

Stage Senior Pisa 2003 – Test finale

Problemi a risposta secca

1. Determinare il più piccolo intero positivo n per cui $7n - 3$ risulta multiplo di 29.
2. Determinare quanti sono i divisori di 10^{99} la cui espressione in base 10 termina con *almeno* 88 zeri.
3. In un triangolo ABC si ha che $AB = 42$, $BC = 56$, $CA = 49$. La mediana AM incontra la bisettrice BD nel punto E . Sia F l'intersezione tra CE ed AB .
Determinare la lunghezza di AF .
4. Determinare quanti sono gli anagrammi della parola "STAGISTI" in cui ogni lettera "S" è immediatamente seguita da una lettera "T".
5. Un'omotetia con centro nell'origine manda la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ nella circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 9$. Determinare l'equazione dell'immagine della retta $2x - 3y = 5$.
6. Determinare la probabilità di ottenere 6 punteggi diversi lanciando 6 dadi standard.
7. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = 0$ e $p(5) > 0$. Determinare il minimo valore possibile per $p(5)$.
8. Determinare quali di queste equazioni funzionali

$$f(x + y) = f(x), \quad f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(x + y) = f(x) + 2y$$

hanno come soluzioni solo funzioni bigettive.

Problemi dimostrativi

9. Siano x , y e z numeri reali positivi. Dimostrare che

$$x^4 + y^4 + z^4 \geq \sqrt{8}xyz.$$

10. Sia A un insieme costituito da n punti distinti appartenenti ad una stessa circonferenza. Determinare quanti sono i poligoni convessi i cui vertici appartengono all'insieme A .
11. In un rombo $ABCD$ i raggi delle circonferenze circoscritte ad ABC e BCD sono, rispettivamente, 5 e 10. Determinare l'area del rombo.
12. (a) Determinare per quali interi positivi n si ha che

$$n^{2003} + 2003^n$$

è divisibile per 3.

- (b) Determinare quindi per quali interi positivi n la stessa espressione è divisibile per 9.