Induzione e Pigeonhole

1. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $(\sqrt{3})^{n^2} \geq n!$.

2. Dimostrare che ogni intero positivo si può scrivere come somma di due o più numeri di Fibonacci distinti.

3. Ad uno stage partecipano 24 ragazzi. Successivamente ogni partecipante decide di scrivere a 12 altri partecipanti.

   Dimostrare che c'è una coppia di ragazzi che si scrivono reciprocamente.

4. Determinare il più piccolo intero n con questa proprietà: comunque si scelgano n interi positivi, tutti aventi solo divisori primi ≤ 30, ne esistono sicuramente almeno due il cui prodotto è un quadrato perfetto.

5. Determinare il più piccolo numero reale positivo a per cui è possibile ricoprire un triangolo equilatero di lato 12 usando 5 triangoli equilateri di lato a.

6. Dimostrare che, dati 28 punti in una sfera di raggio 2, ve ne sono almeno 2 la cui distanza è al più 2.

7. Dato un sottoinsieme non vuoto $A \subseteq \{1, \ldots, 2002\}$ si indichi con P_A il reciproco del prodotto degli elementi di A.

   Determinare la somma di tutti i P_A.

8. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \ldots + \frac{n}{4^n} < \frac{1}{2}.$$

IMO Problems: 1972/1, 1964/4, 1968/6, 1976/5, 1985/4.

Algebra 1

1. Calcolare $(\sqrt{3}+i)^{2002}$.

2. Determinare quante sono le radici 2002-esime di $\sqrt{3}+i$ contenute nel terzo quadrante.

3. Calcolare
$$\cos 15^\circ + \cos 35^\circ + \cos 55^\circ + \ldots + \cos 335^\circ + \cos 355^\circ.$$

4. Fattorizzare sui reali il polinomio
$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

5. Calcolare
$$\sum_{k=1}^{2002} k i^k.$$
Illustrare geometricamente il risultato ottenuto.

6. Sia ω una radice settima non reale di -1. Determinare il coefficiente di x^7 nel polinomio
$$\prod_{k=1}^{2002} (x - \omega^k).$$

7. Sia $P(x)$ un polinomio tale che $P(0) = 2$, $P(1) = 4$, $P(2) = 6$, $P(3) = 56$. Determinare il resto della divisione di $P(x)$ per
$$x(x-1)(x-2)(x-3).$$

8. Determinare i coefficienti di un polinomio monico di quarto grado in cui la somma delle radici vale 1, la somma dei quadrati delle radici vale 2, la somma dei cubi delle radici vale 3, la somma delle quarte potenze delle radici vale 4.

9. Determinare il massimo numero di radici intere che può avere un polinomio $P(x)$ a coefficienti interi tale che $P(0)$ e $P(13)$ sono interi dispari.

10. Un polinomio $P(z)$ a coefficienti complessi ha grado 2002 e ha le radici (complesse) a due a due distinte.

    Dimostrare che esistono numeri complessi $a_1, \ldots, a_{2002}$ tali che, se si definiscono i polinomi $P_n(z)$ mediante la ricorrenza
$$P_1(z) = z - a_1, \qquad P_{n+1}(z) = [P_n(z)]^2 - a_{n+1},$$
    allora $P(z)$ divide $P_{2002}(z)$.

IMO Problems: 1974/6, 1988/4, 1963/5, 1969/2, 1976/2.

Algebra 2

1. Gli n numeri reali positivi $x_1, \ldots, x_n$ hanno media armonica, geometrica, aritmetica, rispettivamente, uguali a 6, 7, 8. Per ogni $i = 1, \ldots, n$ definiamo

$$X_i = \prod_{j \neq i} x_j.$$

Determinare le medie aritmetica, geometrica e armonica degli X_i.

2. Un ciclista ha percorso una strada lunga 10 km. Sapendo che al k-esimo km il ciclista ha tenuto una velocità costante di 2^k (in qualche unità di misura), determinare la velocità media sull'intero percorso. Interpretare il risultato in termini di medie.

3. Le nove cifre $1, 2, \ldots, 9$ sono scritte di seguito a formare un numero N di nove cifre. Determinare il valore massimo e minimo che può assumere la somma dei 7 numeri di tre cifre ottenuti considerando terne di tre cifre consecutive nella rappresentazione decimale di N.

4. Trovare il valore massimo di x^5yz sapendo che x, y, z sono numeri reali positivi tali che $x + y + z = 1$.

5. Siano $x_1, \ldots, x_n$ numeri reali e siano $y_1, \ldots, y_n$ numeri reali. Sapendo che

$$\frac{x_1\sqrt{y_1} + \ldots + x_n\sqrt{y_n}}{n} = 9, \qquad \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n} = 8,$$

determinare il minimo valore possibile per la media quadratica di $x_1, \ldots, x_n$.

6. Determinare la migliore costante C tale che

$$(x - y)(2y - x) \leq Cxy$$

qualunque siano in numeri reali x, y tali che $0 \leq y \leq x \leq 2y$.

7. Determinare per quali valori del parametro a esistono numeri reali positivi x e y tali che

$$a(3x + 2y) = y + \sqrt{2a^2(4x^2 + y^2)} + \sqrt{2a^2x^2 + 2(a-1)^2y^2}.$$

8. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni convesse nell'intervallo $[0, 1]$, con $g(x)$ positiva.

Determinare quali delle seguenti funzioni sono sicuramente convesse nell'intervallo $[0, 1]$:

$$f(x) + g(x), \qquad f^2(x), \qquad f(x) \cdot g(x), \qquad \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad f(g(x)).$$

Determinare come cambia la risposta al punto precedente se si assume che $f(x)$ sia anche positiva e/o crescente.

9. Siano $x_1, \ldots, x_n$ numeri reali positivi tali che $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Dimostrare che
$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$
in almeno tre modi diversi, usando
   - le disuguaglianze di Chebycheff e delle medie;
   - l'identità $x(1-x)^{-1/2} = (1-x)^{-1/2} - (1-x)^{1/2}$ e le medie;
   - le disuguaglianze di convessità.

10. Siano a, b, c numeri reali positivi. Dimostrare che
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$
in almeno tre modi diversi, usando
    - la sostituzione $a+b=x$, $b+c=y$, $c+a=z$;
    - Cauchy Schwarz;
    - le disuguaglianze di convessità.

    Determinare quindi le migliori costanti C_1, C_2 tali che
$$C_1 \leq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \leq C_2.$$

IMO Problems: 1975/1, 1978/5, 1972/4, 1968/3, 1974/5, 1979/5, 1971/1, 1969/6.

Algebra 3

1. Dimostrare che non esistono funzioni $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tali che
$$f(f(n)) = n + 1$$
per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che
$$f(f(x)) = f(x) + 8$$
per ogni x reale, e $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$.

   Determinare il minimo valore possibile per $f(2002)$.

3. Sia a un parametro reale, e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che
$$f(x^2 + axy + y^2) = x^2 + axy + y^2$$
per ogni x e y reali.

   Determinare, in funzione di a, i possibili valori di $f(1)$ e $f(-1)$.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione monotona tale che
$$f(x + f(y)) = f(x) + y$$
per ogni x e y reali.

   Determinare i possibili valori di $f(100)$.

5. Una pulce salta tra i vertici di un tetraedro regolare. Ogni volta che si trova in un vertice sceglie uno dei tre spigoli che partono da quel vertice (tutti hanno la stessa probabilità di essere scelti) e salta verso l'altro estremo di quello spigolo.

   Determinare la probabilità che la pulce si ritrovi al punto di partenza dopo 2002 salti.

6. Una successione è definita per ricorrenza da
$$x_0 = 1, \qquad\qquad x_{n+1} = 6x_n - 2\sum_{i=0}^{n} x_i.$$
   Determinare x_{2002}.

7. Determinare quanti sono gli interi n tali che $2000 \leq n \leq 2010$ e tali che 7 è un divisore della parte intera di
$$\frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{2})^n.$$

8. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tali che

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$$

per ogni x e y razionali.

9. Dato un numero intero a, definiamo la successione per ricorrenza

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \qquad x_0 = a,\ x_1 = 1.$$

Dimostrare che 4091 è un divisore di $x_{4091} - 1$ (si ricorda che 4091 è un numero primo).

10. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(xf(x) + f(y)) = [f(x)]^2 + y$$

per ogni x, y reali.

IMO Problems: 1979/6, 1992/2, 1986/5, 1990/4, 1994/5, 1996/3.

Combinatoria 1

1. Si scelgono a caso 7 interi distinti nell'insieme $\{1, 2, \ldots, 20\}$.

   Determinare la probabilità che il secondo più piccolo sia 5.

2. Determinare quanti sono i divisori positivi di

$$69^5 + 5 \cdot 69^4 + 10 \cdot 69^3 + 10 \cdot 69^2 + 5 \cdot 69 + 1.$$

3. Consideriamo una scacchiera 5×5.

   Determinare quanti sono i cammini che partono dal quadratino in alto a sinistra, arrivano nel quadratino in basso a destra, procedono sempre verso il basso o verso destra, e non passano mai per il quadratino centrale.

4. Al termine della "regular season" di un campionato, le prime 7 classificate si sfidano in incontri di spareggio secondo questa regola. La n.7 incontra la n.6: la perdente ottiene il settimo premio, la vincente sfida la n.5. Dopo questo nuovo incontro, la perdente ottiene il sesto premio e la vincente sfida la n.4, e così via.

   Determinare in quanti modi le sette squadre possono ricevere i sette premi.

5. Un laboratorio ha a disposizione una bilancia a due piatti e n pesi da, rispettivamente, 1, 3, 9, ..., 3^{n-1} grammi, i quali ovviamente possono essere posti indifferentemente su ogni piatto della bilancia.

   Determinare il numero di oggetti di peso diverso che si possono pesare con questa apparecchiatura.

   Determinare come cambia la risposta al punto precedente se i pesi sono potenze di due o potenze di quattro.

6. In un torneo, ogni giocatore incontra una ed una sola volta tutti gli altri giocatori. In ogni incontro, il vincitore guadagna 2 punti, il perdente 0 punti, mentre in caso di pareggio ogni giocatore riceve 1 punto. A torneo concluso risulta che esattamente la metà dei punti totalizzata da ciascun giocatore è stata guadagnata in partite giocate contro i 10 ultimi classificati (in particolare, ciascuno dei 10 giocatori con il punteggio più basso ha guadagnato metà dei suoi punti incontrandosi con gli altri 9 ultimi classificati).

   Determinare il numero di giocatori che hanno partecipato al torneo.

7. Sia F l'insieme di tutte le n-uple $(A_1, \ldots, A_n)$, dove ogni A_i è un sottoinsieme di $\{1, 2, \ldots, 1998\}$.

   Calcolare

$$\sum_{(A_1,\ldots,A_n)\in F} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|, \qquad \sum_{(A_1,\ldots,A_n)\in F} |A_1 \cup \ldots \cup A_n|.$$

8. Calcolare
$$\sum_{k=1}^{100} \left[10\sqrt{k}\right] + \left[\frac{k^2}{100}\right].$$

9. Ad uno stage partecipano n ragazze $G_1, \ldots, G_n$ e $2n-1$ ragazzi $B_1, \ldots, B_{2n-1}$. Per ogni $i = 1, \ldots, n$, la ragazza G_i conosce i ragazzi $B_1, \ldots, B_{2i-1}$ e nessun'altro.

   Dimostrare che il numero di modi di scegliere r coppie ragazzo-ragazza in modo che i componenti di ogni coppia si conoscano è
$$\binom{n}{r} \frac{n!}{(n-r)!}.$$

10. Ad un party prendono parte $12k$ persone. Ciascuna di esse stringe la mano ad esattamente $3k+6$ persone. Si sa che esiste un numero N tale che, per ogni coppia di persone A, B, il numero di invitati che stringe la mano sia ad A sia a B è esattamente N.

    Determinare per quali valori (interi) di k si può realizzare questa situazione.

IMO Problems: 1974/1, 1981/2, 1972/3, 1998/2, 1966/1.

Combinatoria 2

1. In una popolazione il 40% degli individui è obeso, il 30% mangia 1 Kg di cioccolato al giorno e di questi l'80% sono obesi.

   Determinare la probabilità che un obeso mangi almeno 1 Kg di cioccolato al giorno.

2. Determinare per quali n è possibile piastrellare una scacchiera $n \times n$ usando piastrelle a forma di "T" composte da quattro quadratini.

3. Consideriamo una scacchiera 11×11 privata della quarta casella della riga superiore.

   Determinare se è possibile costruire un percorso che visiti una ed una sola volta ogni casella e torni infine al punto di partenza (è possibile solo muoversi tra caselle che abbiano un lato in comune).

4. Il sacchetto A ed il sacchetto B contengono 3 palline nere e 5 bianche, il sacchetto C contiene 5 palline nere e 3 bianche. Si sceglie a caso un sacchetto, e poi da questo sacchetto vengono estratte (sempre a caso) due palline, reimbussolando la pallina tra la prima e la seconda estrazione.

   Sapendo che le due palline estratte sono nere, determinare la probabilità che si sia scelto il sacchetto A.

5. La regione di Matelandia è costituita da un numero finito di città. Per garantire gli spostamenti, sono state costruite delle strade che tuttavia, per motivi di budget, sono strette e a senso unico. In ogni caso, per ogni coppia di città, esiste sempre un tragitto (non necessariamente diretto) che le collega in almeno uno dei due versi.

   Dimostrare che esiste almeno una città dalla quale si può raggiungere qualsiasi altra città, ed esiste almeno una città che può essere raggiunta partendo da ogni altra città.

6. Su un foglio di carta quadrettata si disegna un quadrato di lato 2002. Si anneriscono poi alcuni dei lati dei quadratini interni (pensando così di costruire delle pareti) in modo però che da ogni quadratino si possa raggiungere ogni altro quadratino.

   Determinare il massimo numero di lati che possono essere anneriti.

7. Determinare se esiste una permutazione di $1, 1, 2, 2, \ldots, 2001, 2001, 2002, 2002$ tale che, per ogni k, vi siano esattamente k numeri tra le due ripetizioni di k.

8. Alberto e Barbara tracciano un grafo su di un foglio ed iniziano a giocare al seguente gioco. A turno, iniziando da Alberto, ciascun giocatore effettua una delle seguenti due mosse:

   - cancellare tre segmenti che formano un triangolo;
   - dati tre punti di cui due non collegati, ma collegati al terzo, cancellare i due collegamenti presenti e unire i due punti non collegati.

   Il giocatore che non può fare mosse valide perde la partita.

   Dimostrare che l'esito della partita non dipende da come giocano Alberto e Barbara, e determinare un criterio per stabilire chi vince in funzione della configurazione iniziale.

9. Camillo è andato per un certo periodo a Lipsia, dove vive in un condominio con 7 tedeschi. Ogni condomino ha un posto auto riservato a lui. Camillo, da buon italiano, quando torna a casa parcheggia in un posto a caso; ogni tedesco invece cerca di parcheggiare al proprio posto, e solo se non ci riesce parcheggia pure lui a caso. Un giorno Camillo rientra quando tutti gli altri sono ancora fuori.

   Determinare la probabilità che l'ultimo rientrato abbia potuto parcheggiare al proprio posto.

10. In una tranquilla vallata vivono dodici gnomi, i cui nomi coincidono con i nomi dei mesi: Gennaio, Febbraio, ..., Dicembre. Ogni gnomo abita in una casetta dipinta di azzurro o di rosa.

    Nel mese di gennaio, lo gnomo Gennaio va a trovare tutti i suoi amici. Se nota che la maggioranza stretta dei suoi amici ha la casetta di un colore diverso dalla sua, allora entro la fine del mese egli ridipinge la sua casetta, cambiando il colore per "adeguarsi alla maggioranza degli altri".

    Nel mese di febbraio, tocca allo gnome Febbraio fare visita ai suoi amici ed eventualmente ridipingere la casetta per "adeguarsi alla maggioranza", e così via.

    Questa procedura si ripete di anno in anno. Si dimostri che, da un certo momento in poi, nessuno gnomo avrà più bisogno di ridipingere la sua casetta (si supponga l'amicizia simmetrica, e che ogni gnomo non includa se stesso nella lista dei suoi amici).

IMO Problems: 1986/3, 1996/1.

Geometria 1

1. Calcolare
$$\sum_{n=0^\circ}^{90^\circ} \sin^2 n.$$

2. Dimostrare che, se x non è un multiplo intero di π, allora si ha che
$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx) = \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}.$$

3. In un triangolo si ha che $\gamma = 3\alpha$, $a = 27$ e $c = 48$ (usando le notazioni standard).

   Determinare b.

4. Corde parallele di lunghezza 2, 3, 4 determinano in un cerchio angoli al centro, rispettivamente, di α, β e $\alpha + \beta$ radianti, con $\alpha + \beta < \pi$.

   Determinare il coseno di α.

5. Determinare l'area di un triangolo che ha due mediane ortogonali lunghe rispettivamente 10 e 15.

6. Sia dato un triangolo ABC rettangolo in A. L'altezza condotta da A ha lunghezza 12, mentre la bisettrice condotta da A ha lunghezza 13.

   Determinare la lunghezza della mediana condotta da A.

7. Calcolare
$$\sum_{n=0}^{2002} \tan n \cdot \tan(n+1).$$

8. Sia O il circocentro del triangolo ABC e siano D, E, F, rispettivamente, i punti intercettati sui lati opposti dalle rette AO, BO, CO.

   Dimostrare che
$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{2}{AO}.$$

9. Sia $ABCD$ un quadrilatero tale che un semicerchio con centro nel punto medio di AB e diametro sul segmento AB sia tangente agli altri tre lati BC, CD, DA.

   Dimostrare che
$$AB^2 = 4 \cdot BC \cdot AD.$$

10. Sia dato un triangolo ABC e si fissino i punti A', B', C' sui lati opposti ai vertici A, B, C, rispettivamente, in modo che le rette AA', BB', CC' siano concorrenti in un punto P interno al triangolo. Sia d il diametro del cerchio circoscritto al triangolo ABC, e sia S' l'area del triangolo $A'B'C'$.

    Dimostrare che
$$d \cdot S' = AB' \cdot BC' \cdot CA'.$$

IMO Problems: 1962/4, 1964/3, 1965/5, 1966/4, 1967/4, 1969/2, 1975/5, 1984/4.

Geometria 2

1. Un triangolo ha i vertici in $(1,1)$, $(10,2)$, $(3,4)$. Determinare le coordinate dell'ortocentro, del circocentro, del baricentro e dell'incentro.

2. Calcolare la distanza tra due diagonali sghembe di due facce adiacenti di un cubo di lato unitario.

3. Determinare la lunghezza dell'asse maggiore dell'ellisse che ha fuochi in $(9,20)$ e $(49,55)$ e che è tangente all'asse delle ascisse.

4. Un giardino si estende su un quadrato di 100 metri di lato, orientato secondo i punti cardinali, ed è percorso da due sentieri che seguono un andamento parabolico: il primo passa per i due estremi del lato Nord ed ha il vertice nel punto medio del lato Sud, il secondo passa per i due estremi del lato Est ed ha il vertice nel punto medio del lato Ovest.

   Determinare quanti metri quadri misura l'area del quadrilatero che ha come vertici i quattro punti d'incontro dei due sentieri.

5. Sia P un punto interno alla base AB di un triangolo isoscele ABC. Dimostrare che
$$PC^2 = AC^2 - AP \cdot BP.$$
   Determinare come cambia tale formula se P sta sul prolungamento di AB.

6. Calcolare, usando il formalismo vettoriale, la somma dei quadrati delle mediane di un triangolo di lati a, b, c.

7. Sono dati un quadrilatero ed un punto M.

   Dimostrare che i simmetrici del punto M rispetto ai punti medi dei lati del quadrilatero sono vertici di un parallelogrammo.

8. Dimostrare che il punto di intersezione delle mediane di un quadrilatero (i segmenti che congiungono i punti medi di due lati opposti) è il punto medio del segmento che congiunge i punti medi delle diagonali.

9. In un quadrilatero $ABCD$, la retta passante per A e parallela a BC interseca la diagonale BD nel punto M, e la retta passante per B e parallela ad AD interseca la diagonale AC nel punto N.

   Dimostrare che MN è parallelo a DC.

10. Sia $ABCD$ un quadrato, e siano P e Q punti interni al quadrato e tali che AP è parallelo a QC e $AP = PQ = QC$.
    (a) Determinare le possibili posizioni del punto P.
    (b) Determinare la minima ampiezza che può avere l'angolo $D\hat{A}P$.

IMO Problems: 1959/5, 1971/2, 1973/1, 1977/1, 1982/5, 1992/4.

Geometria 3

1. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico e sia P il punto di intersezione delle diagonali AC e BD. Detti O il circocentro del triangolo APB e H l'ortocentro di CPD, si dimostri che i punti O, P, H sono allineati.

2. Determinare le coordinate dei vertici del triangolo di area massima tra quelli che hanno un vertice in $(1, 1)$ e gli altri due vertici sull'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 5$.

3. Siano a, b, c, d le lunghezze dei lati di un quadrilatero (considerati in senso orario), e sia S la sua area.

   Dimostrare che $2S \leq ac + bd$.

4. Costruire (quando è possibile) un triangolo equilatero che ha un vertice in un punto dato e gli altri due vertici su due circonferenze assegnate.

5. Assegnate due circonferenze ed una retta, tracciare (quando è possibile) una retta, parallela a quella data, che taglia sulle due circonferenze due corde di uguale lunghezza.

6. Sia Γ_2 una circonferenza tangente internamente in A ad una circonferenza Γ_1. Sia BC una corda di Γ_1 tangente a Γ_2 in D. Sia E la seconda intersezione tra la retta AD e Γ_1.

   Dimostrare che E è il punto medio di uno degli archi di estremi B e C.

7. Siano $ABMN$ e $BCQP$ i quadrati costruiti sui lati AB e BC di un triangolo, esternamente al triangolo stesso.

   Dimostrare che i centri di tali quadrati ed i punti medi di AC ed MP sono i vertici di un quadrato.

8. Siano AD, BE, CF tre ceviane del triangolo ABC passanti per un punto interno P.

   Dimostrare che
   $$\frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC} = \frac{AP}{PD}.$$

9. Siano ABC un triangolo rettangolo in A, Γ il cerchio circoscritto, Γ_1 il cerchio tangente ad AB, AC e (internamente) a Γ. Sia infine Γ_2 il cerchio tangente a AB, AC e a Γ (esternamente). Siano r_1 e r_2 i raggi di Γ_1 e Γ_2.

   Dimostrare che il prodotto $r_1 \cdot r_2$ è pari a quattro volte l'area del triangolo.

10. Dato un angolo convesso ed un punto esterno ad esso, tracciare una retta passante per il punto e che stacca nell'angolo un triangolo di perimetro assegnato.

IMO Problems: 1961/5, 1962/5, 1963/3, 1967/1, 1973/4, 1986/2, 1988/1.

Teoria dei Numeri 1

1. Un crittografo escogita il seguente metodo per codificare gli interi positivi. Per prima cosa tali interi vengono espressi in base 5; poi si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le cifre $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ e le lettere $\{V, W, X, Y, Z\}$. In tal modo risulta che VYZ, VYX, VVW sono tre interi consecutivi, presi in ordine crescente.

   Determinare l'espessione in base 10 di XYZ.

2. Determinare i valori del primo p per cui il polinomio $x^2 + px - 444p$ ha radici intere.

3. Determinare il più piccolo intero positivo a per cui $2002a + 3$ è multiplo di 59.

4. Trovare l'intero a dal valore assoluto più piccolo per cui vale il seguente criterio: "un intero positivo n è divisibile per 13 se e solo se è divisibile per 13 l'intero così costruito: si prende l'espressione di n privata della cifra delle unità e gli si somma la cifra delle unità moltiplicata per a".

5. Determinare il più piccolo intero n tale che $abc|(a + b + c)^n$ per ogni scelta di tre interi positivi a, b, c tali che $a|b^3$, $b|c^3$, $c|a^3$.

6. Trovare il MCD tra tutti gli interi della forma $p^4 - q^4$, dove p e q sono numeri primi con almeno due cifre tali che $p > q$.

7. Determinare il più grande intero positivo n con questa proprietà: "esiste una progressione aritmetica infinita di ragione 2003 i cui termini non si possono scrivere come somma di n potenze 2002-esime".

8. Per ogni intero positivo n, sia d_n il massimo comun divisore tra $100+n^2$ e $100+(n+1)^2$.

   Determinare il massimo valore possibile per d_n.

9. Definiamo la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ponendo $f(0) = f(1) = 0$ e poi per ricorrenza

   $$f(2n) = 2f(n) + 1, \qquad f(2n + 1) = 2f(n)$$

   per ogni $n \geq 1$. Per ogni intero m definiamo poi per ricorrenza una successione a_k ponendo

   $$a_0 = m, \qquad a_{k+1} = f(a_k).$$

   (a) Dimostrare che, qualunque sia il valore iniziale m, la successione a_k è nulla da un certo punto in poi.

   (b) Determinare il più piccolo valore di m per cui il primo valore di a_k ad essere nullo è il 2002-esimo.

10. Determinare le eventuali soluzioni intere dell'equazione

    $$y^2 = x^5 - 4.$$

IMO Problems: 1959/1, 1964/1, 1986/1, 1988/3, 1971/3, 1975/2.

Teoria dei Numeri 2

1. Calcolare il valore di 1432^{1432} modulo 1001.

2. Per ogni intero positivo n sia $\sigma(n)$ la somma di tutti i divisori di n (compresi 1 e n). Determinare se la funzione $\sigma(n)$ è moltiplicativa e/o completamente moltiplicativa.

3. Sia A il numero intero la cui rappresentazione decimale è costituita da 7777 cifre 7 consecutive. Consideriamo il numero A^A e sommiamo le sue cifre. Sommiamo quindi le cifre del numero così ottenuto e via di seguito, fino a rimanere con un numero di una cifra sola.

   Determinare di quale cifra si tratta.

4. Determinare le ultime 5 cifre del numero $5^{5^{5^{5^{5}}}}$.

5. Determinare (in funzione di due parametri h e k) tutte le soluzioni intere dell'equazione $2x + 4y + 5z = 3$.

6. Determinare il più piccolo intero positivo n tale che $2^n \equiv 18$ modulo 385.

7. Dimostrare che per ogni primo p esistono infiniti n tali che p divide $2^n - n$.

8. Trovare il massimo valore di $\sin x$, dove x, espresso in gradi sessagesimali, è una potenza di 2.

9. Dimostrare che, scelti comunque tre interi d, m ed n, esiste una progressione aritmetica di ragione d e lunghezza m in cui ogni termine è divisibile per una potenza n-esima.

10. Consideriamo l'insieme

$$D = \{n \in \mathbb{N} : \ n \text{ divide } 2^n + 1\}.$$

   (a) Determinare tutti i primi che appartengono a D.
   (b) Determinare tutte le potenze di primi che appartengono a D.
   (c) Determinare tutti gli elementi di D che sono prodotto di due primi.
   (d) Dimostrare che tutti gli elementi di D sono multipli di 3.
   (e) Determinare tutti gli elementi di D della forma p^2q, con p e q primi distinti.

IMO Problems: 1978/1, 1975/4, 1990/3, 2000/5.

Stage Senior Pisa 2002 – Test Finale

Problemi a risposta secca

1. Determinare il più piccolo intero $n \geq 100$ che dà resto 1 sia quando viene diviso per 7, sia quando viene diviso per 13.

2. Determinare quale resto si ottiene dividendo 1000^{1000} per 7.

3. In un piano cartesiano facciamo l'inversione rispetto alla circonferenza con centro in $(2,2)$ e passante per l'origine. Determinare l'immagine di $(1,1)$.

4. Sia M il punto medio del lato CD di un quadrato $ABCD$. Determinare il coseno di $C\widehat{A}M$.

5. Determinare quanti sono gli anagrammi della parola "STAGISTI" che iniziano con "ST".

6. Determinare quante sono le funzioni $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3\}$ tali che $f(2) \neq f(1)$.

7. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che $p(0) = p(1) = 0$ e $0 \leq p(2) \leq 10$. Determinare quanti sono i possibili valori di $p(2)$.

8. Siano $x_1, \ldots, x_{2002}$ numeri reali la somma dei cui quadrati è uguale ad 1. Determinare il massimo valore possibile per $x_1 + \ldots + x_{2002}$.

Problemi dimostrativi

9. Siano a, b, c le radici dell'equazione
$$x^3 - 4x^2 + 5x - 7 = 0.$$
Calcolare
$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

10. Sia $A = \{1,2,3,4,5\}$. Determinare quante sono le funzioni $f : A \to A$ tali che $f(f(x)) = x$ per ogni $x \in A$.

11. In un triangolo ABC si ha che l'angolo in A è il doppio dell'angolo in B. Dimostrare che $a^2 = b(b+c)$ dove a, b, c denotano le lunghezze dei lati opposti ad A, B, C, rispettivamente.

12. Determinare tutti gli interi n per cui $n^2 - 7n + 19$ è divisibile per $n - 3$.