

Stage Senior Pisa 2001 – Test finale

Problemi a risposta secca

1. Determinare il rappresentante privilegiato di $2003 \cdot 2002 \cdot 2001$ modulo 4.
2. Determinare il rappresentante privilegiato di 3^{2002} modulo 7.
3. Calcolare $(1 + i)^{12}$.
4. Sapendo che x e y sono numeri reali positivi tali che $x + y = 6$, determinare il valore massimo che può assumere il prodotto x^2y .
5. Determinare quanti sono gli anagrammi della parola STAGISTI.
6. Una omotetia manda una circonferenza di raggio 4 in una circonferenza di raggio 6. Determinare l'area dell'immagine di un pentagono di area 4.
7. In un triangolo ABC si ha che $AB = 6$, $AC = 16$ e l'angolo in A misura 60° . Determinare la lunghezza di BC .
8. Ad una scacchiera rettangolare formata da 5×13 quadratini viene tolto uno dei quadratini che stanno sul lato maggiore e sono adiacenti ad uno dei quadratini ai vertici. Determinare il massimo numero di piastrelle 2×1 che è possibile piazzare sulla parte rimasta della scacchiera (in corrispondenza con i quadratini originari) evitando sovrapposizioni.

Problemi dimostrativi

9. Dimostrare che l'equazione

$$3x^2 - 2y^2 = 1998$$

non ha soluzioni intere.

10. (a) Dimostrare che

$$(1 + a + a^2 + a^3)^2 \leq 4(1 + a^2 + a^4 + a^6)$$

per ogni numero reale a .

- (b) Determinare poi se la disuguaglianza

$$(1 + a + a^2 + a^3)^3 \leq 16(1 + a^3 + a^6 + a^9)$$

vale per ogni numero reale a .

11. Due circonferenze sono tangenti esternamente. Sia r una tangente comune, e siano P e Q i due punti di tangenza. Sapendo che il prodotto dei due diametri è 25, si determini la lunghezza di PQ .
12. Dieci donne e cinque uomini si sono disposti a caso in fila indiana. Determinare la probabilità che davanti (esattamente) ad ogni uomo vi sia una donna.