale che $q \mid a_n$. Siano poi $q_1 < q_2 < q_3 < \cdots$ i numeri primi cososi, presi in ordine crescente. Dimostrare che $q_n \leq 40^n$ per ogni $n \geq 1$.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

N5. Siano m, n due interi positivi tali che $m > n$ e $m \equiv n \pmod{2}$. Mostrare che se $m^2 - n^2 + 1 \mid n^2 - 1$ allora $m^2 - n^2 + 1$ è un quadrato perfetto.

N6. Sia k un intero positivo tale che $p = 6k + 1$ sia primo. Si dimostri che

$$\binom{3k}{k} \not\equiv 1 \pmod{p}.$$

N7. Dimostrare che esiste solo un numero finito di quaterne (a, b, c, n) di numeri interi positivi tali che

$$a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1} = n!$$

N8. Trovare tutti gli interi positivi k per cui esistono un numero irrazionale $\alpha > 1$ e un intero positivo N tali che $\lfloor \alpha^n \rfloor + k$ sia un quadrato perfetto per ogni $n > N$.

Team Selection Test

Primo giorno

A1. Sia n un intero positivo, e sia A un sottoinsieme di $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 5^n\}$ costituito da $4n + 2$ elementi.

Dimostrare che esistono tre elementi a, b, c in A tali che

$$a < b < c \qquad \text{e} \qquad c + 2a > 3b.$$

A2. Sia S un insieme infinito di interi positivi. Supponiamo che esistano quattro elementi a, b, c, d in S, a due a due distinti, tali che $MCD(a, b) \neq MCD(c, d)$.

Dimostrare che esistono tre elementi x, y, z in S, a due a due distinti, tali che

$$MCD(x, y) = MCD(y, z) \neq MCD(z, x).$$

Nota: abbiamo indicato con $MCD(m, n)$ il massimo comun divisore degli interi m ed n.

A3. Sia ABC un triangolo con $AB > AC$, e siano

- I l'incentro,
- D il piede della bisettrice dell'angolo in A,
- M il punto medio della bisettrice AD,
- F la seconda intersezione della retta MB con la circonferenza circoscritta al triangolo BIC.

Dimostrare che AF è perpendicolare a FC.

A4. Determinare tutti gli interi positivi n per cui esiste una coppia (a, b) di interi positivi tali che

- $a^2 + b + 3$ non è divisibile per il cubo di nessun primo,
- vale l'uguaglianza
$$\frac{ab + 3b + 8}{a^2 + b + 3} = n.$$

Modalità di svolgimento della prova: 4 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

Team Selection Test

Secondo giorno

B1. Determinare, per ogni intero positivo n, il minimo di

$$\left\lfloor \frac{a_1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{a_n}{n} \right\rfloor$$

al variare di $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tra tutte le permutazioni di $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Nota: si ricorda che, per ogni numero reale α, si indica con $\lfloor \alpha \rfloor$ la parte intera inferiore di α, definita come il più grande intero minore o uguale ad α.

B2. Sia $ABCD$ un parallelogrammo in cui la diagonale AC è uguale al lato BC. Sia P un punto preso sull'estensione del segmento AB, dalla parte di B. Sia Q la seconda intersezione tra la retta PD e la circonferenza circoscritta al triangolo ACD. Sia R la seconda intersezione tra la retta PC e la circonferenza circoscritta al triangolo APQ.

Dimostrare che le rette AQ, CD e BR concorrono.

B3. Sono dati un numero razionale $r > 1$ e due punti $R \neq N$ su una retta. Stefano gioca ad un solitario che consiste in una successione di mosse. Inizialmente una pedina rossa è sistemata nel punto R, ed una pedina nera è sistemata nel punto N. Ad ogni mossa, Stefano sceglie un numero intero k, non necessariamente positivo, ed una pedina da spostare (l'altra resta ferma). Se la pedina da spostare si trova in quel momento nel punto X, e l'altra pedina si trova in quel momento nel punto Y, allora Stefano muove la pedina da spostare nel punto X' della retta tale che

- X e X' stanno dalla stessa parte rispetto ad Y,
- $YX' = r^k \cdot YX$.

L'obiettivo di Stefano è di collocare la pedina rossa nel punto N.

Determinare tutti i valori di r per cui Stefano può raggiungere il suo obiettivo in al più 2022 mosse.

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.