

# Stage Senior Pisa 2004 – Test finale

## Problemi a risposta secca

1. Determinare il più piccolo intero positivo  $n$  per cui  $35n + 71$  è multiplo di 24.
2. Determinare la somma dei quadrati delle tre radici (eventualmente complesse) del polinomio  $x^3 - 3x + 1$ .
3. Determinare quanti sono gli anagrammi della parola “STAGISTI” in cui lettera “A” viene prima della lettera “G” (non è detto che le due lettere siano l’una di seguito all’altra).
4. Calcolare

$$\sum_{k=1}^n \binom{n+2}{k}.$$

5. In un triangolo isoscele la base è lunga 20 e forma angoli di  $15^\circ$  con i due lati uguali. Determinare il raggio del cerchio circoscritto.
6. Determinare il più piccolo intero  $n \geq 2004$  per cui  $3^n - 1$  è multiplo di 11.
7. In un triangolo si ha che  $AB = 4$ ,  $BC = 5$ ,  $CA = 6$ . Sia  $D$  il punto medio dell’arco della circonferenza circoscritta di estremi  $B$  e  $C$  che non contiene il punto  $A$ . Sapendo che  $BD = 2\sqrt{2}$ , determinare  $AD$ .
8. Determinare tutte le funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che

$$f(x + 2y) = 3x + 2f(y) - 4$$

per ogni coppia di numeri reali  $x$  e  $y$ .

## Problemi dimostrativi

9. Siano  $a, b, c$  e  $x, y, z$  numeri reali positivi tali che  $a^2 + b^2 = c^2$  e  $x^2 + y^2 = z^2$ .  
Dimostrare che
$$(a + x)^2 + (b + y)^2 \leq (c + z)^2.$$
Determinare inoltre in quali casi si ha l’uguaglianza.
10. Da un normale mazzo di 52 carte abbiamo tolto alcune carte, avendo cura di lasciare gli assi. A questo punto si estraggono (contemporaneamente) quattro carte a caso. Sapendo che la probabilità di estrarre i quattro assi è  $1/1001$ , determinare quante carte sono state tolte dal mazzo.
11. Dimostrare che in ogni triangolo acutangolo i simmetrici dell’ortocentro rispetto ai punti medi dei lati giacciono sulla circonferenza circoscritta.
12. (a) Determinare tutti i primi  $p$  per cui  $3^p - 1$  è un cubo perfetto.  
(b) Determinare tutti gli interi positivi  $n$  per cui  $3^n - 1$  è un cubo perfetto.